

❖ Probabilités conditionnelles ❖

I - Probabilité conditionnelle

Définition

Soient A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle de B sachant A** est

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Exemple

Le tableau ci-contre rassemble les résultats d'un laboratoire qui veut tester des médicaments. On considère les évènements :

- ❖ A : "le patient a pris le médicament A"
- ❖ B : "le patient a pris le médicament B"
- ❖ G : "la patient a guéri"

	Méd. A	Méd. B	Total
Guéri	270	191	461
Non guéri	30	9	39
Total	300	200	500

On cherche la probabilité qu'un patient soit guéri sachant qu'il a pris le médicament A.

$$\mathbb{P}(A \cap G) = \frac{270}{500} = 0,54 \text{ et } \mathbb{P}(A) = \frac{300}{500} = 0,6 \text{ donc}$$

$$\mathbb{P}_A(G) = \frac{\mathbb{P}(A \cap G)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,54}{0,6} = 0,9$$

On peut aussi trouver cette probabilité par dénombrement : $\mathbb{P}_A(G) = \frac{270}{300} = 0,9$.

Exercice 1

Une agence France Travail recense l'ensemble de ses demandeurs d'emploi selon deux critères : le niveau d'étude, et le sexe.

	Sans diplôme	Baccalauréat	Licence	Total
Homme		192		576
Femme		240	72	
Total	588			1200

On tire un demandeur d'emploi au hasard, et on considère les évènements :

- ❖ H : "C'est un homme" et F : "C'est une femme"
- ❖ S : "Il est sans diplôme", B : "Il a le baccalauréat" et L : "Il a une licence"

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.

2. Déterminer chacune des probabilités suivantes. On donnera chaque probabilité sous la forme d'une fraction irréductible.

a. $\mathbb{P}(B)$

b. $\mathbb{P}(F)$

c. $\mathbb{P}(H \cap L)$

d. $\mathbb{P}_S(H)$

e. $\mathbb{P}_F(L)$

f. $\mathbb{P}_L(F)$

Solution

1.

	Sans diplôme	Baccalauréat	Licence	Total
Homme	276	192	108	576
Femme	312	240	72	624
Total	588	432	180	1200

2.

a. $\mathbb{P}(B) = \frac{432}{1200} = \frac{9}{25}$

b. $\mathbb{P}(F) = \frac{624}{1200} = \frac{13}{25}$

c. $\mathbb{P}(H \cap L) = \frac{108}{1200} = \frac{9}{100}$

d. $\mathbb{P}_S(H) = \frac{276}{588} = \frac{23}{49}$

e. $\mathbb{P}_F(L) = \frac{72}{624} = \frac{3}{26}$

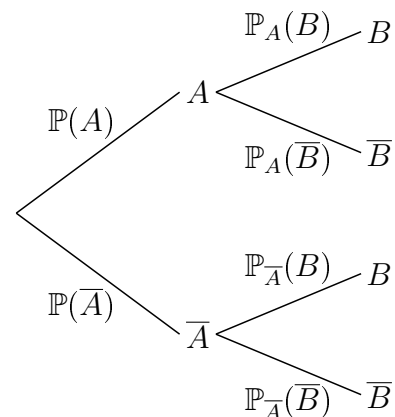
f. $\mathbb{P}_L(F) = \frac{72}{180} = \frac{2}{5}$



II - Arbre pondéré

Pour représenter une expérience aléatoire, on peut utiliser un **arbre pondéré**, constitué

- ❖ de **nœuds**, représentant les différents événements
- ❖ de **branches**, sur lesquelles on indique les probabilités conditionnelles.



Propriété 1 (Règles de calcul sur un arbre pondéré)

1. La somme des probabilités des branches qui partent d'un même nœud est égale à 1.

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = 1$$

2. La probabilité d'un événement correspondant à un composé de plusieurs branches est le produit des probabilités sur ces branches.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$

3. (Formule des probabilités totales) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins menant à cet événement.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}_{\bar{A}}(B)$$

Démonstration

On note Ω l'univers.

2. Par définition, $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, donc en multipliant par $\mathbb{P}(A)$, on obtient

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$$

3. On a $A = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$, et les événements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont disjoints, donc

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$$

La dernière égalité découle directement du point 2.

1. On a $\Omega = A \cup \bar{A}$, et les événements A et $\bar{A}$ sont disjoints, donc

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$$

Ensuite,

$$\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\bar{B}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$$

d'après 3.

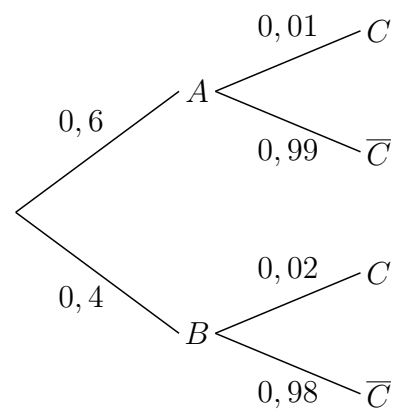


Exemple

Un restaurateur achète des verres chez deux fournisseurs A et B. Avec le transport, chaque verre peut éventuellement être cassé.

On choisit un verre au hasard, et on considère les événements suivants :

- ❖ A : "le verre vient du fournisseur A"
- ❖ B : "le verre vient du fournisseur B"
- ❖ C : "le verre est cassé".



La probabilité que le verre soit cassé sachant qu'il vient du fournisseur B est $\mathbb{P}_B(C) = 0,02$.

La probabilité que le verre ne soit pas cassé et vienne du fournisseur A est

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{C}) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(\bar{C}) = 0,6 \times 0,99 = 0,594$$

La probabilité que le verre soit cassé est

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(C) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(C) = 0,6 \times 0,01 + 0,4 \times 0,02 = 0,014$$

Exercice 2

Une usine automobile produit deux types de voitures : des citadines et des familiales. Chaque voiture est disponible en trois niveaux de finitions : basique, luxe et sport.

- ❖ 65 % des voitures produites sont des citadines
- ❖ Parmi les citadines, la moitié est produite en finition "basique", un cinquième en finition "luxe" et le reste en finition "sport"
- ❖ Parmi les familiales, 35 % sont produites en finition "luxe", 20 % en finition "sport" et le reste en finition "basique"

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Une voiture vient de sortir de l'usine.

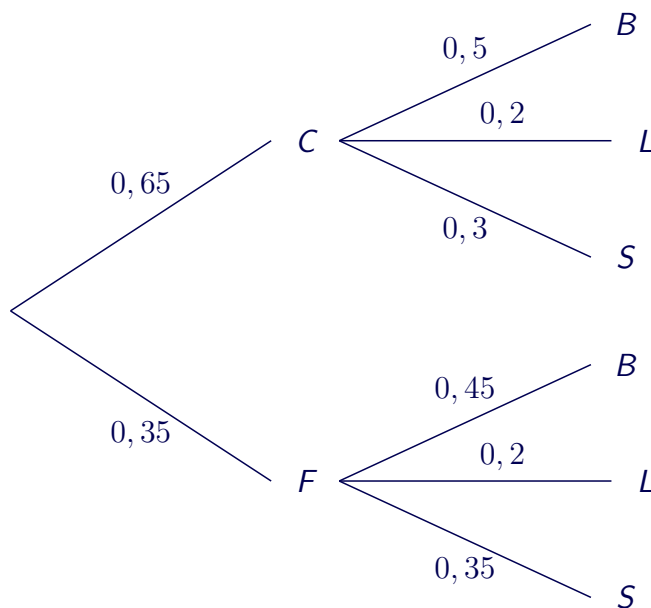
a. Quelle est la probabilité que ce soit une citadine en finition "luxe" ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle dispose de la finition "sport" ?

c. Sachant qu'elle est en finition "sport", quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une familiale ? Arrondir au dixième de pourcent près.

Solution

1. $\mathbb{P}(F) = 1 - 0,65 = 0,35$ $\mathbb{P}_C(S) = 1 - 0,5 - 0,2 = 0,3$
 $\mathbb{P}_F(B) = 1 - 0,35 - 0,2 = 0,45$



2. a. $\mathbb{P}(C \cap L) = 0,65 \times 0,2 = 0,13$

La probabilité que ce soit une citadine en finition "luxe" est 13 %.

b. $\mathbb{P}(S) = 0,65 \times 0,3 + 0,35 \times 0,35 = 0,3175$

La probabilité qu'elle dispose de la finition "sport" est 31,75 %.

c. $\mathbb{P}_S(F) = \frac{\mathbb{P}(S \cap F)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{0,35 \times 0,35}{0,3175} \approx 0,386$

La probabilité qu'il s'agisse d'une voiture familiale sachant qu'elle est en finition "sport" est environ égale à 38,6 %.



III - Indépendance d'évènements

Définition

Soient A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On dit que **A est indépendant de B** si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

Propriété 2

Soient A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Dire que A est indépendant de B revient à dire que B est indépendant de A :

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

On dit alors plus simplement que **A et B sont indépendants**. Cela revient aussi à dire que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Démonstration

Dire que A est indépendant de B signifie que $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$, c'est-à-dire que

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

En multipliant par $\mathbb{P}(B)$, cela revient à dire que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

En échangeant A et B , dire que B est indépendant de A signifie que

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A)$$

ce qui équivaut au fait que A est indépendant de B . ◆

Exemple

On considère un jeu de 52 cartes, composé de quatre familles (cœur, carreau, trèfle, pique), chacune composée de 13 cartes : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as.

On tire une carte au hasard, et on considère les évènements :

❖ D : "la carte est une dame"

❖ C : "la carte est un cœur"

$$\mathbb{P}(D) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \qquad \mathbb{P}(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \qquad \mathbb{P}(D \cap C) = \frac{1}{52}$$

$$\mathbb{P}(D) \times \mathbb{P}(C) = \frac{1}{13} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{52} = \mathbb{P}(D \cap C)$$

Par conséquent, les évènements D et C sont indépendants.

Propriété 3

Soient A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi indépendants. C'est aussi le cas de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et de A et $\overline{B}$.

Démonstration

Supposons que A et B sont indépendants. On a alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Par la formule des probabilités totales, on a également $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A)$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\bar{B})$$

Par conséquent, A et $\bar{B}$ sont indépendants.

En échangeant A et B , on montre de la même façon que $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Enfin, en suivant le même raisonnement avec $\bar{A}$ et B , on montre que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants. $\blacklozenge$

Exercice 3

Un opérateur téléphonique propose trois forfaits A, B et C. Après une enquête de satisfaction, cet opérateur découvre que :

- ❖ 70 % des abonnés ont choisi le forfait A, et parmi eux 80 % sont satisfaits
- ❖ 20 % des abonnés ont choisi le forfait B, et parmi eux 90 % sont satisfaits
- ❖ Les autres abonnés ont choisi le forfait C, et parmi eux 60 % sont satisfaits

On choisit un abonné au hasard, et on s'intéresse aux évènements :

- ❖ A : "le client a choisi le forfait A"
- ❖ B : "le client a choisi le forfait B"
- ❖ C : "le client a choisi le forfait C"
- ❖ S : "le client est satisfait"

1. Calculer $\mathbb{P}(S)$.

2. Dans chaque cas, dire si les évènements sont indépendants ou non. Justifier.

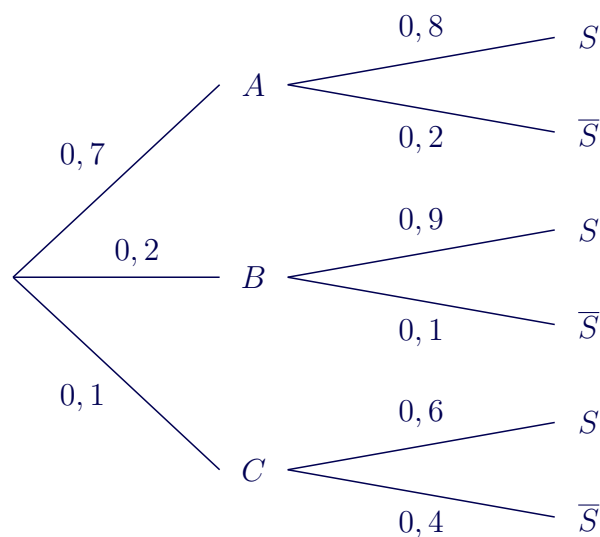
a. A et S

b. B et S

c. C et S

d. A et B

Solution



1. $\mathbb{P}(A \cap S) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$
 $\mathbb{P}(C \cap S) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$

$$\mathbb{P}(B \cap S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$$

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(A \cap S) + \mathbb{P}(B \cap S) + \mathbb{P}(C \cap S) = 0,56 + 0,18 + 0,06 = 0,8$$

La probabilité $\mathbb{P}(S)$ est donc égale à 0,8.

2. a. $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(S) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$ et $\mathbb{P}(A \cap S) = 0,56$, donc A et S sont indépendants.

b. $\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(S) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$ et $\mathbb{P}(B \cap S) = 0,18$, donc B et S ne sont pas indépendants.

c. $\mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(S) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$ et $\mathbb{P}(C \cap S) = 0,06$, donc C et S ne sont pas indépendants.

d. $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$ et comme il est impossible qu'un client ait choisi à la fois le forfait A et le forfait B , $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Les événements A et B ne sont donc pas indépendants.

