

❖ Limites de fonctions et continuité ❖

I - Limites d'une fonction

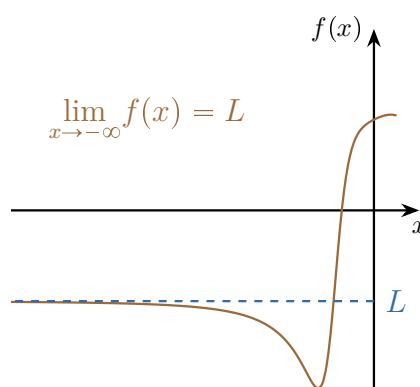
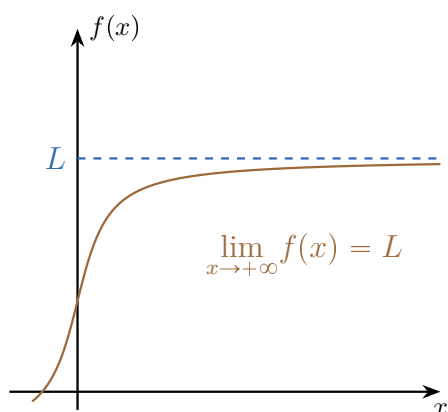
1 - En l'infini

Définition

On dit qu'une fonction f **admet pour limite un réel L en $+\infty$** si $f(x)$ prend des valeurs aussi proche de L qu'on le souhaite, à condition que x soit assez grand.

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.

On définit de façon analogue la notion de limite finie en $-\infty$.



Définition

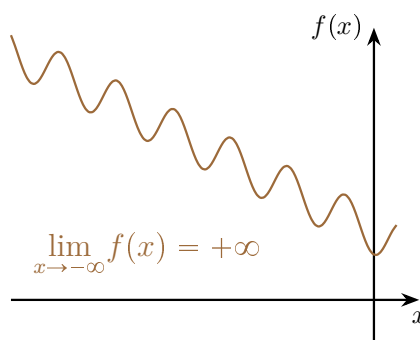
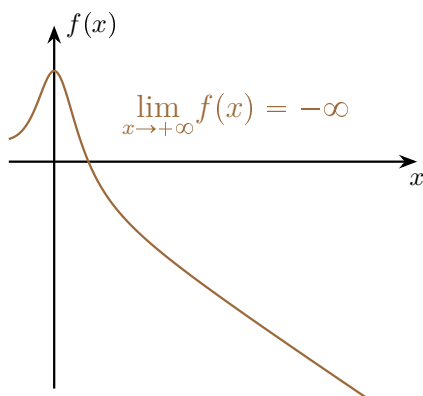
Lorsque f admet pour limite un réel L en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y = L$ est une **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f .

Définition

On dit qu'une fonction f **admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes qu'on le souhaite, à condition que x soit assez grand.

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On définit de façon analogue une limite égale à $-\infty$, et une limite en $-\infty$.



Propriété 1 (Admise)

On a les limites suivantes :

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

2 - En un nombre réel

Définition

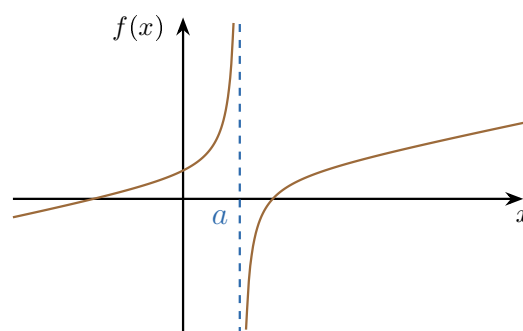
On dit qu'une fonction f **admet pour limite $+\infty$ en un nombre réel a** si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes qu'on le souhaite, à condition que x soit assez proche de a

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

On définit de façon analogue la notion de limite finie en $-\infty$.

Dans ce cas, on peut avoir une **limite à droite** et une **limite à gauche**. Pour la fonction f représentée ci-contre, on a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty$$



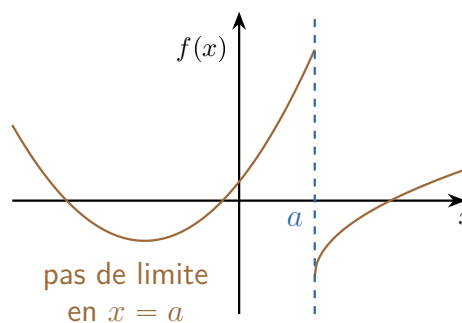
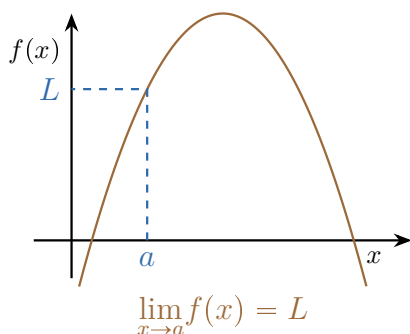
Définition

Lorsque f admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un réel a , on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f .

Définition

On dit qu'une fonction f **admet pour limite un réel L en un réel a** si $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de L qu'on le souhaite, à condition que x soit assez proche de a .

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$.



Propriété 2 (Admise)

On a les limites suivantes :

$$\diamond \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$$

3 - Opérations

Propriété 3 (Admise)

Soient f et g deux fonctions et L, L' deux réels. Les propriétés suivantes sont valables pour des limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en un réel a .

Somme	$\lim f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	$\lim g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
	$\lim f(x) + g(x)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*
Produit	$\lim f(x)$	L	$L \neq 0$	$\pm\infty$	0		
	$\lim g(x)$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$		
	$\lim f(x)g(x)$	LL'	$\pm\infty^{**}$	$\pm\infty^{**}$	F.I.*		
Quotient	$\lim f(x)$	L	$L \neq 0$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
	$\lim g(x)$	$L' \neq 0$	$0 \blacklozenge$	$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	0
	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty^{**}$	0	$\pm\infty^{**}$	F.I.*	F.I.*

*F.I. : Forme Indéterminée

**On utilise la règle des signes

◆ Il faut que $g(x)$ reste de signe constant pour x très grand, très petit, ou proche de a .

Exemples

❖ On considère la fonction f définie par $f(x) = -(2x - 3)(4x^2 + 1)$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x - 3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 1 = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

❖ On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{1 - 2x}{3 - x}$.

On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} 3 - x = 0_-$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} 1 - 2x = -5$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} g(x) = +\infty$.

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1)(2 - 3x^2)$

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x^2}{20 - 5x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - e^{-x}}{\sqrt{x + 2}}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 2}{3 - 6x}$

Solution

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - 3x^2 = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1)(2 - 3x^2) = -\infty$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - e^{-x} = 4$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 2} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - e^{-x}}{\sqrt{x + 2}} = 0$.

3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} x^2 = 16$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} 20 - 5x = 0_+$, donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} \frac{x^2}{20 - 5x} = +\infty$.

4. Pour tout nombre réel x différent de 0 et 2, on a

$$\frac{-4x + 2}{3 - 6x} = \frac{x \left(-4 + \frac{2}{x} \right)}{x \left(\frac{3}{x} - 6 \right)} = \frac{-4 + \frac{2}{x}}{\frac{3}{x} - 6}$$

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4 + \frac{2}{x} = -4$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} - 6 = -6$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 2}{3 - 6x} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$.

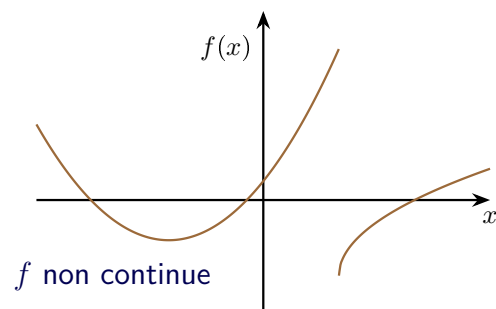
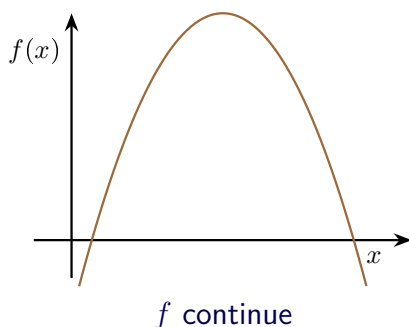


II - Continuité

1 - Approche intuitive

Définition

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **continue** si l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.



Propriété 4 (Admise)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Alors f est continue sur I si, et seulement si, pour tout nombre $a \in I$, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Propriété 5 (Admise)

- ❖ Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ❖ La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
- ❖ La fonction $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- ❖ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Propriété 6 (Admise)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I . Alors $f + g$ et $f \times g$ sont continues sur I , et si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

Remarque

En particulier, les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 3x + 10 & \text{si } x \leq -2 \\ 12 - 2x^2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

Sur $] -\infty, -2[$, f est une fonction polynôme, donc elle est continue.

Sur $] -2, +\infty[$, f est une fonction polynôme, donc elle est continue.

En $x = -2$, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} 3x + 10 = 3 \times (-2) + 10 = 4$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} 12 - 2x^2 = 12 - 2 \times (-2)^2 = 4$.

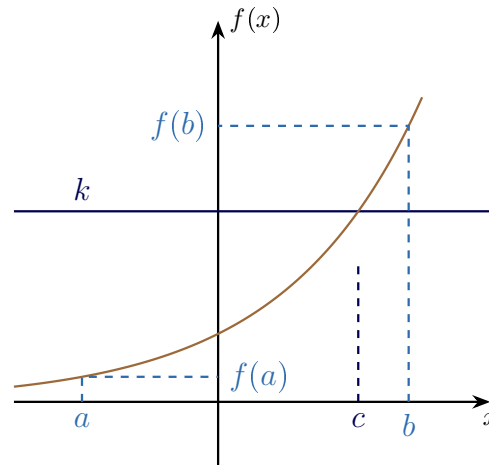
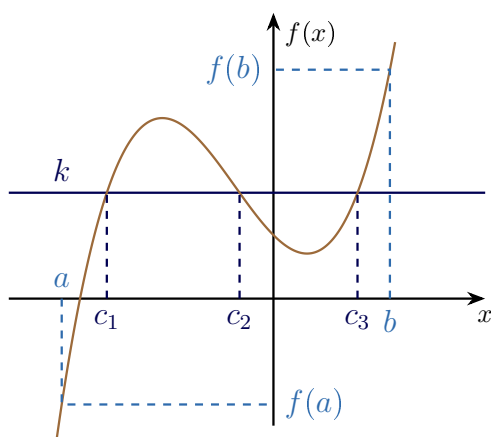
Par conséquent, f est continue en -2 , et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2 - Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 (des valeurs intermédiaires)(Admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Si de plus f est strictement monotone, alors ce réel c est unique.



Exercice 2

Un marchand vend des jeux-vidéo à un prix unitaire entre 10 et 30 euros. Après une étude de marché, il modélise l'offre f et la demande g par les formules suivantes :

$$f(x) = 22,32x + 268$$

$$g(x) = -0,275x^2 - 6,5x + 1000$$

où x désigne le prix en euro.

1. Justifier que les fonctions f et g sont continues sur l'intervalle $[10; 30]$.

Le marchand s'intéresse au prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales. On note α ce prix d'équilibre, et on pose $h(x) = f(x) - g(x)$.

2. Montrer que le prix d'équilibre α est solution de l'équation $h(x) = 0$.

- 3.** Étudier les variations de la fonction h .
- 4.** En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[10; 30]$.
- 5.** Donner un encadrement à 10^{-3} près de cette solution, puis en déduire le prix d'équilibre au centime près.

Solution

- 1.** Les fonctions f et g sont des fonctions polynômes, donc elles sont continues sur $[10; 30]$.
- 2.** Le prix d'équilibre α est, par définition, le nombre réel tel que $f(\alpha) = g(\alpha)$, c'est-à-dire $h(\alpha) = f(\alpha) - g(\alpha) = 0$.
- 3.** Pour tout $x \in [10; 30]$:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 22,32x + 268 - (-0,275x^2 - 6,5x + 1000) = 0,275x^2 + 28,82x - 732$$

h est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $[10; 30]$, et pour tout x dans $[10; 30]$:

$$h'(x) = 0,55x + 28,82$$

Ainsi,

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0,55x + 28,82 \geq 0 \Leftrightarrow 0,55x \geq -28,82 \Leftrightarrow x \geq -\frac{28,82}{0,55}$$

Par conséquent, h' est strictement négative sur $[10; 30]$, donc h est strictement décroissante sur $[10; 30]$.

- 4.** $h(10) = 0,275 \times 10^2 + 28,82 \times 10 - 732 = -416,3 < 0$
 $h(30) = 0,275 \times 30^2 + 28,82 \times 30 - 732 = 380,1 > 0$

De plus, h est continue et strictement décroissante sur $[10; 30]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[10; 30]$.

- 5.** Avec une calculatrice, on trouve $h(21,136) \approx -0,01 < 0$ et $h(21,137) \approx 0,03 > 0$, donc $21,136 < \alpha < 21,137$. Le prix d'équilibre est donc environ 21,14 €.



3 - Fonction réciproque

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J . Si f est continue et strictement monotone, le théorème des valeurs intermédiaires assure que pour tout réel y dans J , il existe un unique réel x dans I tel que $f(x) = y$.

On note ce réel $x = f^{-1}(y)$, ce qui définit une fonction f^{-1} définie sur J et à valeurs dans I . On appelle cette fonction la **fonction réciproque** de f .

Pour tout $x \in I$, on a $f^{-1}(f(x)) = x$, et pour tout $y \in J$, on a $f(f^{-1}(y)) = y$.

Exemples

- ❖ On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^2$.

f est strictement croissante et continue sur $I = [0, +\infty[$ et à valeurs dans $J = [0, +\infty[$.

Elle admet donc une fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$, telle que pour tout $y \in J = [0, +\infty[$, $f^{-1}(y) \in I = [0, +\infty[$ vérifie $(f^{-1}(y))^2 = y$.

Par conséquent, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$: la fonction f^{-1} est la fonction racine carrée.

- ❖ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 1$.

La fonction g est affine, de coefficient directeur $2 > 0$, donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Puisqu'elle est affine, elle est continue. Elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc elle admet une fonction réciproque $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$:

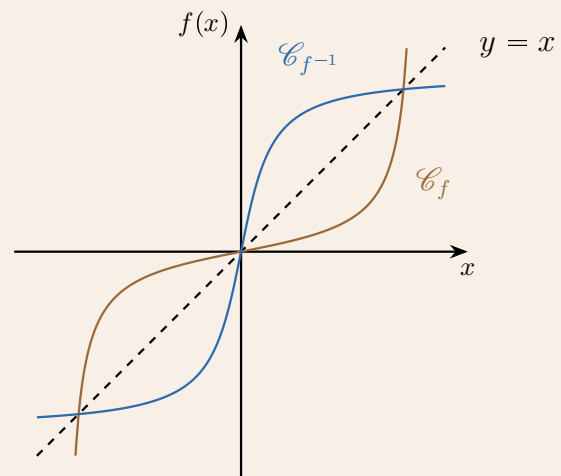
$$y = g(x) \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y + 1}{2}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g^{-1}(y) = \frac{y + 1}{2}$.

Propriété 7

Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J , continue et strictement monotone, de réciproque f^{-1} .

Alors les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la diagonale d'équation $y = x$.



Démonstration

Soit M un point de la courbe représentative de f . Si on note $(x; y)$ ses coordonnées, alors $y = f(x)$. Le symétrique M' du point M par rapport à la diagonale d'équation $y = x$ a donc pour coordonnées $(f(x); x)$. Comme $f^{-1}(f(x)) = x$, M' appartient à la courbe représentative de f^{-1} .

Considérons maintenant un point N de la courbe représentative de f^{-1} , et notons $(x'; y')$ ses coordonnées, de sorte que $y' = f^{-1}(x')$. Son symétrique N' par rapport à la diagonale d'équation $y = x$ a pour coordonnées $(f^{-1}(x'), x')$. Puisque $f(f^{-1}(x')) = x'$, ce point N' appartient à la courbe représentative de f . $\blacklozenge$