

❖ Suites et limites ❖

I - Limite d'une suite

1 - Approche intuitive

Définition

Soient (u_n) une suite numérique et L un nombre réel. On dit que la suite (u_n) **converge** vers L si les termes u_n peuvent être aussi proches de L qu'on le souhaite, à partir d'un certain rang.

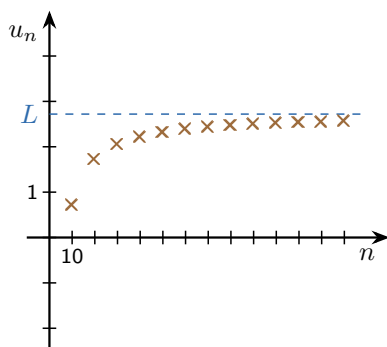
Le nombre L est unique et appelé **limite** de la suite (u_n) . On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} L$.

Lorsqu'une suite ne converge pas, on dit qu'elle **diverge**.

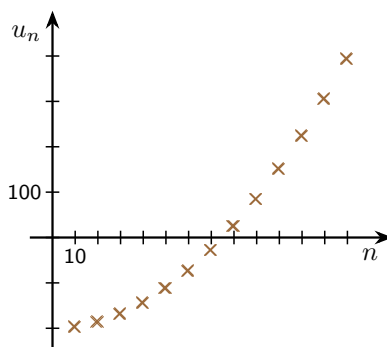
Définition

Soit (u_n) une suite numérique.

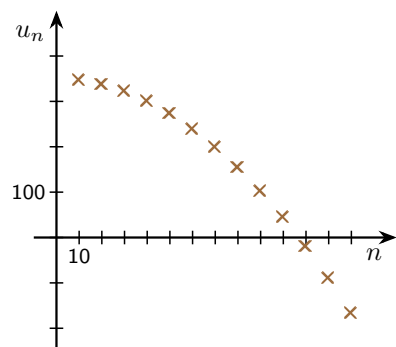
- ❖ Si les termes u_n peuvent être aussi grands qu'on le souhaite, à partir d'un certain rang, on dit que la limite de (u_n) est $+\infty$, et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
- ❖ Si les termes u_n peuvent être aussi petits qu'on le souhaite, à partir d'un certain rang, on dit que la limite de (u_n) est $-\infty$, et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$.



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$



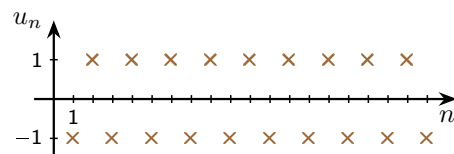
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Remarque

Il existe des suites qui n'ont pas de limite : on peut prendre comme exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$.



Propriété 1 (Admise)

Pour tout entier $k \geq 1$, on a :

- | | | | |
|--|--|--|---|
| ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ | ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ | ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ | ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ |
| ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ | ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ | ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ | ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ |

Propriété 2 (Admise)

Soit f une fonction continue et soit (u_n) une suite telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers un réel L , alors L est un point fixe de $L : f(L) = L$.

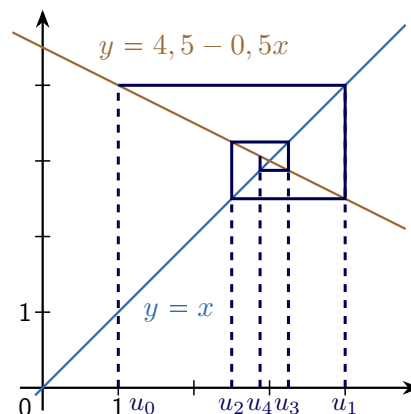
Exemple

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f la fonction définie par $f(x) = 4,5 - 0,5x$.

La suite (u_n) semble converger vers la solution de l'équation $4,5 - 0,5x = x$.

$$4,5 - 0,5x = x \Leftrightarrow 4,5 = 1,5x \Leftrightarrow x = \frac{4,5}{1,5} = 3$$

Elle semble donc converger vers $L = 3$.

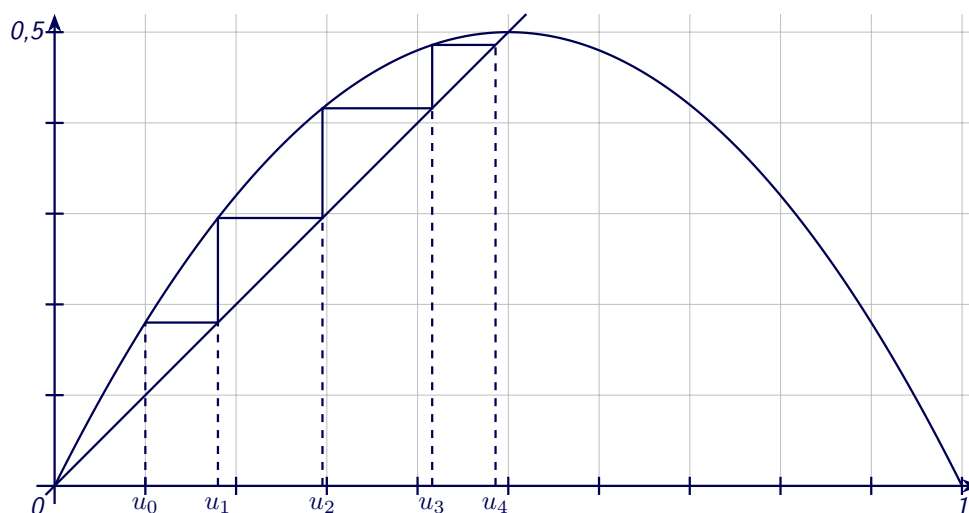


Exercice 1

On étudie l'évolution d'une population de coccinelles. En 2020, on compte 100 000 coccinelles. On modélise l'effectif des coccinelles, en millions d'individus, par la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.

1. Dans un repère orthonormé, tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 2x(1 - x)$. On prendra 10 cm pour représenter une unité.
2. Représenter dans ce repère orthonormé les 5 premiers termes de la suite (u_n) .
3. Conjecturer le sens de variation et la limite L de la suite (u_n) .
4. On admet que (u_n) converge et que $L > 0$. Déterminer L , puis interpréter le résultat.

Solution



3. La suite (u_n) semble strictement croissante, et semble converger vers 0,5.

4.

$$\begin{aligned}
 2x(1-x) = x &\Leftrightarrow 2x - 2x^2 = x \\
 &\Leftrightarrow x - 2x^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x(1-2x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1-2x = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 = 2x \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2} = 0,5
 \end{aligned}$$

Comme $L > 0$, la suite (u_n) converge vers $L = 0,5$. Cela signifie qu'au fur et à mesure des années, la population de coccinelles va se rapprocher de 500 000 coccinelles.



2 - Opérations

Propriété 3 (Admise)

Soient (u_n) , (v_n) deux suites numériques et L , L' deux réels.

Somme	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*
Produit	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	$\pm\infty$	0		
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$		
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n$	LL'	$\pm\infty^{**}$	$\pm\infty^{**}$	F.I.*		
Quotient	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$L' \neq 0$	$0 \blacklozenge$	$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	0
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty^{**}$	0	$\pm\infty^{**}$	F.I.*	F.I.*

*F.I. : Forme Indéterminée

**On utilise la règle des signes

$\blacklozenge$ Il faut que (v_n) soit de signe constant à partir d'un certain rang.

Exemple

On veut déterminer la limite de $u_n = \left(\frac{1}{n^2} - 2\right)(4 - 3n)$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} - 2 = -2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - 3n = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

3 - Comparaison

Propriété 4 (Admise)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

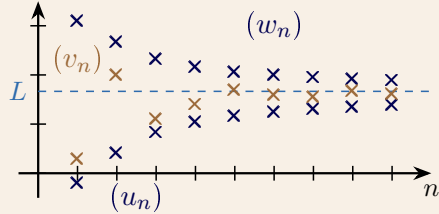
3. Si (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers des réels L et L' , alors $L \leq L'$.

Exemple

On cherche la limite de $u_n = n + (-1)^n$. Pour tout entier naturel n , $(-1)^n \geq -1$, donc $u_n \geq n - 1$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$, donc par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Théorème 1 (des gendarmes) (Admis)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang. Si (u_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers le même réel L , alors (v_n) converge également vers L .



Exemple

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$.

Pour tout entier naturel n non nul, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Exercice 2

1. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2 + 1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (3 - n^2) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n + \sqrt{n^2 + 1}$$

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{4n + 3 \cos(n)}{n}$.

2. Calculer u_{10} , u_{100} et u_{1000} , puis conjecturer la limite de (u_n) .

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a $4 - \frac{3}{n} \leq u_n \leq 4 + \frac{3}{n}$.

4. Démontrer la conjecture de la question 2.

Solution

1. ❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2 + 1} = 0$.

❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - n^2 = -\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 \right) (3 - n^2) = -\infty$.

❖ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 1 = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$.

2. Avec une calculatrice, on trouve $u_{10} \approx 3,92$, $u_{100} \approx 4,009$ et $u_{1000} \approx 4,0006$. La suite (u_n) semble donc converger vers 4.

3. Pour tout entier naturel non nul n :

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos(n) \leq 1 &\Rightarrow -3 \leq 3 \cos(n) \leq 3 \\ &\Rightarrow 4n - 3 \leq 4n + 3 \cos(n) \leq 4n + 3 \\ &\Rightarrow 4 - \frac{3}{n} \leq u_n \leq 4 + \frac{3}{n} \end{aligned}$$

4. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - \frac{3}{n} = 4$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.



II - Exemples

1 - Suites géométriques

Propriété 5 (Admise)

Soit q un nombre réel strictement positif.

- ❖ Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers 0.
- ❖ Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Exemple

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = 0,8$.

Pour tout entier naturel n , on a $u_n = -3 \times 0,8^n$. Comme $0 < 0,8 < 1$, la suite (u_n) converge vers 0.

Propriété 6

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, $q \neq 1$. Pour un entier naturel n , la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (u_n) est

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- ❖ Si $0 < q < 1$, alors la suite (S_n) converge vers $\frac{u_0}{1 - q}$.
- ❖ Si $q > 1$, alors la suite (S_n) diverge vers $\pm\infty$, selon le signe de u_0 .

Démonstration (Au programme)

Commençons par démontrer la formule sur S_n . Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} S_n(1 - q) &= S_n - qS_n \\ &= (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n) - q(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n) \\ &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n - qu_0 - qu_1 - \dots - qu_{n-1} - qu_n \\ &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n - u_1 - u_2 - \dots - u_n - u_{n+1} \\ &= u_0 - u_{n+1} \\ &= u_0 - u_0 \times q^{n+1} \\ &= u_0(1 - q^{n+1}) \end{aligned}$$

En divisant ensuite par $1 - q \neq 0$, on obtient $S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Montrons maintenant le résultat sur la limite.

- ❖ Si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$. Dans ce cas, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}$.

❖ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = +\infty$, puisque $1 - q < 0$.
Par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \pm\infty$ selon le signe de u_0 .



Exemple

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $q = 0,8$. Pour tout entier naturel n , on a

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -1 \times \frac{1 - 0,8^{n+1}}{1 - 0,8} = -1 \times \frac{1 - 0,8^{n+1}}{0,2} = -5 \times (1 - 0,8^{n+1})$$

Exercice 3

Un particulier fait installer des panneaux photovoltaïques chez lui. Ils produisent 1900 kWh la première année, puis perdent 3 % de rendement par an. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité d'énergie produite par ces panneaux après $n + 1$ années.

1. Préciser la nature de la suite (u_n) , puis donner pour tout entier naturel n , une expression de u_n en fonction de n .
2. Au bout d'un grand nombre d'années, que devient la quantité d'énergie produite par les panneaux ?

Pour tout entier naturel n , on note $S_n = u_0 + \dots + u_n$.

3. Calculer S_{10} , et interpréter le résultat.
4. En conservant ses panneaux pendant de nombreuses années, ce particulier peut-il espérer produire une quantité totale d'énergie supérieure à 70 MWh ?

Solution

1. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0,97$ et de premier terme $u_0 = 1900$. Par conséquent, pour tout entier naturel n , $u_n = 1900 \times 0,97^n$.
2. Comme $0 < 0,97 < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 : au bout d'un grand nombre d'années, la quantité d'énergie produite par les panneaux se rapproche de 0 kWh.
3. Pour tout entier naturel n ,

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1900 \times \frac{1 - 0,97^{n+1}}{1 - 0,97} = 1900 \times \frac{1 - 0,97^{n+1}}{0,03}$$

Ainsi,

$$S_{10} = 1900 \times \frac{1 - 0,97^{11}}{0,03} \approx 16629,8$$

Après 11 ans, ces panneaux auront donc produit une quantité totale d'énergie d'environ 16 629,8 kWh.

4. Comme $0 < 0,97 < 1$, la suite (S_n) converge vers $1900 \times \frac{1}{0,03} \approx 63333,3$.
Or, $70 \text{ MWh} = 70\,000 \text{ kWh} > 63\,333,3$: ce particulier ne pourra donc jamais produire plus de 70 MWh avec ses panneaux photovoltaïques.



2 - Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** si il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple

Une banque propose un compte épargne avec un taux d'intérêt à 4 %, et des frais annuels de 5 €. Pour tout entier naturel n , si on note u_n le montant sur ce compte en banque après n années, alors la suite (u_n) vérifie $u_{n+1} = 1,04u_n - 5$.

Propriété 7

Soient a et b deux nombres réels, avec $a \neq 1$, et soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = au_n + b$.

Si l'on note α l'unique solution de l'équation $ax + b = x$, alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a .

Démonstration

Commençons par remarquer que comme $a \neq 1$,

$$ax + b = x \Leftrightarrow ax - x = -b \Leftrightarrow x(a - 1) = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a - 1} = \frac{b}{1 - a}$$

L'équation $ax + b = x$ admet donc bien une seule solution, qui est $\alpha = \frac{b}{1 - a}$.

Ensuite, pour tout entier naturel n , comme $\alpha = a\alpha + b$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = au_n + b - (a\alpha + b) = au_n + b - a\alpha - b = a(u_n - \alpha) = av_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison a . ◆

Exemple

On considère la suite (u_n) de l'exemple précédent. On résout l'équation $1,04x - 5 = x$:

$$1,04x - 5 = x \Leftrightarrow 0,04x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{0,04} = 125$$

Pour tout entier naturel n , on définit $v_n = u_n - 125$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 125 = 1,04u_n - 5 - 125 = 1,04u_n - 130 = 1,04(u_n - 125) = 1,04v_n$$

Ainsi, $v_n = v_0 \times 1,04^n$, donc $u_n = v_n + 125 = v_0 \times 1,04^n + 125 = (u_0 - 125) \times 1,04^n + 125$.

Remarque

En notant $f(x) = ax + b$, on définit une fonction continue telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. D'après la propriété 2, si la suite (u_n) converge, sa limite L doit vérifier $f(L) = L$, c'est-à-dire $aL + b = L$: si elle converge, sa limite est nécessairement $L = \alpha$.

Exercice 4

On administre à un patient un médicament. Au jour 0, on lui injecte 10mL de ce médicament. Chaque jour, 20 % du médicament est éliminé par son corps, donc on décide de lui en réinjecter 1mL. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de médicament, en mL, dans le sang de ce patient au jour n .

1. Quelle est la valeur de u_0 ? de u_1 ?
2. Pour tout entier naturel n , déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) .
3. Résoudre l'équation $0,8x + 1 = x$. On appelle α l'unique solution de cette équation. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \alpha$.
4. Justifier que (v_n) est géométrique et donner sa raison.
5. En déduire une expression de v_n , puis de u_n , en fonction de l'entier naturel n .
6. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter le résultat.

Solution

1. u_0 vaut 10, et $u_1 = 0,8 \times 10 + 1 = 9$.
2. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$: la suite (u_n) est donc arithmético-géométrique.
3. $0,8x + 1 = x \Leftrightarrow -0,2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{-0,2} = 5$, donc $\alpha = 5$.
4. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 0,8u_n + 1 - 5 = 0,8u_n - 4 = 0,8(u_n - 5) = 0,8v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,8.

5. On a $v_0 = u_0 - 5 = 5$, donc pour tout entier naturel n , $v_n = 5 \times 0,8^n$. On en déduit que $u_n = v_n + 5 = 5 \times 0,8^n + 5$.
6. Comme $0 < 0,8 < 1$, la suite (u_n) converge vers 5. Cela signifie qu'au fil des jours, la quantité de médicament dans le sang de ce patient se rapprochera de 5mL.

