

❖ Équations et inéquations ❖

I - Équations

Propriété 1 (Admise)

Lorsque l'on effectue la même opération aux deux membres d'une égalité, cette égalité reste vraie.

Exercice 1

1. Le périmètre P d'un rectangle de longueur L et de largeur l est $P = 2(L + l)$. Exprimer L en fonction de l et P .
2. En physique, la loi des gaz parfaits relie la pression P d'un gaz, son volume V , sa quantité de matière n et sa température T : $PV = nRT$. R est une constante appelée constante des gaz parfaits. Exprimer T en fonction de P , V et n .
3. Le volume V d'un cylindre de hauteur h et de rayon r est donné par $V = \pi r^2 h$. Exprimer r en fonction de V et h .

Solution

1. $P = 2(L + l) \Rightarrow \frac{P}{2} = L + l \Rightarrow L = \frac{P}{2} - l$
2. $PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR}$
3. $V = \pi r^2 h \Rightarrow r^2 = \frac{V}{\pi h} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$ car $r \geq 0$



❖ Équations du premier degré

Exemple

On résout l'équation $2x - 5 = 7x + 1$.

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 7x + 1 \Leftrightarrow -5x - 5 \stackrel{-7x}{=} 1 \\ &\Leftrightarrow -5x \stackrel{+5}{=} 6 \\ &\Leftrightarrow x \stackrel{\div(-5)}{=} -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{6}{5} \right\}$.

❖ Équations produit nul

Propriété 2 (Admise)

Un produit de plusieurs nombres est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul.

Exemple

On résout l'équation $(3x - 6)(4 - x)(2x + 1) = 0$.

$$\begin{aligned}(3x - 6)(4 - x)(2x + 1) = 0 &\Leftrightarrow 3x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad 4 - x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 1 = 0 \\&\Leftrightarrow 3x \stackrel{+6}{=} 6 \quad \text{ou} \quad 4 \stackrel{+x}{=} x \quad \text{ou} \quad 2x \stackrel{-1}{=} -1 \\&\Leftrightarrow x \stackrel{\div 3}{=} 2 \quad \text{ou} \quad x = 4 \quad \text{ou} \quad x \stackrel{\div 2}{=} -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}; 2; 4\right\}$.

❖ Équations quotient nul

Propriété 3

Un quotient est nul, si et seulement si, son numérateur est nul.

Exemple

On résout l'équation $\frac{4x + 1}{2 + x^2} = 0$. Pour tout nombre réel x , $2 + x^2 \geq 2 > 0$, donc il n'y a pas de valeur interdite.

$$\begin{aligned}\frac{4x + 1}{2 + x^2} = 0 &\Leftrightarrow 4x + 1 = 0 \\&\Leftrightarrow 4x \stackrel{-1}{=} -1 \\&\Leftrightarrow x \stackrel{\div 4}{=} -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

❖ Racine carrée

Propriété 4

Soit a un nombre réel. On considère l'équation $x^2 = a$.

1. Si $a < 0$, cette équation n'a pas de solution réelle.
2. Si $a = 0$, cette équation admet une unique solution, qui est 0.
3. Si $a > 0$, cette équation admet deux solutions réelles, qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration

1. Supposons que $a < 0$. Pour un nombre réel x , si $x \geq 0$, alors $x^2 \geq 0$, et si $x < 0$, alors $x^2 > 0$. Dans les deux cas, il est impossible d'avoir $x^2 = a$, donc cette équation n'admet pas de solution réelle.
2. Pour $a = 0$, l'équation s'écrit $x^2 = 0$: il s'agit alors d'une équation produit nul, dont la seule solution est $x = 0$.
3. Supposons que $a > 0$. On peut alors écrire $a = (\sqrt{a})^2$. En utilisant une identité remarquable, on a alors pour tout nombre réel x :

$$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

L'équation $x^2 = a$ revient donc à une équation produit nul, dont les solutions sont $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$.



Exemple

On résout l'équation $(x - 5)^2 = 16$. Comme $16 > 0$:

$$\begin{aligned}(x - 5)^2 = 16 &\Leftrightarrow x - 5 = \sqrt{16} \quad \text{ou} \quad x - 5 = -\sqrt{16} \\&\Leftrightarrow x - 5 = 4 \quad \text{ou} \quad x - 5 = -4 \\&\Leftrightarrow x \stackrel{+5}{=} 9 \quad \text{ou} \quad x \stackrel{+5}{=} 1\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \{1; 9\}$.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes.

1. $2x - 1 = 5x + 4$

2. $x(2x + 1)(x - 3) = 0$

3. $\frac{4x}{2x + 5} + \frac{3 - 2x}{x - 1} = 0$

4. $(3x - 1)^2 - 5 = 20$

Solution

1.

$$\begin{aligned}2x - 1 = 5x + 4 &\Leftrightarrow -3x - 1 = 4 \\&\Leftrightarrow -3x = 5 \\&\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

2.

$$\begin{aligned}x(2x + 1)(x - 3) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \\&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 3 \\&\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 3\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 3\right\}$.

3. On commence par trouver les valeurs interdites.

$$2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \quad \text{et} \quad x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Les valeurs interdites sont donc $-\frac{5}{2}$ et 1.

Ensuite, pour tout nombre réel x distinct de $-\frac{5}{2}$ et 1, on a :

$$\begin{aligned}\frac{4x}{2x + 5} + \frac{3 - 2x}{x - 1} &= \frac{4x(x - 1)}{(2x + 5)(x - 1)} + \frac{(3 - 2x)(2x + 5)}{(2x + 5)(x - 1)} \\&= \frac{4x^2 - 4x}{(2x + 5)(x - 1)} + \frac{6x + 15 - 4x^2 - 10x}{(2x + 5)(x - 1)} \\&= \frac{-8x + 15}{(2x + 5)(x - 1)} = 0\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{4x}{2x+5} + \frac{3-2x}{x-1} = 0 &\Leftrightarrow \frac{-8x+15}{(2x+5)(x-1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow -8x+15 = 0 \\ &\Leftrightarrow -8x = -15 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{15}{8}\end{aligned}$$

Puisque $\frac{15}{8} \neq -\frac{5}{2}$ et $\frac{15}{8} \neq 1$, cette valeur est bien solution de l'équation.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{15}{8} \right\}$.

4.

$$\begin{aligned}(3x-1)^2 - 5 = 20 &\Leftrightarrow (3x-1)^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow 3x-1 = 5 \quad \text{ou} \quad 3x-1 = -5 \\ &\Leftrightarrow 3x = 6 \quad \text{ou} \quad 3x = -4 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{4}{3}; 2 \right\}$.



II - Inéquations

Propriété 5

Soient a, b, c, d quatre nombre réels, avec d non nul.

1. $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ et $a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$

2. Si $d > 0$, alors $a < b \Leftrightarrow ad < bd$ et $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$

3. Si $d < 0$, alors $a < b \Leftrightarrow ad > bd$ et $a < b \Leftrightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$

Démonstration

1. On a :

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow a - b + c - c < 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) < 0 \Leftrightarrow a + c < b + c$$

Pour la seconde propriété, il suffit de remarquer que $a - c = a + (-c)$ et $b - c = b + (-c)$: on peut donc appliquer la première propriété en remplaçant c par $-c$.

2. Supposons que $d > 0$. On a :

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow (a - b)d < 0$$

puisque $d > 0$. Ainsi,

$$a < b \Leftrightarrow (a - b)d < 0 \Leftrightarrow ad - bd < 0 \Leftrightarrow ad < bd$$

Pour la seconde propriété, on remplace d par $\frac{1}{d}$, qui est strictement positif :

$$a < b \Leftrightarrow a \times \frac{1}{d} < b \times \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{d} < \frac{b}{d}$$

3. Supposons que $d < 0$. On a :

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Leftrightarrow (a - b)d > 0$$

puisque $d < 0$. Ainsi,

$$a < b \Leftrightarrow (a - b)d > 0 \Leftrightarrow ad - bd > 0 \Leftrightarrow ad > bd$$

Pour la seconde propriété, on remplace d par $\frac{1}{d}$, qui est strictement négatif :

$$a < b \Leftrightarrow a \times \frac{1}{d} > b \times \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{d} > \frac{b}{d}$$



Exemple

On cherche un encadrement de $A = -5x + 12$ pour $-3 \leq x < 2$.

$$\begin{aligned} -3 \leq x < 2 &\stackrel{\times(-5)}{\Leftrightarrow} 15 \geq -5x > -10 \\ &\stackrel{+12}{\Leftrightarrow} 27 \geq -5x + 12 > 2 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $-3 \leq x < 2$, on a $2 < A \leq 27$.

Propriété 6

Soient a, b, c, d quatre nombre réels. Si $a < b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$.

Démonstration

Comme $a < b$ et $c < d$, on a $a - b < 0$ et $c - d < 0$. Ces deux nombres sont strictement négatifs, donc leur somme également, d'où $(a - b) + (c - d) < 0$. Or,

$$(a - b) + (c - d) = a - b + c - d = (a + c) - (b + d)$$

donc

$$(a - b) + (c - d) < 0 \Rightarrow (a + c) - (b + d) < 0 \Rightarrow a + c < b + d$$



Exemple

On cherche un encadrement de $B = 2x + 6y$ pour $-5 \leq x \leq 5$ et $0 \leq y \leq 5$.

❖ D'une part, $-5 \leq x \leq 5$, donc $-10 \leq 2x \leq 10$.

❖ D'autre part, $0 \leq y \leq 5$, donc $0 \leq 6y \leq 30$.

En additionnant, on en déduit que :

$$-10 + 0 \leq 2x + 6y \leq 10 + 30 \Leftrightarrow -10 \leq B \leq 40$$

❖ Inéquations du premier degré

Exemple

On résout l'inéquation $2x + 3 \leq 4 - 5x$.

$$\begin{aligned} 2x + 3 &\leq 4 - 5x \stackrel{+5x}{\Leftrightarrow} 7x + 3 \leq 4 \\ &\stackrel{-3}{\Leftrightarrow} 7x \leq 1 \\ &\stackrel{\div 7}{\Leftrightarrow} x \leq \frac{1}{7} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{1}{7} \right]$.

❖ Inéquations produit

Exemple

On résout l'inéquation $(3x - 9)(1 - 2x) \leq 0$. On cherche le signe de $3x - 9$ et de $1 - 2x$.

$$3x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 2x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
$3x - 9$		$-$	0	$+$	
$1 - 2x$	$+$	0	$-$		
$(3x - 9)(1 - 2x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\mathcal{S} = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \cup [3; +\infty[$.

❖ Inéquations quotient

Exemple

On résout l'inéquation $\frac{2 - 6x}{3x - 2} \geq 0$. On cherche le signe de $2 - 6x$ et de $3x - 2$.

$$2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 6x \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

$$3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

On dresse un tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$2 - 6x$		+	0	-	
$3x - 2$	-	0	+		
$\frac{2 - 6x}{3x - 2}$	-	0	+	0	-

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3} \right]$.

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes.

1. $40 + 0,35x > 100 + 0,2x$

2. $(-2x + 1)(3x - 4) \geq 0$

3. $\frac{1 - 3x}{-4 - 2x} < 0$

Solution**1.**

$$40 + 0,35x > 100 + 0,2x \Leftrightarrow 40 + 0,15x > 100$$

$$\Leftrightarrow 0,15x > 60$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{60}{0,15} = 400$$

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\mathcal{S} =]400; +\infty[$.

2.

$$-2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$-2x + 1$	+	0	-	
$3x - 4$		-	0	+
$(-2x + 1)(3x - 4)$	-	0	+	0

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}; \frac{4}{3} \right]$.

3.

$$1 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

$$-4 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -2$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$1 - 3x$		+	0	-
$-4 - 2x$	+	0	-	
$\frac{1 - 3x}{-4 - 2x}$	+	0	-	0

L'ensemble des solutions de cette inéquation est donc $\mathcal{S} = \left] -2; \frac{1}{3} \right[$.

