

❖ Géométrie repérée ❖

I - Coordonnées d'un vecteur

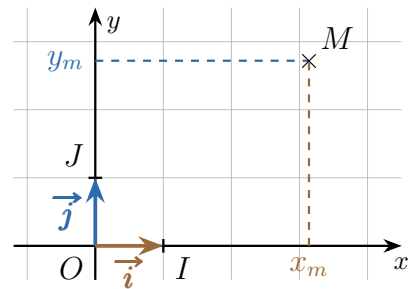
Définition

Soient O , I et J trois points du plan. Lorsque les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et $OI = OJ = 1$, on dit que $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ est un **repère orthonormé**.

Le point O est l'**origine** du repère, la droite (OI) est l'**axe des abscisses** et la droite (OJ) est l'**axe des ordonnées**.

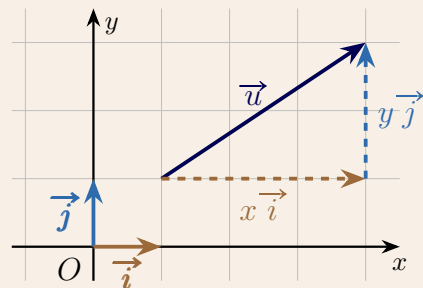
Un repère $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ peut aussi se noter $(O; I; J)$, ou $(O; \vec{i}; \vec{j})$ en notant $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Dans un tel repère, tout point M du plan est repéré par un unique couple $(x_M; y_M)$ de nombres réels, appelé **coordonnées** du point M .



Propriété 1 (Admise)

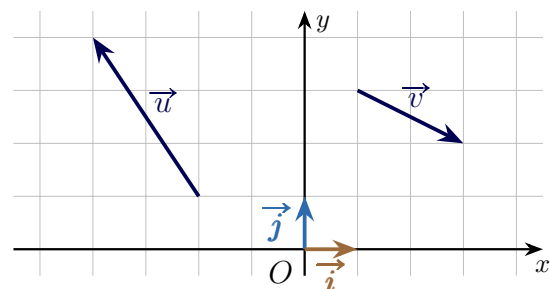
Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé. Tout vecteur $\vec{u}$ du plan se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, où x et y sont des nombres réels. On dit que x et y sont les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$, et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exemple

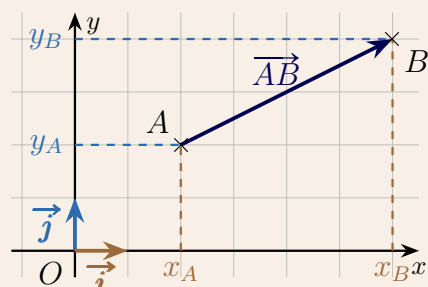
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.



Propriété 2

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.



Démonstration

Les coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ sont les nombres réels tels que :

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j}$$

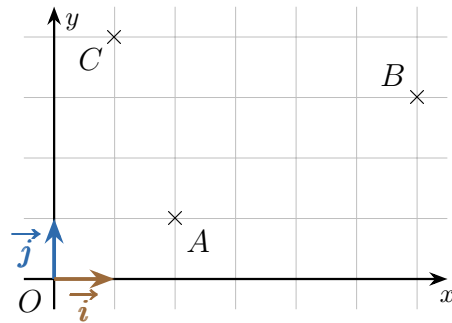
Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, donc

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} - (x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) = (x_B - x_A) \vec{i} + (y_B - y_A) \vec{j}$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. ◆

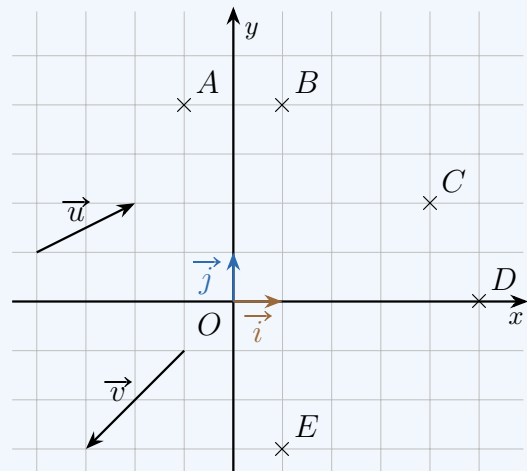
Exemple

- ❖ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- ❖ $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- ❖ $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 - 6 \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

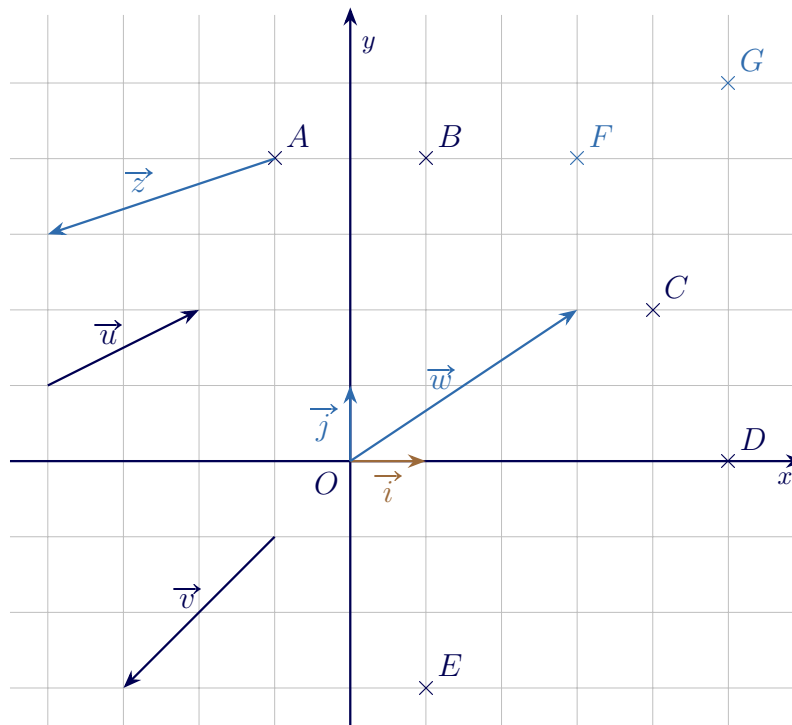


Exercice 1

1. Représenter le vecteur $\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. Représenter le vecteur $\vec{z}$ d'origine A et de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Construire le point F tel que $\overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Construire le point G tel que $\overrightarrow{CG} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. Donner par lecture graphique les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
6. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$.



Solution



5. Par lecture graphique, on a $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

6. On a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 - 5 \\ -3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.



II - Calculs avec les coordonnées

Propriété 3

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

2. Pour tout nombre réel k , le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Démonstration

Par définition, on a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

1. On a alors :

$$\vec{u} + \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$$

Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont donc $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

2. Pour tout nombre réel k , on a :

$$k\vec{u} = k(x\vec{i} + y\vec{j}) = kx\vec{i} + ky\vec{j}$$

Les coordonnées de $k\vec{u}$ sont donc $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.



Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées de $2\vec{u} - 3\vec{v}$ sont alors :

$$\begin{pmatrix} 2 \times 3 - 3 \times (-1) \\ 2 \times (-5) - 3 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Propriété 4

Si A et B sont des points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère orthonormé, alors le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Démonstration

Notons $M(x_M; y_M)$. On sait que ce point vérifie $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Or, on a les coordonnées suivantes :

$$\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix} \quad \vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x_M - x_A - x_B \\ 2y_M - y_A - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En regardant les abscisses, on a alors :

$$2x_M - x_A - x_B = 0 \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

De même, en regardant les ordonnées, on a $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$, d'où le résultat.



Exemple

On considère les points $A(3; 1)$ et $B(-2; 4)$.

Le milieu M du segment $[AB]$ a donc pour coordonnées :

$$x_M = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{1 + 4}{2} = \frac{5}{2}$$

Propriété 5

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

La norme du vecteur $\vec{u}$ est égale à $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Démonstration

Considérons trois points A, B, C tels que

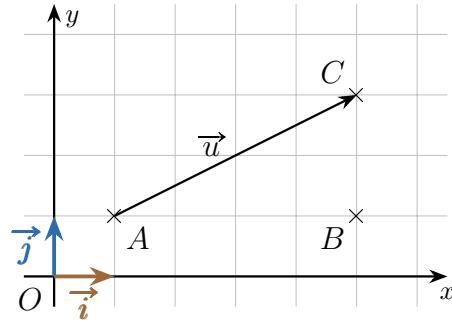
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est donc rectangle en B .

D'après le théorème de Pythagore, on a donc :

$$\|\vec{u}\|^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 = x^2 + y^2$$

d'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Exemple

On considère le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Remarque

En particulier, pour des points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ comme les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Exercice 2

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère les points $A(-1; 3)$, $B(4; 1)$ et $C(3; 4)$. On considère également deux points $D(x_D; y_D)$ et $E(x_E; y_E)$ tels que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AC}$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $2\overrightarrow{AC}$.
2. Exprimer en fonction de x_D et y_D les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$, puis en déduire les coordonnées du point D .
3. Exprimer en fonction de x_E et y_E les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BE}$, puis en déduire les coordonnées du point E .
4. Calculer les coordonnées des milieux des segments $[AE]$ et $[CD]$.
5. Quelle est la nature du quadrilatère $ADEC$?

Solution

1. On a :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - (-1) \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 4 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5 + 4 \\ -2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2. On a $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - (-1) \\ y_D - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D + 1 \\ y_D - 3 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, on doit donc avoir $\begin{pmatrix} x_D + 1 \\ y_D - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a donc d'une part $x_D + 1 = 9$ donc $x_D = 8$, puis d'autre part $y_D - 3 = -1$ donc $y_D = 2$. Les coordonnées du point D sont donc (8; 2).

3. On a $\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - 4 \\ y_E - 1 \end{pmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AC}$, on doit donc avoir $\begin{pmatrix} x_E - 4 \\ y_E - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a donc d'une part $x_E - 4 = 8$ donc $x_E = 12$, puis d'autre part $y_E - 1 = 2$ donc $y_E = 3$. Les coordonnées du point E sont donc (12; 3).

4. Notons $M(x_M; y_M)$ le milieu de $[AE]$ et $N(x_N; y_N)$ le milieu de $[CD]$. On a alors :

$$x_M = \frac{-1 + 12}{2} = \frac{11}{2} \quad y_M = \frac{3 + 3}{2} = 3 \quad x_N = \frac{3 + 8}{2} = \frac{11}{2} \quad y_N = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

Par conséquent, M et N sont identiques, et de coordonnées $\left(\frac{11}{2}; 3\right)$.

5. Les diagonales $[AE]$ et $[CD]$ du quadrilatère ADEC ont le même milieu, donc ADEC est un parallélogramme. 

III - Déterminant de deux vecteurs

Définition

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Remarque

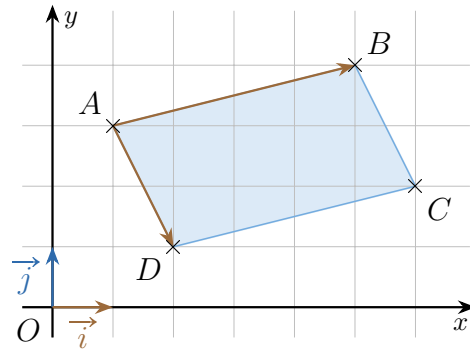
Si $ABCD$ est un parallélogramme, le déterminant $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est l'aire de ce parallélogramme, au signe près.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc :

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times (-2) - 1 \times 1 = -9$$

et l'aire du parallélogramme $ABCD$ est :

$$\mathcal{A}(ABCD) = 3 + 2 \times \frac{4}{2} + 2 \times \frac{2}{2} = 9$$



Propriété 6

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Démonstration (Au programme)

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. On a donc $x' = kx$ et $y' = ky$, d'où :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y = xky - kxy = 0$$

Réciproquement, si $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$, alors $xy' = x'y$. Étudions différents cas possibles :

- ❖ Supposons que $x = 0$. On a alors $x'y = 0$. Comme $\vec{u}$ n'est pas le vecteur nul, on a nécessairement $y \neq 0$, donc $x' = 0$. Dans ce cas, on a donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}$, donc $\vec{v} = \frac{y'}{y}\vec{u}$, et ces vecteurs sont donc colinéaires.
- ❖ De façon analogue, si $y = 0$, les deux vecteurs sont colinéaires.
- ❖ Supposons maintenant que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Dans ce cas, la condition $xy' = x'y$ peut se réécrire $\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$. Si l'on note $k = \frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$ ce nombre, on a alors $x' = kx$ et $y' = ky$, donc $\vec{v} = k\vec{u}$: ces deux vecteurs sont donc colinéaires.



Exemple

On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On a :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 8 - (-5) \times (-3) = 16 - 15 = 1 \neq 0$$

donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 3

On considère les points $A(-4; -1)$, $B(9; 3)$, $C(-2; -4)$, $D\left(\frac{9}{2}; -2\right)$ et $E\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

1. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

2. Le point E appartient-il à la droite (AB) ?

Solution

1. On cherche à savoir si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ou non. Leurs coordonnées sont

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 - (-4) \\ 3 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} - (-2) \\ -2 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 13 & \frac{13}{2} \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 13 \times 2 - 4 \times \frac{13}{2} = 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

On peut aussi directement voir que $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

2. On cherche à savoir si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires ou non. Leurs coordonnées sont

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 1 - (-4) \\ \frac{1}{2} - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE}) = \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 4 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 13 \times \frac{3}{2} - 4 \times 5 = \frac{39}{2} - 20 \neq 0$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas colinéaires, et le point E n'appartient pas à la droite (AB) . 