

❖ Suites arithmétiques et géométriques ❖

I - Suites arithmétiques

1 - Définitions

Définition

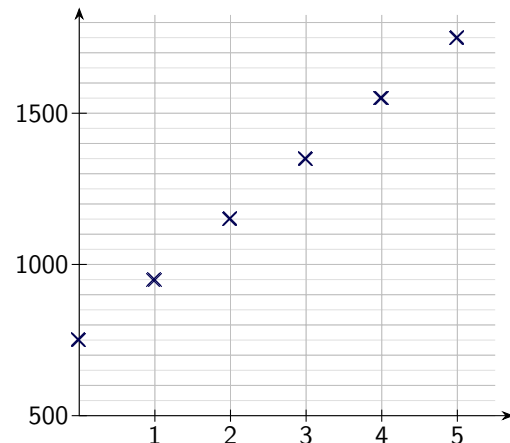
Une suite numérique $(u(n))$ est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r , appelé **raison** de la suite, tel que pour tout entier naturel n , $u(n+1) = u(n) + r$.

Exemple

Sur son compte bancaire, Alice dispose de 750 €. Chaque mois, elle rajoute 200 €. Pour tout entier naturel n , on note $u(n)$ le montant sur le compte d'Alice après n mois.

Pour tout entier naturel n , $u(n+1) = u(n) + 200$.

La suite $(u(n))$ est arithmétique de raison $r = 200$ et de premier terme $u(0) = 750$.



Exercice 1

Dans une station de ski, un téléphérique commence son ascension à une hauteur de 500 mètres et son altitude augmente de 50 mètres par minute. Pour tout entier naturel n , on note $u(n)$ l'altitude de ce téléphérique après n minutes.

1. Que vaut $u(0)$? Calculer $u(1)$.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n , $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.
3. En déduire que la suite $(u(n))$ est arithmétique et préciser sa raison.

L'altitude finale du téléphérique est 1000 mètres. Pour tout entier naturel n , on note $v(n)$ l'altitude qu'il reste à gravir pour le téléphérique après n minutes d'ascension.

4. La suite $(v(n))$ est-elle arithmétique ? Justifier.

Solution

1. $u(0)$ est l'altitude initiale du téléphérique, en mètres, c'est-à-dire $u(0) = 500$.
 $500 + 50 = 550$, donc $u(1) = 550$.
2. Pour tout entier naturel n , $u(n+1) = u(n) + 50$.
3. La suite $(u(n))$ est donc une suite arithmétique, et sa raison est $r = 50$.
4. Pour tout entier naturel n , $v(n) = 1000 - u(n)$. Ainsi :
 $v(n+1) = 1000 - u(n+1) = 1000 - (u(n) + 50) = 1000 - u(n) - 50 = v(n) - 50$
La suite $(v(n))$ est donc également une suite arithmétique, de raison $r = -50$.



2 - Formule explicite

Propriété 1

Soit $(u(n))$ une suite arithmétique de raison r .

Alors pour tout entier naturel n , $u(n) = u(0) + nr$.

Démonstration

Pour tout entier naturel n , on note $v(n) = u(0) + nr$. Montrons que les suites $(u(n))$ et $(v(n))$ sont identiques.

Pour tout entier naturel n ,

$$v(n+1) = u(0) + (n+1)r = u(0) + nr + r = v(n) + r$$

La suite $(v(n))$ est donc également arithmétique de raison r .

Or, $v(0) = u(0) + 0 \times r = u(0)$. Ainsi, les suites $(u(n))$ et $(v(n))$ sont toutes les deux arithmétiques de raison r , et ont le même terme initial : elles sont donc identiques, ce que l'on voulait démontrer.



Exemple

Si $(u(n))$ est la suite arithmétique de premier terme $u(0) = 5$ et de raison $r = -0,4$, alors pour tout entier naturel n , on a

$$u(n) = u(0) + nr = 5 + n \times (-0,4) = 5 - 0,4n$$

Exercice 2

Un service de location propose de louer un fourgon de déménagement au tarif suivant : un forfait de 50 €, puis 0,40 € par kilomètre parcouru. Pour tout entier naturel n , on note $u(n)$ le prix pour n kilomètres parcourus.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$, puis en déduire la nature de la suite $(u(n))$.
2. Pour tout entier naturel n , donner une expression de $u(n)$ en fonction de n .
3. Combien de kilomètres au maximum peut-on parcourir avec un budget de 240 € ?

Solution

1. Pour tout entier naturel n , $u(n+1) = u(n) + 0,4$.

La suite $(u(n))$ est donc arithmétique de raison $r = 0,4$.

2. Pour tout entier naturel n , on a alors $u(n) = u(0) + nr = 50 + 0,4n$.

3. On cherche le plus grand entier n tel que $u(n) \leq 240$.

$$u(n) \leq 240 \Leftrightarrow 50 + 0,4n \leq 240 \Leftrightarrow 0,4n \leq 190 \Leftrightarrow n \leq \frac{190}{0,4} = 475$$

Avec un budget de 240 €, on peut donc parcourir au maximum 475 km.



3 - Variations

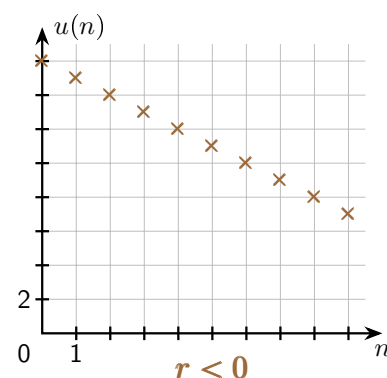
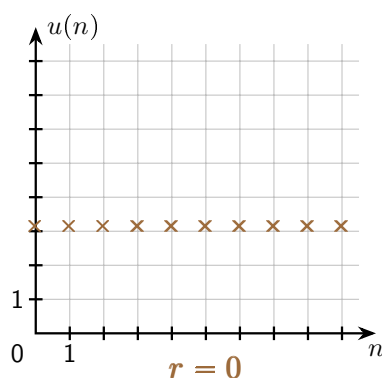
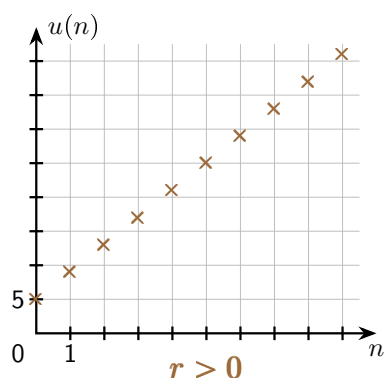
Propriété 2

Soit $(u(n))$ une suite arithmétique de raison r .

- ❖ Si $r > 0$, alors la suite $(u(n))$ est strictement croissante.
- ❖ Si $r < 0$, alors la suite $(u(n))$ est strictement décroissante.
- ❖ Si $r = 0$, alors la suite $(u(n))$ est constante.

Démonstration

Pour tout entier naturel n , $u(n+1) = u(n) + r$, donc $u(n+1) - u(n) = r$. Les variations de la suite $(u(n))$ sont donc données par le signe de la raison r . ♦



Exercice 3

- 1.** On considère $(u(n))$ la suite arithmétique définie pour tout entier naturel n par $u(n) = -2n + 6$.
 - a.** Calculer $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$ et $u(4)$.
 - b.** Donner la raison de la suite $(u(n))$.
- 2.** Soit $(v(n))$ la suite arithmétique de raison 1 et de terme initial $v(0) = 1$.
 - a.** Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(v(n))$.
 - b.** Calculer $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.
- 3.** Représenter sur un même graphique les suites $(u(n))$ et $(v(n))$.
- 4.** Donner les variations des suites $(u(n))$ et $(v(n))$.

Solution

- 1. a.** $\rightarrow u(0) = -2 \times 0 + 6 = 6$
 $\rightarrow u(1) = -2 \times 1 + 6 = 4$
 $\rightarrow u(2) = -2 \times 2 + 6 = 2$
 $\rightarrow u(3) = -2 \times 3 + 6 = 0$
 $\rightarrow u(4) = -2 \times 4 + 6 = -2$

b. On sait que $(u(n))$ est arithmétique, et l'on a $u(1) - u(0) = 4 - 6 = -2$, donc la raison de cette suite est -2 .

2. a. Pour tout entier naturel n , $v(n+1) = v(n) + 1$.

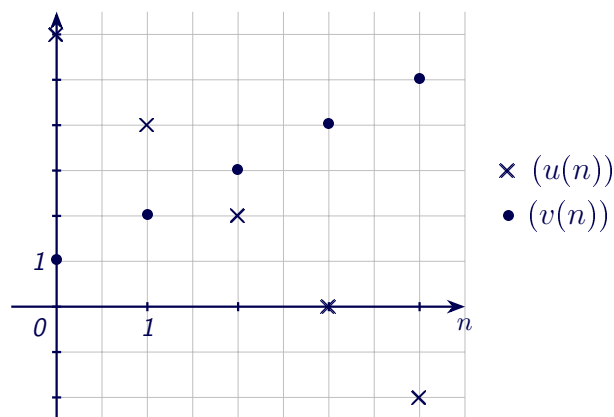
b. $\rightarrow v(1) = v(0) + 1 = 1 + 1 = 2$

$\rightarrow v(2) = v(1) + 1 = 2 + 1 = 3$

$\rightarrow v(3) = v(2) + 1 = 3 + 1 = 4$

$\rightarrow v(4) = v(3) + 1 = 4 + 1 = 5$

3.



4. La suite $(u(n))$ est arithmétique de raison $-2 < 0$, donc elle est strictement décroissante.

La suite $(v(n))$ est arithmétique de raison $1 > 0$, donc elle est strictement croissante.



II - Suites géométriques

1 - Définitions

Définition

Une suite numérique $(u(n))$ est dite **géométrique** s'il existe un nombre réel q , appelé **raison** de la suite, tel que pour tout entier naturel n , $u(n+1) = u(n) \times q$.

On se limitera ici au cas où $q > 0$ et $u(0) > 0$.

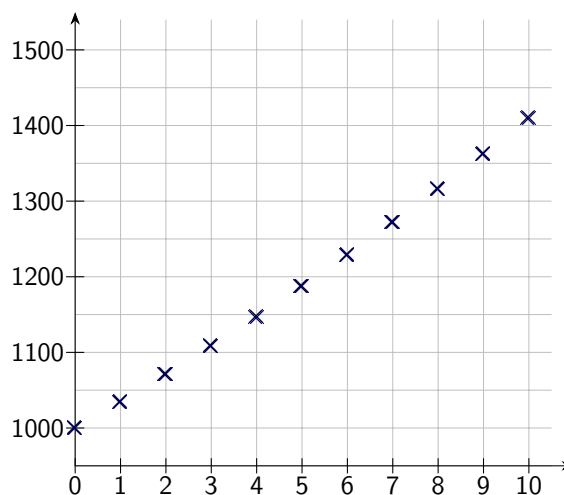
Exemple

Sur un compte épargne à un taux annuel de 3,5 %, Bob dispose de 1000€. Pour un entier naturel n , on note $u(n)$ le montant sur le compte de Bob après n années.

Pour tout entier naturel n :

$$u(n+1) = u(n) \times 1,035$$

La suite $(u(n))$ est géométrique de raison $q = 1,035$ et de premier terme $u(0) = 1000$.



Exercice 4

Dans une réserve naturelle, la population de castors augmente d'environ 5 % par an. En 2025, on comptait 80 castors dans cette population. Pour un entier naturel n , on note $u(n)$ le nombre de castors en $2025+n$.

1. Que vaut $u(0)$? Calculer $u(1)$.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n , $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.
3. En déduire que la suite $(u(n))$ est géométrique et préciser sa raison.

On constate également en parallèle que la quantité d'arbres dans cette réserve diminue de 2 % chaque année.

4. La quantité d'arbres est-elle une suite géométrique ? Justifier.

Solution

1. $u(0)$ est le nombre de castors en $2025 + 0 = 2025$, c'est-à-dire $u(0) = 80$.

$$u(1) = u(0) + 0,05 \times u(0) = 80 + 0,05 \times 80 = 84$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$u(n+1) = u(n) + 0,05 \times u(n) = (1 + 0,05) \times u(n) = 1,05u(n)$$

3. La suite $(u(n))$ est donc géométrique, de raison $q = 1,05$.

4. Pour tout entier naturel n , on note $v(n)$ la quantité d'arbres en $2025 + n$. Pour tout entier naturel n :

$$v(n+1) = v(n) - 0,02 \times v(n) = (1 - 0,02) \times v(n) = 0,98v(n)$$

Par conséquent, la suite $(v(n))$ est géométrique de raison $q = 0,98$.



2 - Formule explicite

Propriété 3

Soit $(u(n))$ une suite géométrique de raison q . Alors pour tout entier naturel n :

$$u(n) = u(0) \times q^n$$

Démonstration

Pour tout entier naturel n , on note $v(n) = u(0) \times q^n$. Montrons que les suites $(v(n))$ et $(u(n))$ sont identiques.

Pour tout entier naturel n ,

$$v(n+1) = u(0) \times q^{n+1} = u(0) \times q^n \times q = v(n) \times q$$

La suite $(v(n))$ est donc géométrique de raison q .

De plus, $v(0) = u(0) \times q^0 = u(0) \times 1 = u(0)$. Ainsi, les suites $(u(n))$ et $(v(n))$ sont toutes les deux géométriques de raison q , et ont le même terme initial. Ces deux suites sont donc identiques, ce que l'on voulait prouver.



Exemple

Si $(u(n))$ est la suite géométrique de premier terme $u(0) = 8$ et de raison $q = 0,35$, alors pour tout entier naturel n , on a

$$u(n) = u(0) \times q^n = 8 \times 0,35^n$$

Exercice 5

En 2025, une voiture coûte 18 000 €. On estime que son prix diminue de 5 % par an. Pour un entier naturel n , on note $u(n)$ le prix de la voiture en 2025+ n .

1. Donner $u(0)$ et calculer $u(1)$.
2. Exprimer, pour tout entier naturel n , $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$. En déduire que la suite $(u(n))$ est géométrique et préciser sa raison.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer $u(n)$ en fonction de n .
4. Si l'on dispose d'un budget de 15 000 €, combien d'années doit-on attendre pour pouvoir acheter cette voiture ?

Solution

1. $u(0)$ est le prix de la voiture en 2025, donc $u(0) = 18\,000$.

$$u(1) = u(0) - 0,05 \times u(0) = 18\,000 - 0,05 \times 18\,000 = 17\,100$$

2. Pour tout entier naturel n :

$$u(n+1) = u(n) - 0,05 \times u(n) = (1 - 0,05) \times u(n) = 0,95u(n)$$

La suite $(u(n))$ est donc géométrique de raison $q = 0,95$.

3. Par conséquent, pour tout entier naturel n :

$$u(n) = u(0) \times q^n = 18\,000 \times 0,95^n$$

4. On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u(n) \leq 15\,000$. On a :

$$u(3) = 18\,000 \times 0,95^3 = 15\,432,75 > 15\,000$$

$$u(4) = 18\,000 \times 0,95^4 = 14\,661,1125 < 15\,000$$

Avec un budget de 15 000 €, il faut donc attendre 4 ans pour pouvoir acheter cette voiture.



3 - Variations

Propriété 4

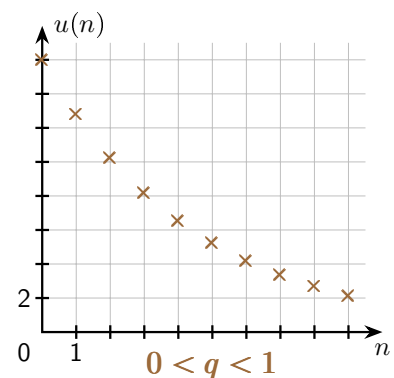
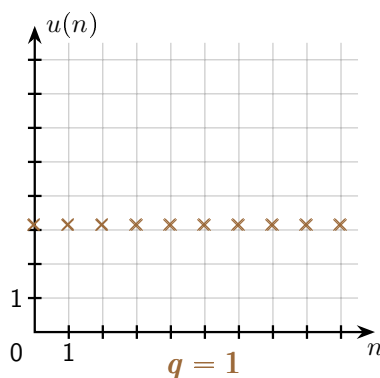
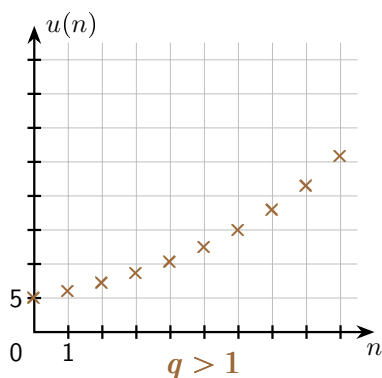
Soit $(u(n))$ une géométrique de raison $q > 0$.

- ❖ Si $q > 1$, alors la suite $(u(n))$ est strictement croissante.
- ❖ Si $0 < q < 1$, alors la suite $(u(n))$ est strictement décroissante.
- ❖ Si $q = 1$, alors la suite $(u(n))$ est constante.

Démonstration

Commençons par remarquer que comme pour tout entier naturel n , $u(n) = u(0) \times q^n$ avec $u(0) > 0$ et $q > 0$, les termes de la suite $(u(n))$ sont tous strictement positifs. De plus, pour tout entier naturel n , $\frac{u(n+1)}{u(n)} = q$.

- ❖ Si $q > 1$, alors pour tout entier naturel n , $\frac{u(n+1)}{u(n)} = q > 1$, donc $u(n+1) > u(n)$, et la suite est strictement croissante.
- ❖ Si $0 < q < 1$, alors pour tout entier naturel n , $0 < \frac{u(n+1)}{u(n)} = q < 1$, donc $u(n+1) < u(n)$, et la suite est strictement décroissante.
- ❖ Si $q = 1$, alors pour tout entier naturel n , $u(n) = u(0) \times q^n = u(0) \times 1^n = u(0)$, donc la suite est constante.



Exercice 6

1. On considère $(u(n))$ la suite géométrique définie pour tout entier naturel n par $u(n) = \frac{8}{2^n}$.
 - a. Calculer $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$ et $u(4)$.
 - b. Donner la raison de la suite $(u(n))$.
2. Soit $(v(n))$ la suite géométrique de raison 1,5 et de terme initial $v(0) = 2$.
 - a. Donner la relation de récurrence vérifiée par la suite $(v(n))$.
 - b. Calculer $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.
3. Représenter sur un même graphique les suites $(u(n))$ et $(v(n))$.
4. Donner les variations des suites $(u(n))$ et $(v(n))$.

Solution

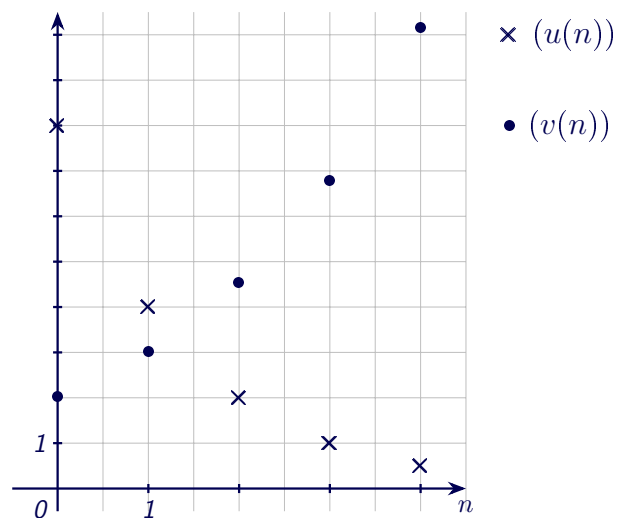
1. a. $\rightarrow u(0) = \frac{8}{2^0} = \frac{8}{1} = 9$
 $\rightarrow u(1) = \frac{8}{2^1} = \frac{8}{2} = 4$
 $\rightarrow u(2) = \frac{8}{2^2} = \frac{8}{4} = 2$
 $\rightarrow u(3) = \frac{8}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$
 $\rightarrow u(4) = \frac{8}{2^4} = \frac{8}{16} = 0,5$

b. On sait que la suite $(u(n))$ est géométrique. Comme $\frac{u(1)}{u(0)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, la raison de cette suite est $q = \frac{1}{2}$.

2. a. Pour tout entier naturel n , $v(n+1) = 1,5 \times v(n)$.

b. $\rightarrow v(1) = 1,5 \times v(0) = 1,5 \times 2 = 3$
 $\rightarrow v(2) = 1,5 \times v(1) = 1,5 \times 3 = 4,5$
 $\rightarrow v(3) = 1,5 \times v(2) = 1,5 \times 4,5 = 6,75$
 $\rightarrow v(4) = 1,5 \times v(3) = 1,5 \times 6,75 = 10,125$

3.



4. La suite $(u(n))$ est géométrique de raison $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc elle est strictement décroissante.

La suite $(v(n))$ est géométrique de raison $1,5 > 1$, donc elle est strictement croissante.

