

❖ Suites géométriques ❖

I - Reconnaître une suite géométrique

Définition

Une suite numérique (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q , appelé **raison** de la suite, tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n \times q$.

On se limitera ici au cas où $q > 0$ et $u_0 > 0$.

Exemple

Sur un compte épargne à un taux annuel de 3,5 %, Bob dispose de 1000€. Pour un entier naturel n , si u_n est le montant sur le compte de Bob après n années, alors

$$u_{n+1} = u_n + 0,035 \times u_n = 1,035u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 1,035$ et de premier terme $u_0 = 1000$.

Voici deux façons de reconnaître si une suite numérique (u_n) est géométrique ou non :

❖ Quotient des termes consécutifs

On peut vérifier si pour tout entier naturel n , le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Dans ce cas, cette valeur est la raison de la suite.

Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 \times 3^n$.

Pour tout entier naturel n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3^{n+1-n} = 3$$

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $q = 3$.

❖ Moyenne géométrique

Définition

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. La **moyenne géométrique** de a et b est le nombre $\sqrt{ab}$.

On peut vérifier si pour tout entier naturel non nul n , le terme u_n est la moyenne géométrique du terme précédent u_{n-1} et du terme suivant u_{n+1} .

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = (n+1)^2$.

$u_0 = (0+1)^2 = 1$ $u_1 = (1+1)^2 = 4$ $u_2 = (2+1)^2 = 9$ La moyenne géométrique de u_0 et u_2 est :

$$\sqrt{u_0 \times u_2} = \sqrt{1 \times 9} = 3 \neq u_1 = 4$$

Par conséquent, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

Exercice 1

Pour chaque suite, dire si elle est géométrique ou non.

1. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = n \times v_n \end{cases}$ 3. $w_n = n^2 + 3$ 4. $z_n = 10^n$

Solution

1. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} = u_n \times \frac{1}{2}$, donc la suite (u_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{2}$.
2. Comme pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = n \times v_n$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = n$. En particulier, on a $\frac{v_1}{v_0} = 1$ et $\frac{v_2}{v_1} = 2$. Ces rapports sont différents, donc la suite (v_n) n'est pas géométrique.
3. $w_0 = 0^2 + 3 = 3$ $w_1 = 1^2 + 3 = 4$ $w_2 = 2^2 + 3 = 7$
On a $\frac{w_1}{w_0} = \frac{4}{3} \approx 1,3$ et $\frac{w_2}{w_1} = \frac{7}{4} = 1,75$: ces rapports ne sont pas égaux, donc la suite (w_n) n'est pas géométrique.
4. Pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = 10^{n+1} = 10^n \times 10 = z_n \times 10$. La suite (z_n) est donc géométrique de raison 10.



II - Terme général

Propriété 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration

Pour tout entier naturel n , on note $v_n = u_0 \times q^n$. Montrons que les suites (v_n) et (u_n) sont identiques. Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times q^n \times q = v_n \times q$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison q .

De plus, $v_0 = u_0 \times q^0 = u_0 \times 1 = u_0$. Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux géométriques de raison q , et ont le même terme initial. Ces deux suites sont donc identiques, ce que l'on voulait prouver.



Exemple

Si (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $q = 0,35$, alors pour tout entier naturel n , on a

$$u_n = u_0 \times q^n = 8 \times 0,35^n$$

Exercice 2

En 2025, une voiture coûte 18 000 €. On estime que son prix diminue de 5 % par an. Pour un entier naturel n , on note u_n le prix de la voiture en 2025+n.

1. Donner u_0 et calculer u_1 .
2. Exprimer, pour tout entier naturel n , u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
4. Si l'on dispose d'un budget de 15 000 €, combien d'années doit-on attendre pour pouvoir acheter cette voiture ?

Solution

1. u_0 est le prix de la voiture en 2025, donc $u_0 = 18\,000$.

$$u_1 = u_0 - 0,05 \times u_0 = 18\,000 - 0,05 \times 18\,000 = 17\,100$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - 0,05 \times u_n = (1 - 0,05) \times u_n = 0,95u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0,95$.

3. Par conséquent, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n = 18\,000 \times 0,95^n$$

4. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq 15\,000$. On a :

$$u_3 = 18\,000 \times 0,95^3 = 15\,432,75 > 15\,000$$

$$u_4 = 18\,000 \times 0,95^4 = 14\,661,1125 < 15\,000$$

Avec un budget de 15 000 €, il faut donc attendre 4 ans pour pouvoir acheter cette voiture.



III - Somme des termes

Propriété 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors pour tout entier naturel n

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration

Soit n un entier naturel. Alors,

$$\begin{aligned} S_n(1 - q) &= S_n - qS_n \\ &= (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n) - q(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n) \\ &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n - qu_0 - qu_1 - \dots - qu_{n-1} - qu_n \\ &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n - u_1 - u_2 - \dots - u_n - u_{n+1} \\ &= u_0 - u_{n+1} \\ &= u_0 - u_0 \times q^{n+1} \\ &= u_0(1 - q^{n+1}) \end{aligned}$$

En divisant ensuite par $1 - q \neq 0$, on obtient $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.



Exemple

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 3$.

Alors pour tout entier naturel n :

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 5 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = 5 \times \frac{1 - 3^{n+1}}{-2} = \frac{5}{2} \times (3^{n+1} - 1)$$

Exercice 3

Un appartement est loué pendant 24 mois. Au premier mois, le loyer est de 750 €, et il augmente de 0,3 % chaque mois. Pour un entier naturel n , on note u_n le prix du loyer après n mois.

1. Donner la nature de la suite (u_n) , puis exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
2. Pour tout entier naturel n , on note $S_n = u_0 + \dots + u_n$. Donner une expression de S_n en fonction de n .
3. Si l'on loue cet appartement pendant les 24 mois, quel sera le coût total ?

Solution

1. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,003 \times u_n$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,003$.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = 750 \times 1,003^n$.

2. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= 750 \times \frac{1 - 1,003^{n+1}}{1 - 1,003} \\ &= 750 \times \frac{1 - 1,003^{n+1}}{-0,003} \\ &= 250\,000 \times (1,003^{n+1} - 1) \end{aligned}$$

3. Le loyer du premier mois est u_0 , donc celui du 24^e mois est u_{23} . Il faut donc calculer S_{23} :

$$S_{23} = 250\,000 \times (1,003^{23} - 1) \approx 17\,831,39$$

Le coût total pour 24 mois de location sera donc d'environ 17 831,39 €.

