

❖ Vecteurs du plan ❖

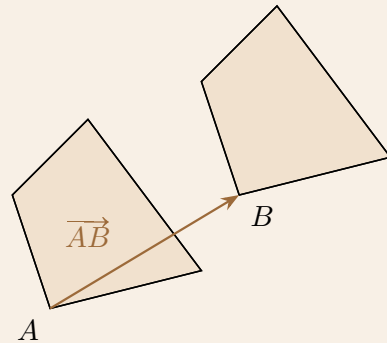
I - Notion de vecteur

Définition

Pour deux points du plan A et B , la translation qui transforme A en B est représentée par le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$.

Celui-ci est caractérisé par :

- ❖ sa **direction** : la droite (AB)
- ❖ son **sens** : de A vers B
- ❖ sa **norme**, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$: la longueur AB .



Exemples

- ❖ Le **vecteur opposé** à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- ❖ Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ se note $\vec{0}$ et s'appelle le **vecteur nul**.

Définition

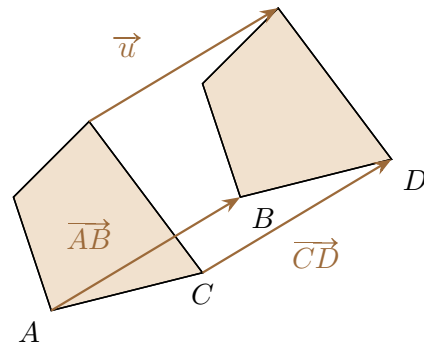
Deux vecteurs non nuls sont **égaux** lorsqu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Exemple

La translation qui transforme A en B transforme également C en D , donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux. Pour simplifier les écritures, on peut aussi noter $\vec{u}$ un tel vecteur :

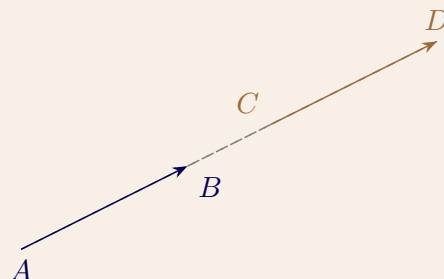
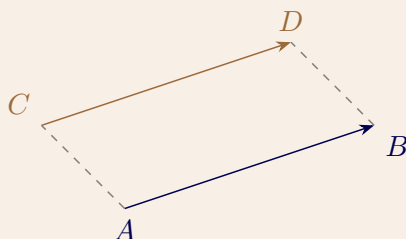
$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

On dit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des **représentants** du vecteur $\vec{u}$.



Propriété 1

Soient A, B, C, D quatre points du plan deux à deux distincts. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.



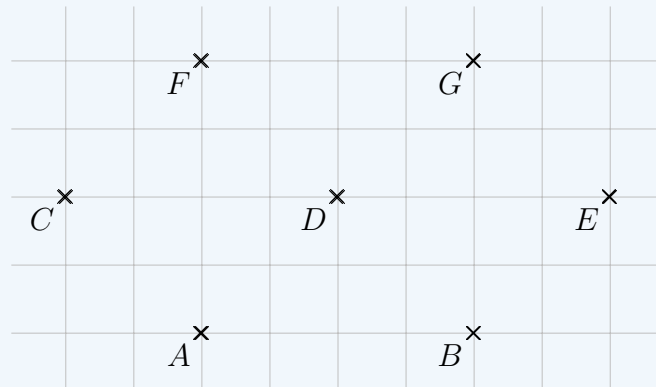
Démonstration

Supposons que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Ces vecteurs ont alors la même direction, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Ils ont la même norme, donc $AB = CD$. Ainsi, les quatre points A, B, C et D forment un parallélogramme. Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont le même sens, ce parallélogramme s'appelle $ABDC$.

Réciproquement, supposons que $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati. Alors les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueur, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction et la même norme. De plus, le parallélogramme s'appelant $ABDC$, ils ont également le même sens, donc sont égaux. $\blacklozenge$

Exercice 1

On considère la figure ci-dessous.



1. Compléter les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C\dots} \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{\dots G} \quad \overrightarrow{CG} = \dots \quad \overrightarrow{FA} = -\dots$$

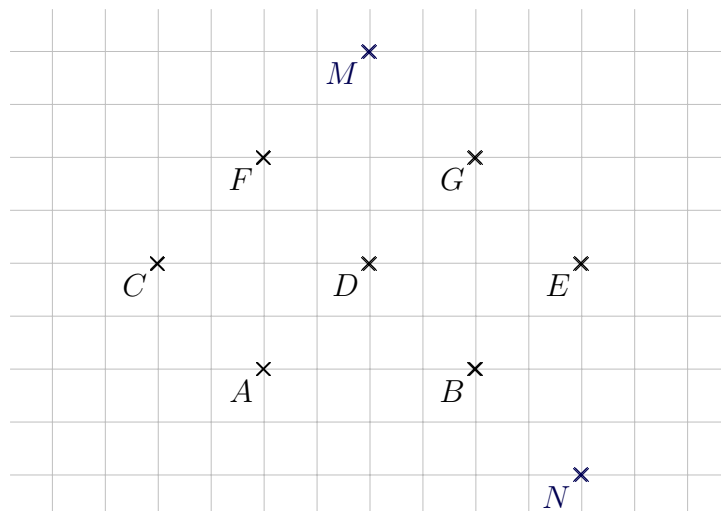
2. Donner trois représentants du vecteur $\overrightarrow{AC}$ autres que lui-même.

3. Reproduire une figure similaire, puis placer les points M et N tels que $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{FE}$.

Solution

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EG}$ $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$ $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{BG}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont trois représentants du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

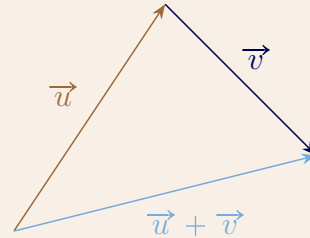


II - Opérations sur les vecteurs

1 - Somme de deux vecteurs

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. La **somme** $\vec{u} + \vec{v}$ est le vecteur associé à la translation obtenue en enchaînant les translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.



Propriété 2 (Admise)

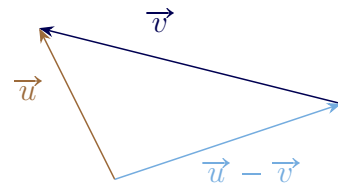
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs. Alors :

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Remarque

Pour soustraire un vecteur, on additionne son opposé :

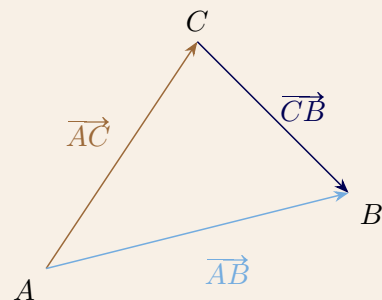
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



Propriété 3 (Relation de Chasles)

Soient A , B et C trois points du plan. Alors :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$



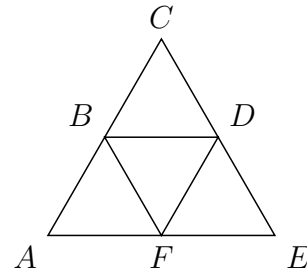
Démonstration

Lorsque l'on enchaîne la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$, le point A devient d'abord le point C , puis le point B : il s'agit donc de la translation qui transforme A en B , c'est-à-dire celle de vecteur $\overrightarrow{AB}$, d'où le résultat. $\blacklozenge$

Exemple

Dans cette figure composée de trois triangles équilatéraux identiques, on a :

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$



Propriété 4

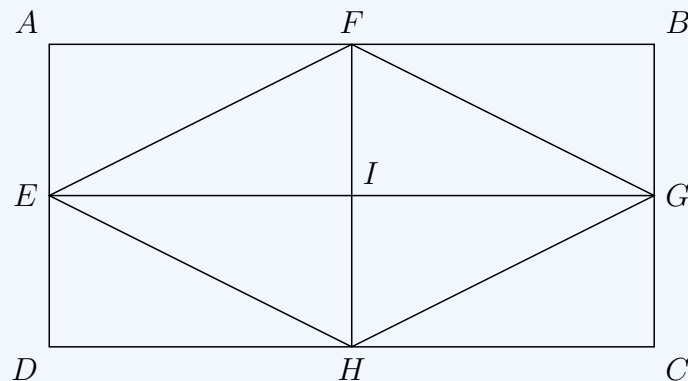
Soient A , B et M trois points du plan. Alors M est le milieu du segment $[AB]$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Démonstration

La condition $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ peut se réécrire $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$, ou encore $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$. Cela signifie que les segments $[MA]$ et $[BM]$ sont parallèles et de même longueur. Le sens des vecteurs indique que cela équivaut à dire que M est le milieu de $[AB]$. ♦

Exercice 2

Dans la figure suivante, $AFIE$, $FBGI$, $IGCH$ et $EIHD$ sont quatre rectangles identiques.



1. Réduire les sommes suivantes :

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} \qquad \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FE}$$

2. Tracer une figure similaire à celle ci-dessus, puis placer :

- un point J tel que $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{AE}$
- un point K tel que $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EA}$

3. Justifier que E est le milieu de $[KH]$.

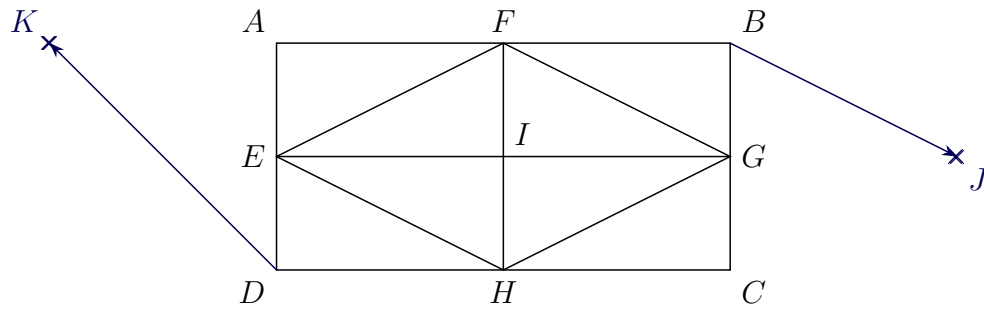
Solution

1. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AI}$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GG} = \vec{0}$$

2.



3. On a :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EK} &= \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DK} \\
 &= \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EA} \\
 &= \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CB} \\
 &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{CB} \quad \text{car } E \text{ est le milieu de } [AD] \\
 &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \\
 &= \overrightarrow{0}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, E est le milieu de $[KH]$.



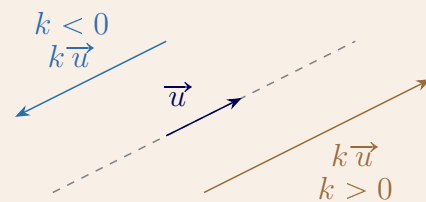
2 - Produit par un nombre réel

Définition

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur :

- ❖ qui a la même direction que $\vec{u}$
- ❖ qui a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$ et qui est de sens contraire si $k < 0$
- ❖ dont la norme est $|k| \times \|\vec{u}\|$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$, alors $k\vec{u} = \vec{0}$.



Propriété 5 (Admise)

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et k , k' deux nombres réels. Alors

1. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
2. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
3. $(kk')\vec{u} = k(k'\vec{u})$

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On dit qu'ils sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$. Cela revient à dire qu'ils ont la même direction.

Propriété 6

Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts.

1. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2. Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

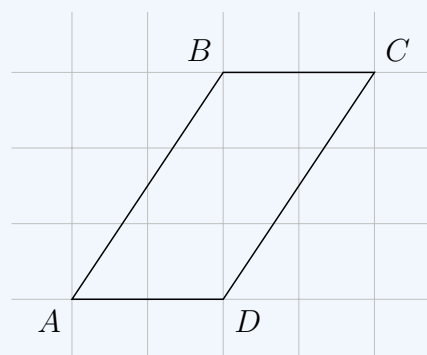
Démonstration

1. Dire que (AB) et (CD) sont parallèles signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont la même direction, c'est-à-dire qu'ils sont colinéaires.
2. Dire que A, B et C sont alignés revient à dire que les droites (AB) et (AC) sont parallèles, ce qui équivaut au fait que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires d'après le premier point. ◆

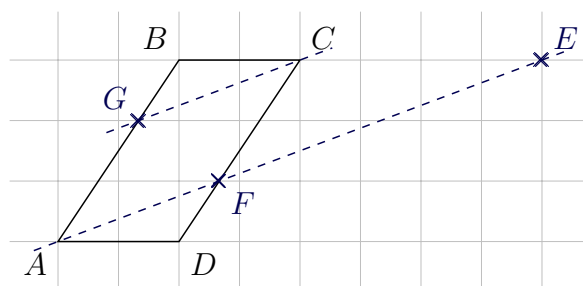
Exercice 3

Dans la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme.

1. Tracer une figure similaire, puis placer :
 - un point E tel que $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BC}$
 - un point F tel que $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DF}$
2. Exprimer $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
En déduire que A, F et E sont alignés.
3. Placer un point G tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.
4. Montrer que les droites (GC) et (AE) sont parallèles.



Solution



2.
$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$$

On a $3\overrightarrow{AF} = 3\left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) = 3\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, et les points A, E et F sont donc alignés.
4. On a $3\overrightarrow{GC} = 3(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC}) = 3\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{BC} = 3 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

Les vecteurs $\overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont alors colinéaires, et les droites (GC) et (AE) sont donc parallèles. ◆