

❖ Lois discrètes ❖

I - Rappels de probabilités

Définition

Soient A et B deux évènements, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle de B sachant A** est

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Définition

Soient A et B deux évènements. Ils sont dits **indépendants** lorsque

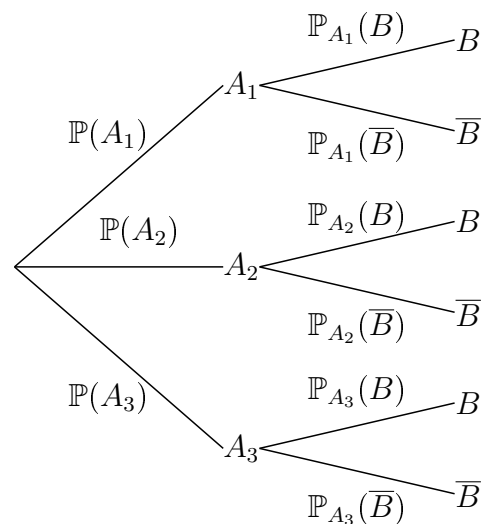
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Définition

Une **partition** de l'univers Ω , ou un **système complet d'évènements**, est une collection $A_1, \dots, A_n$ d'évènements de probabilité non nulle deux à deux disjoints et dont la réunion est Ω .

Pour représenter une expérience aléatoire à plusieurs épreuves, on peut utiliser un **arbre pondéré**, constitué de **nœuds**, représentant les différents évènements, et de **branches**, sur lesquelles on indique les probabilités.

Les branches du premier niveau portent des probabilités simples, et celles du second niveau portent des probabilités conditionnelles.



Dans un arbre pondéré, les règles de calcul sont les suivantes :

- ❖ La somme des probabilités des branches qui partent d'un même nœud est égale à 1.

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}_{A_1}(\bar{B}) = 1$$

- ❖ La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin composé de plusieurs branches est le produit des probabilités sur ces branches.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B)$$

- ❖ **(Formule des probabilités totales)** La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des chemins menant à cet évènement.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \mathbb{P}(A_3 \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \mathbb{P}(A_3) \times \mathbb{P}_{A_3}(B) \end{aligned}$$

Exercice 1

Une usine automobile produit deux types de voitures : des citadines et des familiales. Chaque voiture est disponible en trois niveaux de finitions : basique, luxe et sport.

- ❖ 65 % des voitures produites sont des citadines
- ❖ Parmi les citadines, la moitié est produite en finition "basique", un cinquième en finition "luxe" et le reste en finition "sport"
- ❖ Parmi les familiales, 35 % sont produites en finition "luxe", 20 % en finition "sport" et le reste en finition "basique"

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Une voiture vient de sortir de l'usine.

a. Quelle est la probabilité que ce soit une citadine en finition "luxe" ?

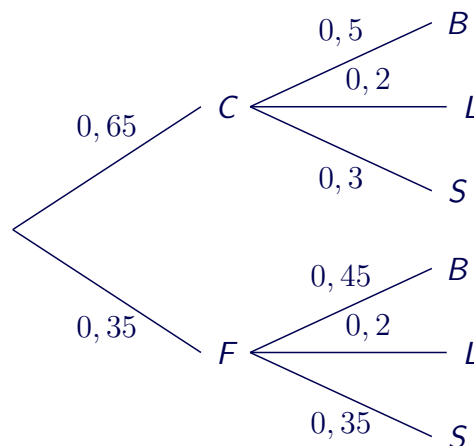
b. Quelle est la probabilité qu'elle dispose de la finition "sport" ?

c. Sachant qu'elle est en finition "sport", quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une familiale ?

3. Les événements "la voiture est une citadine" et "la voiture est en finition sport" sont-ils indépendants ?

Solution

1. $\mathbb{P}(F) = 1 - 0,65 = 0,35$ $\mathbb{P}_C(S) = 1 - 0,5 - 0,2 = 0,3$
 $\mathbb{P}_F(B) = 1 - 0,35 - 0,2 = 0,45$



2. a. $\mathbb{P}(C \cap L) = 0,65 \times 0,2 = 0,13$

La probabilité que ce soit une citadine en finition "luxe" est 13 %.

b. $\mathbb{P}(S) = 0,65 \times 0,3 + 0,35 \times 0,35 = 0,3175$

La probabilité qu'elle dispose de la finition "sport" est 31,75 %.

c. $\mathbb{P}_S(F) = \frac{\mathbb{P}(S \cap F)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{0,35 \times 0,35}{0,3175} \approx 0,386$

La probabilité qu'il s'agisse d'une voiture familiale sachant qu'elle est en finition "sport" est environ égale à 38,6 %.

3. On a $\mathbb{P}(S) = 0,3175$ et $\mathbb{P}_C(S) = 0,3$. Ces probabilités sont différentes, donc les événements C et S ne sont pas indépendants.



II - Loi uniforme discrète

Dans cette section, n désignera un entier naturel strictement positif.

Définition

Une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $\{1, 2, \dots, n\}$ lorsqu'elle prend les valeurs $1, 2, \dots, n$, et que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$. Alors l'espérance de X est :

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + \dots + n \times \mathbb{P}(X = n) \\ &= 0 \times \frac{1}{n} + 1 \times \frac{1}{n} + \dots + n \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \times (0 + 1 + \dots + n) \end{aligned}$$

La somme $S = 0 + 1 + \dots + n$ est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 1$. Ainsi :

$$S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{0 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Par conséquent :

$$E(X) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$



Exemple

On jette un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12. On suppose que le dé est équilibré.

On note X la variable aléatoire qui donne le numéro sur le dessus du dé après un lancer.

La variable aléatoire X prend les valeurs $1, 2, \dots, 12$, et puisque le dé est équilibré, chaque issue a une probabilité de $\frac{1}{12}$ de se produire. Cette variable aléatoire suit donc la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, 12\}$.

Son espérance est : $E(X) = \frac{12+1}{2} = 6,5$.

En lançant de nombreuses fois ce dé, on peut donc espérer obtenir un score moyen de 6,5.

III - Loi de Bernoulli et loi binomiale

1 - Loi de Bernoulli

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une épreuve aléatoire n'ayant que deux issues : un "succès" et un "échec".

Définition

Soit $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p si

- ❖ X prend la valeur 1 si l'issue est un "succès", avec une probabilité p
- ❖ X prend la valeur 0 si l'issue est un "échec", avec une probabilité $1 - p$

Propriété 2

Soit $p \in [0, 1]$ et soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p .

1. L'espérance de X est $E(X) = p$.
2. L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Démonstration

1. On a :

$$E(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

2. On calcule la variance de X , qui est donnée par la formule de König-Huygens :
 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

On calcule $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 0^2 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

Ainsi, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.

On en déduit que l'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1 - p)}$.



Exemple

On jette un dé à 12 faces numérotées de 1 à 12. On suppose que le dé est équilibré.

On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le numéro obtenu est un multiple de 3, et 0 sinon.

X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, puisque le dé est équilibré et compte 4 multiples de 3. Ainsi, $E(X) = \frac{1}{3}$, et

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Exercice 2

On lance deux dés équilibrés, un rouge et un bleu, à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note :

- ❖ R et B les numéros respectifs des dés rouge et bleu.
- ❖ S la somme des deux numéros
- ❖ T la variable égale à $6R + B$
- ❖ H qui vaut 1 si la somme obtenue est supérieure ou égale à 8, et 0 sinon

1. Déterminer les lois des variables aléatoires R et B .
2. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire S , puis dire si elle suit une loi uniforme discrète ou non.
3. Même question pour la variable T .
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire H ?

Solution

1. Puisque les dés sont équilibrés, les variables R et B suivent toutes les deux la loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$.

2. On rassemble les valeurs prises par S dans le tableau suivant :

$R \backslash B$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Les valeurs prises par S sont donc $2, \dots, 12$. On voit que $\mathbb{P}(S = 2) = \frac{1}{36}$ alors

$\mathbb{P}(S = 3) = \frac{2}{36}$, donc S ne suit pas une loi uniforme.

3. On rassemble les valeurs prises par T dans le tableau suivant :

$6R \backslash B$	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12
12	13	14	15	16	17	18
18	19	20	21	22	23	24
24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36
36	37	38	39	40	41	42

Les valeurs prises par T sont donc $7, \dots, 42$. Pour chacune d'entre elles, sa probabilité est $\frac{1}{36}$, donc T suit une loi uniforme.

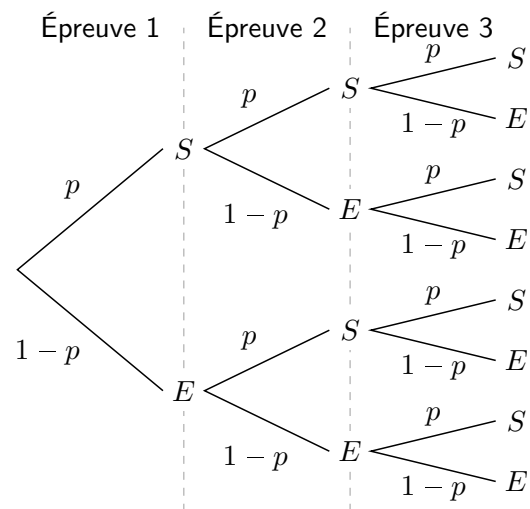
4. H ne prend que deux valeurs possibles, 0 et 1, donc elle suit une loi de Bernoulli. Son paramètre p est la probabilité $p = \mathbb{P}(S \geq 8)$, qui vaut $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. 

2 - Schéma de Bernoulli et coefficients binomiaux

Soit n un entier naturel strictement positif.

Un **schéma de Bernoulli** est la succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Un tel schéma peut se représenter par un arbre pondéré à n niveaux.



Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. Le nombre de chemins dans un schéma de Bernoulli à n épreuves qui comptent k succès est noté $\binom{n}{k}$, et se lit " **k parmi n** ".

Les nombres $\binom{n}{k}$ s'appellent des **coefficients binomiaux**.

Propriété 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, n\}$.

1. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{n} = 1$.

2. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

3. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Démonstration

1. $\binom{n}{0}$ est le nombre de chemins dans un schéma de Bernoulli à n épreuves qui comptent 0 succès : il n'existe qu'un seul tel chemin, celui composé de n échecs.

$\binom{n}{1}$ est le nombre de chemins dans un schéma de Bernoulli à n épreuves qui comptent 1 succès. Ce succès peut se situer à n'importe quelle épreuve entre l'épreuve 1 et l'épreuve n , ce qui donne n possibilités, d'où $\binom{n}{1} = n$.

$\binom{n}{n}$ est le nombre de chemins dans un schéma de Bernoulli à n épreuves qui comptent n succès : il n'existe qu'un seul tel chemin.

2. Le coefficient $\binom{n}{n-k}$ est le nombre de chemins dans un schéma de Bernoulli qui comptent $n-k$ succès. Pour déterminer un tel chemin, il faut et il suffit de déterminer

où sont positionnés les $n - (n - k) = k$ succès : il existe pour cela $\binom{n}{k}$ possibilités, d'où le résultat.

3. On considère un schéma de Bernoulli à $n + 1$ épreuves. Le coefficient $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de chemins dans ce schéma de Bernoulli qui comptent $k + 1$ succès. On peut partager ces chemins en deux catégories : ceux qui commencent par un succès, et ceux qui commencent par un échec.

❖ Si un tel chemin commence par un succès, alors il lui reste ensuite k succès à obtenir parmi n épreuves, ce qui donne $\binom{n}{k}$ possibilités.

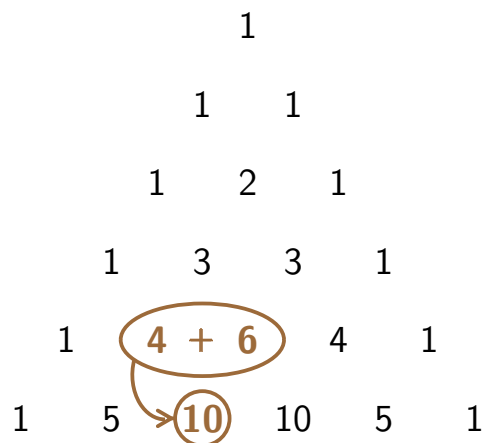
❖ Si un tel chemin commence par un échec, alors il lui reste ensuite $k + 1$ succès à obtenir parmi n épreuves, ce qui donne $\binom{n}{k+1}$ possibilités.

Finalement, cela donne bien $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ chemins possibles.



Ces coefficients binomiaux peuvent se représenter dans le **triangle de Pascal**.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1



Exercice 3

1. Sans utiliser la calculatrice, donner la valeur de $\binom{20}{0}$, $\binom{20}{1}$, $\binom{20}{19}$ et $\binom{20}{20}$.
2. En complétant le triangle de Pascal, donner la valeur de $\binom{7}{4}$, $\binom{7}{5}$ et $\binom{8}{5}$.
3. Calculer $\binom{20}{8}$ à la calculatrice. Donner un autre coefficient binomial qui lui est égal.

Solution

1. On a $\binom{20}{0} = 1$ et $\binom{20}{20} = 1$.

Ensuite, $\binom{20}{1} = 20$ et par symétrie $\binom{20}{19} = \binom{20}{1} = 20$.

2.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

On trouve donc $\binom{7}{4} = 35$ et $\binom{7}{5} = 21$.

On peut ensuite calculer : $\binom{8}{5} = \binom{7}{4} + \binom{7}{5} = 35 + 21 = 56$.



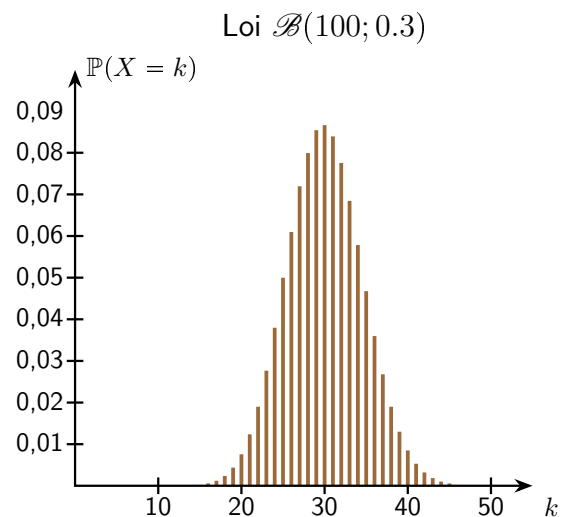
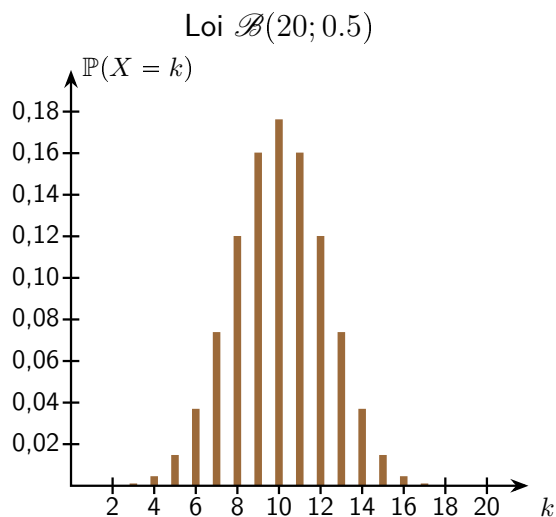
3 - Loi binomiale

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale** de paramètres $(n; p)$ si X compte le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli à n épreuves, la probabilité d'un succès étant p . On note alors $\mathcal{B}(n; p)$ cette loi.

Les valeurs prises par X sont alors les entiers $k \in \{0, \dots, n\}$, et pour chacun d'entre eux, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$



Propriété 4 (Admise)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Alors $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Exemple

On lance 10 fois un dés équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 1 obtenus. X suit la loi $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{6}\right)$.

Son espérance est $E(X) = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$ et son écart-type est :

$$\sigma(X) = \sqrt{10 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{10}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{50}{36}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

Exercice 4

Une usine fabrique des réfrigérateurs. On estime que la probabilité qu'un réfrigérateur soit défectueux est de 0,005. Le fait qu'un réfrigérateur soit défectueux est indépendant du fait que les précédents le soit.

On prélève au hasard 400 réfrigérateurs dans la production, ce que l'on assimile à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de réfrigérateurs défectueux parmi ces 400.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres.
2. Calculer et interpréter $\mathbb{P}(X = 5)$ et $\mathbb{P}(X \leq 4)$. Arrondir à 10^{-3} près.
3. Calculer et interpréter l'espérance de X .
4. Quel est le plus petit entier naturel a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) \geq 0,99$?

Solution

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0,005$.
2. Avec une calculatrice, on trouve $\mathbb{P}(X = 5) \approx 0,036 = 3,6\%$ et $\mathbb{P}(X \leq 4) \approx 0,948 = 94,8\%$.
Cela signifie que la probabilité qu'exactly 5 réfrigérateurs parmi les 400 soient défectueux est environ égal à 3,6 %, et que la probabilité qu'il y ait 4 réfrigérateurs défectueux ou moins est d'environ 94,8 %.
3. $E(X) = np = 400 \times 0,005 = 2$
En prélevant au hasard 400 réfrigérateurs de nombreuses fois, on peut s'attendre à avoir 2 réfrigérateurs défectueux parmi les 400 en moyenne.
4. Avec une calculatrice, on trouve que $\mathbb{P}(X \leq 5) \approx 0,983 < 0,99$ et $\mathbb{P}(X \leq 6) \approx 0,996 > 0,99$.
L'entier a recherché est donc $a = 6$.



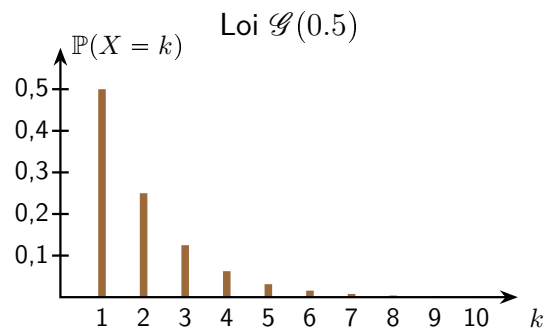
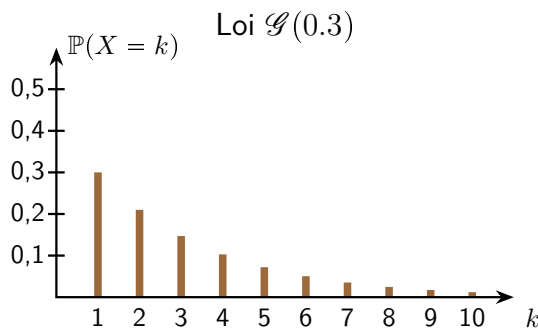
IV - Loi géométrique

Définition

Soit $p \in]0; 1]$. Une variable aléatoire X suit la **loi géométrique** de paramètre p si elle compte le rang du premier succès lorsque l'on répète des mêmes épreuves de Bernoulli de probabilité de succès p , de manière indépendante. On note $\mathcal{G}(p)$ cette loi.

Les valeurs prises par X sont tous les entiers naturels non nuls $k \in \mathbb{N}^*$, et pour chacun d'entre eux, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$$



Propriété 5 (Admise)

Soit $p \in]0; 1]$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. L'espérance de X est

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Exemple

Un joueur de basketball a une réussite aux lancers francs de 85 %. Il tire des lancers francs, et on s'intéresse à la variable aléatoire X qui indique le rang du premier lancer franc raté.

X suit la loi géométrique de paramètre $p = 1 - 0,85 = 0,15$.

On a $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,15} \approx 7$: en moyenne, ce joueur ratera son premier lancer franc au septième tiré.

Propriété 6

Soit $p \in]0; 1]$ et soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Alors pour tous entiers naturels strictement positifs k et l , on a

$$\mathbb{P}_{(X>l)}(X > k + l) = \mathbb{P}(X > k)$$

Démonstration

Pour un entier naturel n non nul, on a $\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n)$. Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq n) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \cdots + \mathbb{P}(X = n) \\ &= p(1 - p)^0 + p(1 - p)^1 + \cdots + p(1 - p)^{n-1} \\ &= p \times \left((1 - p)^0 + (1 - p)^1 + \cdots + (1 - p)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

La somme $S = (1-p)^0 + (1-p)^1 + \dots + (1-p)^{n-1}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 1-p$. Ainsi :

$$S = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = \frac{1-(1-p)^n}{p}$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(X \leq n) = p \times S = p \times \frac{1-(1-p)^n}{p} = 1 - (1-p)^n$$

d'où $\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n) = 1 - (1 - (1-p)^n) = (1-p)^n$.

En effet, dire que $X > n$ revient à dire que le premier succès intervient au moins à partir du rang $n+1$, ce qui signifie précisément que les n premiers tirages ont été des échecs. Chacun se produisant avec une probabilité $1-p$ et de façon indépendante des autres, cela donne $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$.

Soient k et l deux entiers naturel non nuls. On remarque que

$$\mathbb{P}_{(X>l)}(X > k+l) = \frac{\mathbb{P}((X > l) \cap (X > k+l))}{\mathbb{P}(X > l)} = \frac{\mathbb{P}(X > k+l)}{\mathbb{P}(X > l)}$$

puisque dire que $X > l$ et $X > k+l$ simultanément revient simplement à dire que $X > k+l$.

Par conséquent :

$$\mathbb{P}_{(X>l)}(X > k+l) = \frac{\mathbb{P}(X > k+l)}{\mathbb{P}(X > l)} = \frac{(1-p)^{k+l}}{(1-p)^l} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k)$$

ce que l'on voulait démontrer. ◆

Remarque

On dit que la loi géométrique est **sans mémoire** : le fait que $X > l$ n'a aucune influence sur le fait que la valeur de X augmente de k .

C'est d'ailleurs une propriété caractéristique de cette loi : c'est la seule loi discrète ayant cette propriété.

Exercice 5

Un client d'un opérateur téléphonique veut appeler le service après-vente. On estime que la probabilité que son appel soit pris en compte dans la première minute est de 0,38. Si ce n'est pas le cas, le client raccroche et rappelle de nouveau.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de tentatives effectuées par le client avant d'obtenir le service après vente.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X .
2. Quelle est la probabilité que l'appel du client soit pris en charge à la cinquième tentative ? avant la quatrième tentative ?
3. Quelle est la probabilité qu'il soit pris en charge après la troisième tentative ?

- 4.** Sachant que le client a déjà effectué 5 tentatives, quelle est la probabilité qu'il soit pris en charge après la huitième tentative ?
- 5.** Déterminer le temps d'attente moyen (en minutes) de ce client.

Solution

1. La variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,38$.

2. $\mathbb{P}(X = 5) = p(1 - p)^{5-1} = 0,38 \times (1 - 0,38)^4 = 0,38 \times 0,62^4 \approx 0,055 = 5,6\%$

La probabilité que l'appel du client soit pris en charge à la cinquième tentative est d'environ 5,6 %.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < 4) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) \\ &= p(1 - p)^{1-1} + p(1 - p)^{2-1} + p(1 - p)^{3-1} \\ &= 0,38 \times (1 - 0,38)^0 + 0,38 \times (1 - 0,38)^1 + 0,38 \times (1 - 0,38)^2 \\ &= 0,38 + 0,38 \times 0,62 + 0,38 \times 0,62^2 \approx 0,762 = 76,2\%\end{aligned}$$

La probabilité que l'appel du client soit pris en compte avant le quatrième appel est donc environ égale à 76,2 %.

3. $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 4) \approx 0,238 = 23,8\%$

La probabilité qu'il soit pris en charge après la troisième tentative est d'environ 23,8 %.

4. On cherche $\mathbb{P}_{(X>5)}(X > 8)$. Comme la loi géométrique est sans mémoire, on a :

$$\mathbb{P}_{(X>5)}(X > 8) = \mathbb{P}(X > 8 - 5) = \mathbb{P}(X > 3) \approx 23,8\%$$

La probabilité qu'il soit pris en charge après la huitième tentative, sachant que le client a déjà effectué 5 tentatives, est donc environ égale à 23,8 %.

5. $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,38} \approx 2,6$.

Le client devra donc en moyenne attendre 2,6 minutes.

