

❖ Suites arithmétiques ❖

I - Reconnaître une suite arithmétique

Définition

Une suite numérique (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r , appelé **raison** de la suite, tel que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Exemple

Sur son compte bancaire, Alice dispose de 750 €. Chaque mois, elle rajoute 200 €. Pour un entier naturel n , si u_n est le montant sur le compte d'Alice après n mois, alors la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 200$ et de premier terme $u_0 = 750$.

Voici trois façons de reconnaître si une suite numérique (u_n) est arithmétique ou non :

❖ Différence des termes consécutifs

On peut vérifier si pour tout entier naturel n , la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Dans ce cas, cette valeur est la raison de la suite.

Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2$. Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.

Cette quantité n'est pas constante, donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

❖ Moyenne arithmétique

On peut vérifier si pour tout entier naturel non nul n , le terme u_n est la moyenne arithmétique du terme précédent u_{n-1} et du terme suivant u_{n+1} .

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 5$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a

$$\frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} = \frac{3(n-1) - 5 + 3(n+1) - 5}{2} = \frac{6n - 10}{2} = 3n - 5 = u_n$$

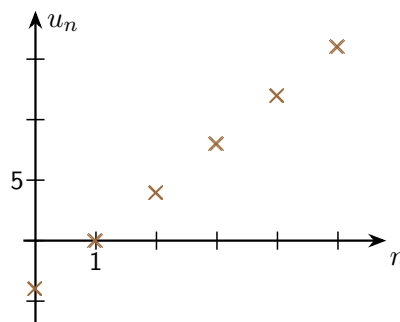
La suite (u_n) est donc une suite arithmétique.

❖ Représentation graphique

Lorsque l'on représente graphiquement la suite (u_n) par le nuage de points de coordonnées (n, u_n) , les points doivent être alignés sur une même droite.

Prenons l'exemple de la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - (n-2)^2$.

Les points sont alignés, donc la suite (u_n) semble être arithmétique.



Exercice 1

Pour chaque suite, dire si elle est arithmétique ou non.

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = v_n + n \end{cases}$

3. $w_n = n^2 - 3$

4. $z_n = 7 - 4n$

Solution

1. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n = -7$, donc la suite (u_n) est arithmétique de raison -7 .

2. On a $v_1 - v_0 = 0$ et $v_2 - v_1 = 1$, donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

3. $w_0 = 0^2 - 3 = -3$, $w_1 = 1^2 - 3 = -2$ et $w_2 = 2^2 - 3 = 1$. On a alors $w_1 - w_0 = 1$ et $w_2 - w_1 = 3$, donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique.

4. Pour tout entier naturel n ,

$$z_{n+1} - z_n = 7 - 4(n+1) - (7 - 4n) = 7 - 4n - 4 - 7 + 4n = -4$$

La suite (z_n) est donc arithmétique de raison -4 .



II - Terme général

Propriété 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_0 + nr$. Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont identiques.

Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n = u_0 + (n+1)r - (u_0 + nr) = u_0 + nr + r - u_0 - nr = r$$

La suite (v_n) est donc arithmétique de raison r .

De plus, son premier terme est $v_0 = u_0 + 0 \times r = u_0$.

Ainsi, les suites (u_n) et (v_n) sont toutes les deux arithmétiques de raison r , et ont le même terme initial : elles sont donc nécessairement identiques, ce qui prouve le résultat.

Exemple

Si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -0,4$, alors pour tout entier naturel n , on a

$$u_n = 5 + n \times (-0,4) = 5 - 0,4n$$

Exercice 2

Un service de location propose de louer un fourgon de déménagement au tarif suivant : un forfait de 50 €, puis 0,40 € par kilomètre parcouru. Pour tout entier naturel n , on note u_n le prix pour n kilomètres parcourus.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis en déduire la nature de la suite (u_n) .

2. Pour tout entier naturel n , donner une expression de u_n en fonction de n .

3. Combien de kilomètres au maximum peut-on parcourir avec un budget de 240 € ?

Solution

1. Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 0,4$.

La suite (u_n) est donc arithmétique de raison $r = 0,4$.

2. Pour tout entier naturel n , on a alors $u_n = u_0 + nr = 50 + 0,4n$.

3. On cherche le plus grand entier n tel que $u_n \leq 240$.

$$u_n \leq 240 \Leftrightarrow 50 + 0,4n \leq 240 \Leftrightarrow 0,4n \leq 190 \Leftrightarrow n \leq \frac{190}{0,4} = 475$$

Avec un budget de 240 €, on peut donc parcourir au maximum 475 km.



III - Somme des termes

Propriété 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Alors pour tout entier naturel n

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Démonstration

Soit n un entier naturel. Pour calculer S_n , on va calculer son double $2S_n = S_n + S_n$. Pour cela, on additionne S_n avec la même somme "renversée" :

$$\begin{array}{ccccccccccc} S_n & & u_0 & + & u_1 & + & \cdots & + & u_{n-1} & + & u_n \\ S_n & + & u_n & + & u_{n-1} & + & \cdots & + & u_1 & + & u_0 \\ \hline 2S_n & = & (u_0 + u_n) & + & (u_1 + u_{n-1}) & + & \cdots & + & (u_{n-1} + u_1) & + & (u_n + u_0) \end{array}$$

Or, on remarque que $u_1 + u_{n-1} = (u_0 + 1 \times r) + (u_n - 1 \times r) = u_0 + u_n$.

De même, pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on a $u_k + u_{n-k} = (u_0 + kr) + (u_n - kr) = u_0 + u_n$.

Ainsi, tous les termes de la somme $2S_n$ sont tous égaux à $u_0 + u_n$. Or, celle-ci compte autant de termes que S_n , c'est-à-dire $n+1$, d'où $2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$.

En divisant par 2, on obtient alors le résultat énoncé : $S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.



Exemple

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = 6$. Pour tout entier naturel n , on a $u_n = 4 + 6n$, donc :

$$S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{4 + 4 + 6n}{2} = (n+1) \times \frac{8 + 6n}{2} = (n+1)(4 + 3n)$$

Exercice 3

Pendant l'année n°0 de son CDI, un salarié touche 21 000 € par an. Son salaire annuel augmente de 650 € chaque année. Pour tout entier naturel n , on note u_n le salaire annuel de ce salarié pendant l'année n° n .

1. Donner la nature de la suite (u_n) , puis exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
2. Pour tout entier naturel n , on note $S_n = u_0 + \dots + u_n$. Donner une expression de S_n en fonction de n .
3. Calculer S_{39} , puis interpréter le résultat.

Solution

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 650$. Par conséquent, pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr = 21\,000 + 650n$.

2. Pour tout entier naturel n , on a :

$$S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{21\,000 + 21\,000 + 650n}{2} = (n+1)(21\,000 + 325n)$$

3.

$$S_{39} = (39 + 1) \times (21\,000 + 325 \times 39) = 40 \times 33\,675 = 1\,347\,000$$

Cela signifie qu'après l'année n°39, soit après 40 années, ce salarié aura touché un salaire total de 1 347 000 €.

