

## ❖ Information chiffrée ❖

### I - Proportions et pourcentages

#### 1 - Proportion

##### Définition

On considère une **population**  $A$  et une **sous-population**  $B$  de celle-ci. On note respectivement  $n_A$  et  $n_B$  le nombre d'individus de  $A$  et  $B$ , ce que l'on appelle aussi leur **effectif**. La **proportion**, ou la **fréquence**, de  $B$  dans  $A$  est le nombre  $p = \frac{n_B}{n_A}$ .

##### Exemple

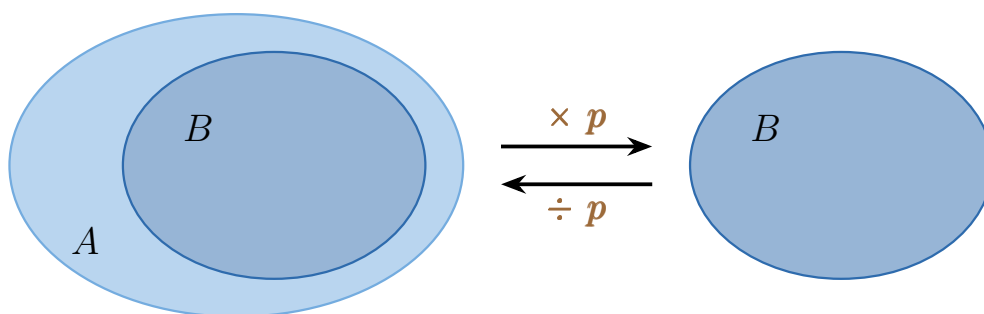
Dans une classe, il y a 12 filles sur 30 élèves.

La proportion de filles dans cette classe est :

$$p = \frac{n_B}{n_A} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

##### Remarque

On peut voir la proportion  $p = \frac{n_B}{n_A}$  comme le nombre par lequel on doit multiplier l'effectif  $n_A$  pour obtenir l'effectif  $n_B$ .



##### Exemple

- ❖ Dans une classe de 24 élèves, la proportion de filles est de 75 %.

On a  $n_A = 24$  et  $p = 75\% = 0,75$ , donc :

$$p = \frac{n_B}{n_A} \Rightarrow n_B = p \times n_A = 0,75 \times 24 = 18$$

Il y a donc 18 filles dans cette classe.

- ❖ Dans une classe, il y a 21 filles, ce qui représente 60 % des élèves.

On a  $n_B = 21$  et  $p = 60\% = 0,6$ , donc :

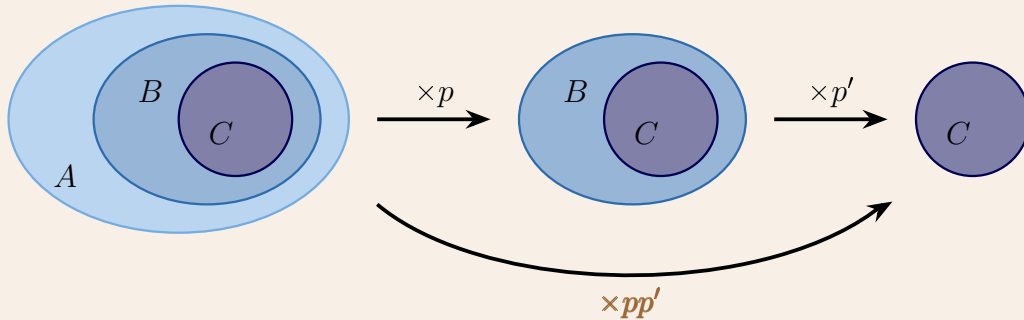
$$p = \frac{n_B}{n_A} \Rightarrow n_B = p \times n_A \Rightarrow n_A = \frac{n_B}{p} = \frac{21}{0,6} = 35$$

Il y a donc 35 élèves au total dans cette classe.

## 2 - Proportion de proportion

### Propriété 1

On considère une population  $A$ , une sous-population  $B$  de  $A$  et une sous-population  $C$  de  $B$ . Si  $p$  est la proportion de  $B$  dans  $A$  et  $p'$  est la proportion de  $C$  dans  $B$ , alors la proportion de  $C$  dans  $A$  est  $p \times p'$ .



### Démonstration

Par définition,  $p = \frac{n_B}{n_A}$  et  $p' = \frac{n_C}{n_B}$ . Ainsi,

$$p \times p' = \frac{n_B}{n_A} \times \frac{n_C}{n_B} = \frac{n_B \times n_C}{n_A \times n_B} = \frac{n_C}{n_A}$$

ce qui est la proportion de  $C$  dans  $A$ . ◆

### Exemple

Dans une classe, 60 % des élèves sont des filles. Parmi elles, 75 % sont brunes.

On a  $p = 60\% = 0,6$  et  $p' = 75\% = 0,75$ , donc  $p \times p' = 0,6 \times 0,75 = 0,45 = 45\%$ .

Par conséquent, 45% des élèves de cette classe sont des filles brunes.

### Exercice 1

Dans un lycée de 800 élèves, on a recueilli les informations suivantes.

1. 55 % des élèves viennent au lycée en transport en commun. Combien cela représente-t-il d'élèves ?
2. Ce lycée compte 316 élèves de première. Quel pourcentage du nombre total d'élèves cela représente-t-il ?
3. Parmi les élèves de terminale, 27 ont choisi l'option mathématiques expertes, ce qui représente 12 % d'entre eux. Combien ce lycée compte-t-il d'élèves de terminale ?
4. 16 % des élèves résident à l'internat, et parmi eux 37,5 % sont des filles. Calculer de deux façons différentes la proportion de filles qui résident à l'internat dans ce lycée.

### Solution

1.  $800 \times 55\% = 800 \times 0,55 = 440$

*Il y a donc 440 élèves de ce lycée qui viennent en transport en commun.*

2.  $\frac{316}{800} = 0,395 = 39,5\%$

*39,5 % des élèves de ce lycée sont en première.*

$$3. \frac{27}{12\%} = \frac{27}{0,12} = 225$$

Ce lycée compte donc 225 élèves de terminale.

4. ❖ Par un calcul direct, la proportion de filles qui résident à l'internat est :

$$16\% \times 37,5\% = 0,16 \times 0,375 = 0,06 = 6\%$$

$$\text{❖ } 800 \times 16\% = 800 \times 0,16 = 128$$

128 élèves résident à l'internat.

$$128 \times 37,5\% = 128 \times 0,375 = 48$$

Parmi eux, 48 sont des filles.

$$\frac{48}{800} = 0,06 = 6\%$$

Il y a donc 6% des élèves qui sont des filles et qui résident à l'internat. ◆

## II - Évolution d'une quantité

### Définition

On considère une quantité qui évolue d'une **valeur initiale**  $V_i$  à une **valeur finale**  $V_f$ .

❖ La **variation absolue** est le nombre  $V_f - V_i$ .

❖ Le **coefficient multiplicateur** est le nombre  $\frac{V_f}{V_i}$ .

❖ Le **taux d'évolution**, ou **variation relative**, est le nombre  $\frac{V_f - V_i}{V_i}$ .

### Exemple

Il y a un an, Alice mesurait 1,60 m. Aujourd'hui, elle mesure 1,72 m.

❖  $V_f - V_i = 1,72 - 1,60 = 0,12$  : Alice a grandi de 0,12 m, soit 12 cm.

❖  $\frac{V_f}{V_i} = \frac{1,72}{1,60} = 1,075$  : Alice est 1,075 fois plus grande.

❖  $\frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{1,72 - 1,60}{1,60} = \frac{0,12}{1,60} = 0,075 = 7,5\%$  : sa taille a augmenté de 7,5 %.

### Propriété 2

Si l'on note  $t$  le taux d'évolution d'une quantité et  $CM$  son coefficient multiplicateur, alors  $t = CM - 1$  et  $CM = t + 1$ .

### Démonstration

Par définition :  $t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - \frac{V_i}{V_i} = CM - 1$ .

On en déduit immédiatement que  $CM = t + 1$ . ◆

### Exemple

❖ On considère une diminution de 15 %.

Le coefficient multiplicateur est  $CM = 1 + t = 1 - 15\% = 1 - 0,15 = 0,85$ .

❖ On considère un coefficient multiplicateur de 2,3.

Le taux d'évolution associé est  $t = CM - 1 = 2,3 - 1 = 1,3 = 130\%$ .

## Exercice 2

Aux élections législatives de 2017, 27 128 488 personnes sur les 47 293 103 inscrites sur les listes électorales françaises se sont abstenues de voter au second tour.

1. Déterminer le taux d'abstention au second tour des législatives de 2017. Arrondir au dixième de pourcent près.

On donne ci-dessous l'évolution du taux d'abstention aux élections législatives dans un département.

| 2002-2007 | 2007-2012 | 2012-2017 |
|-----------|-----------|-----------|
| + 5,6 %   | − 3,3 %   | + 42,7 %  |

2. Le taux d'absentéisme était de 43,87 % en 2002. Déterminer le taux d'absentéisme en 2007.
3. Le taux d'absentéisme était de 63,92 % en 2017. Déterminer le taux d'absentéisme en 2012.
4. Le taux d'évolution du taux d'abstention entre 2007 et 2012 du tableau ci-dessus est-il cohérent avec les résultats précédents ?

## Solution

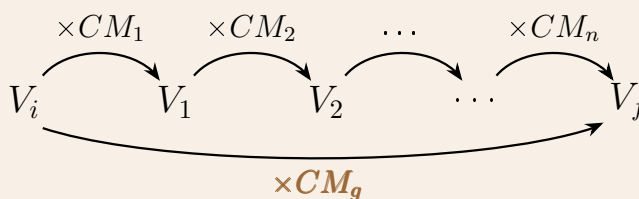
1.  $\frac{27\,128\,488}{47\,293\,103} \approx 0,574 = 57,4\%$   
*Le taux d'abstention au second tour en 2017 était d'environ 57,4 %.*
2.  $43,87 \times (1 + 5,6\%) = 43,87 \times (1 + 0,056) = 43,87 \times 1,056 \approx 46,33$   
*Le taux d'abstention en 2007 était d'environ 46,33 %.*
3.  $\frac{63,92}{1 + 42,7\%} = \frac{63,92}{1 + 0,427} = \frac{63,92}{1,427} \approx 44,79$   
*Le taux d'abstention en 2012 était d'environ 44,79 %.*
4.  $46,33 \times (1 - 3,3\%) = 46,33 \times (1 - 0,033) = 46,33 \times 0,967 \approx 44,8$   
*Ce résultat est bien cohérent avec le taux de 44,79 % trouvé à la question précédente.*



## III - Évolutions successives et réciproques

### Propriété 3

Une quantité subit plusieurs évolutions successives de coefficients multiplicateurs  $CM_1, \dots, CM_n$ . Le **coefficient multiplicateur global** est  $CM_g = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n$ .



### Démonstration

On a  $V_1 = V_i \times CM_1$ , puis  $V_2 = V_1 \times CM_2 = V_i \times CM_1 \times CM_2$  et ainsi de suite. De proche en proche, on obtient donc :

$$V_f = V_i \times CM_1 \times CM_2 \times \cdots \times CM_n$$



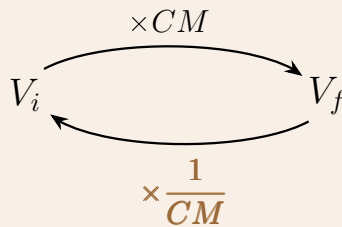
### Exemple

Pendant une période de soldes, le prix d'un article diminue de 15 % puis de 20 %.

Les coefficients multiplicateurs sont  $CM_1 = 1 - 15\% = 0,85$  et  $CM_2 = 1 + 20\% = 1,2$ , donc le coefficient multiplicateur global est  $CM_g = 0,85 \times 1,2 = 1,02 = 1 + 2\%$  : le prix a donc augmenté de 2 %.

### Propriété 4

Une quantité évolue avec un coefficient multiplicateur  $CM$ . Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal  $\frac{1}{CM}$ .



### Démonstration

On a  $V_i \times CM = V_f$ , donc  $V_f = \frac{V_i}{CM} = V_i \times \frac{1}{CM}$ .



### Exemple

Le prix d'un article augmente de 25 %. Le coefficient multiplicateur est 1,25. Le coefficient multiplicateur réciproque est  $\frac{1}{1,25} = 0,8$ , ce qui correspond à une diminution de 80 %. Pour revenir au prix initial, cet article doit donc voir son prix diminuer de 80 %.

### Exercice 3

Entre 2015 et 2016, la fréquentation de la tour Eiffel a baissé de 14,32 %, puis elle a augmenté de 4,55 % de 2016 à 2017.

1. Déterminer le taux d'évolution global entre 2015 et 2017. Arrondir au centième de pourcent près.
2. Sachant que le nombre de visiteurs en 2015 était de 6,92 millions, donner une approximation du nombre de visiteurs en 2017.
3. Quelle devrait être le taux d'évolution entre 2017 et 2018 pour que la fréquentation en 2018 soit égale à celle de 2015 ?

### Solution

1. Les coefficients multiplicateurs sont  $CM_1 = 1 - 14,32\% = 0,8568$  et  $CM_2 = 1 + 4,55\% = 1,0455$ . Le coefficient multiplicateur global est donc  $CM_g = 0,8568 \times 1,0455 \approx 0,8958$ .

Le taux d'évolution global est donc d'environ  $0,8958 - 1 = -0,1042 = -10,42\%$ .

**2.**  $6,92 \times 0,8958 \approx 6,2$

*En 2017, il y a eu environ 6,2 millions de visiteurs.*

**3.**  $\frac{1}{0,8958} \approx 1,1163$  et  $1 - 1,1163 = 0,1163 = 11,63\%$

*Le taux d'évolution devrait donc être environ égal à 11,63 % entre 2017 et 2018.*

