Table des matières

1 Exemples de dénombrements dans différentes situations 6

2 Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle 14

3 Variables aléatoires discrètes 22

4 Variables aléatoires réelles à densité 35

5 Statistique à une ou deux variable, représentation et analyse de données 49

6 Multiples et diviseurs dans $\mathbb{N}$, nombres premiers 60

7 PGCD et PPCM dans $\mathbb{Z}$ 72

8 Congruences dans $\mathbb{Z}$ 81

9 Différentes écritures d'un nombre complexe 88

10 Utilisation des nombres complexes en géométrie 105

11 Trigonométrie 115

12 Repérage dans le plan, dans l'espace, sur une sphère 127

13 Droites et plans dans l'espace 135

14 Transformations du plan. Frises et pavages 143

15 Relations métriques et angulaires dans le triangle 150

16 Solides de l'espace : représentations et calculs de volumes 166

17 Périmètres, aires, volumes 176

18 Exemples de résolution de problèmes de géométrie plane à l'aide de vecteurs 189

19 Produit scalaire dans le plan 197

20 Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie 205

21 Problèmes de construction géométriques 212

22 Exemples de problèmes d'alignement, de parallélisme 224

23 Exemples de problèmes d'intersection en géométrie 235

24 Pourcentages et taux d'évolution . . . 245
25 Problèmes conduisant à une modélisation par des équations ou des inéquations . . . 250
26 Problèmes conduisant à une modélisation par des graphes, par des matrices . . . 258
27 Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré . . . 267
28 Suites numériques. Limites . . . 277
29 Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . 287
30 Détermination de limites de fonctions réelles de variable réelle . . . 299
31 Théorème des valeurs intermédiaires . . . 307
32 Nombre dérivé. Fonction dérivée. . . . 313
33 Fonctions exponentielles . . . 327
34 Fonctions logarithmes . . . 336
35 Fonctions convexes . . . 345
36 Primitives, équations différentielles . . . 357
37 Intégrales, primitives . . . 367
38 Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées) . . . 380
39 Exemples de résolution d'équations (méthodes exactes, méthodes approchées) . . . 394
40 Exemples de modèles d'évolution . . . 407
41 Problèmes dont la résolution fait intervenir un algorithme . . . 415
42 Différents types de raisonnements en mathématiques . . . 426
43 Exemples d'approches historiques de notions mathématiques enseignées au collège, au lycée . . . 436
44 Application des mathématiques à d'autres disciplines . . . 448

Préambule

Ce document présente les plans de leçons que j'ai conçu en préparation de la première épreuve orale du Capes externe de mathématiques. J'ai préparé ces plans lors de ma seconde année de Master MEEF à l'Université de Bordeaux, année scolaire 2022-2023, pour la session 2023 du concours. Ils se rapportent donc au programme de cette session.

Les plans présentés ici sont plus ou moins tels qu'ils étaient au moment où j'ai passé ce concours. Par conséquent, ils sont loins d'être parfaits et contiennent des imprécisions, voire des erreurs. En particulier, présentés comme tels, ils manquent cruellement d'applications aux propositions et théorèmes énoncés. Il faudrait rajouter des exemples et des exercices ou des applications pour chaque proposition (ou presque), même simples.

Ce document s'adresse aux candidats du Capes externe de mathématiques, en vue de la préparation du premier oral d'admission. Ces plans ne sont que des propositions de plans, que j'ai conçu selon mes préférences et mes aisances personnelles. Je ne recommande donc pas au candidat de les reprendre tels quels, sans les modifier. Je les propose dans le but de partager mon travail, et afin que de futurs candidats puissent y trouver une potentielle inspiration. Il est toujours préférable de concevoir soi-même ce type de plan, afin de s'approprier au mieux leur contenu et de se sentir à l'aise pour les présenter. Cela aide également à les mémoriser.

J'ai volontairement fait apparaître dans ces plans les démonstrations de la plupart des résultats énoncés. Je ne recommande pas de le faire le jour de l'oral. J'ai décidé des les inclure dans ce document à l'attention des candidats cherchant des preuves de certains résultats. Également, bon nombre de remarques écrites dans ce document sont plutôt destinées à être énoncées à l'oral, ou comme transitions entre deux sections.

Je tiens à préciser que je n'ai pu tester que très peu de ces plans en conditions réelles, ayant obtenu le Capes dès ma première tentative. Il est donc possible, et probable, que certains d'entre eux soient trop longs ou trop courts pour le temps imparti, présentés tels quels.

Certaines applications et certains exercices sont très largement inspirés de ressouces trouvées en ligne, notamment de manuels scolaires, ou du site Bibmath. Ce dernier présente également de nombreuses démonstrations, dont j'ai pu m'inspirer dans certains cas.

Le template LaTeXque j'utilise est très largement inspiré du template "Fun Template 1" de Senan Sekhon, trouvable à l'adresse suivante : *https://fr.overleaf.com/latex/templates/fun-template-1/drwvdzsrpgzz*.

Si une erreur ou une coquille s'est glissée quelque part, veuillez m'en informer par mail, j'essaierai de la corriger au plus vite. De même, je suis ouvert à toute proposition d'amélioration de ce document.

1 Exemples de dénombrements dans différentes situations

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** théorie des ensembles, factorielles, arrangements, combinaisons, coefficients binomiaux

1.1 Rappels de dénombrement

1.1.1 Principes additif et multiplicatif

Proposition (Principe additif) Le cardinal d'une réunion finie d'ensembles finis disjoints est la somme des cardinaux de ces ensembles.

On utilise ce principe dans ce type de problème de dénombrement :

Exercice Dans un collège, les élèves de sixième ont le choix entre deux langues étrangères (espagnol et allemand), et peuvent choisir l'option latin, l'option sport, ou aucune option.
Dans une classe de sixième de ce collège, 19 élèves pratiquent l'espagnol, et 11 élèves ont choisi l'option sport. Parmi eux, 5 ont choisi l'espagnol. Il y a 8 élèves de l'option latin qui pratiquent l'espagnol, et 4 qui pratiquent l'allemand. 2 des élèves qui pratiquent l'allemand n'ont choisi aucune option.
Déterminer le nombre d'élèves qui pratiquent chaque langue, chaque option, ainsi que le nombre d'élèves dans cette classe.

Les différentes intersections des sous-ensembles "langues" et "options" forment une partition de l'ensemble des élèves de la classe, donc on peut se servir du principe additif. Pour faciliter le problème, on peut dresser un tableau à double entrée :

	Latin	Sport	Pas d'option	**Total**
Espagnol	8	5	6	19
Allemand	4	6	2	12
Total	12	11	8	31

Cette classe compte alors $8+4=12$ latinistes, $11-5=6$ élèves qui pratiquent l'allemand et qui ont choisi l'option sport. Le nombre d'élèves sans option qui font de l'espagnol est $19-(5+8)=6$. Il y a donc 8 élèves sans option, et 12 qui pratiquent l'allemand, ce qui donne un total de 31 élèves.

Proposition (Principe multiplicatif) Le cardinal d'un produit cartésien fini d'ensembles finis est le produit des cardinaux de ces ensembles.

Dans un restaurant, le menu est composé d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Chaque menu peut-être associé à un élément du produit cartésien $E \times P \times D$, où E est l'ensemble des entrées, P des plats et D des desserts. Le nombre de menus différents est alors le produit des cardinaux de E, D et P, soit le produit du nombre d'entrées, du nombre de plats et du nombres de desserts.

1.1.2 Factorielles, arrangements, combinaisons

Définition Soit n un entier naturel non nul. On appelle factorielle de n, et on note $n!$, le produit $\prod_{k=1}^{n} k = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$. Par convention, $0! = 1$.

Remarque Le nombre $n!$ compte le nombre de façons d'ordonner n objets donnés.

Définition Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. On appelle arrangement de k éléments de E tout k-uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Proposition Le nombre d'arrangements à k éléments d'un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{(n-k)!}$. On note parfois ce nombre A_n^k.
Par convention, $A_n^k = 0$ si $k > n$, et $A_0^0 = 1$.

Démonstration *Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. Un arrangement à k éléments de E est un k-uplet de la forme $(x_1, \ldots, x_k)$, où les x_i sont deux à deux distincts.*
Pour former un tel k-uplet, on dispose de n choix pour le premier élément x_1. Pour chaque possibilité, on ne dispose alors que de $n-1$ choix pour x_2, puisque $x_2 \neq x_1$. Cela laisse $n \times (n-1)$ possibilités. Pour chacune de ces possibilités, on dipose de $n-2$ choix pour x_3, ce qui donne $n \times (n-1) \times (n-2)$ possibilités, et ainsi de suite.
En procédant ainsi jusqu'à x_k, on obtient que le nombre d'arrangements est $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1)$. On remarque que :

$$n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-k) \times (n-k-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ce qui achève la preuve. ◈

Remarque A_n^k dénombre le nombre de façons de choisir, de manière ordonnée, k objets parmi n objets.

Définition Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. Une combinaison à k éléments de E est une partie à k éléments de E.

Proposition Le nombre de combinaisons à k éléments d'un ensemble à n éléments est $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. On note parfois ce nombre C_n^k, mais plus souvent $\binom{n}{k}$, que l'on lit "k parmi n".
Par convention, $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, et $\binom{0}{0} = 1$.

Démonstration *Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments. Pour former une partie à k éléments de E, il faut choisir k éléments distincts de E, ce qui laisse A_n^k possibilités. Seulement, les éléments d'une partie ne sont pas ordonnés, contrairement à ceux d'un k-uplet. Chaque partie est alors comptée autant de fois qu'il y a de façons d'ordonner k éléments, ie $k!$. Ainsi, $\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.* ◈

Remarque $\binom{n}{k}$ compte le nombre de façons de choisir, sans prendre en compte l'ordre, k objets parmi n objets. Ces nombres sont également appelés coefficients binomiaux. Nous verrons plus tard pourquoi.

Proposition (Propriété de Pascal) Pour k et n deux entiers naturels, on a $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Démonstration *On peut démontrer cette propriété par le calcul, avec les factorielles, mais une preuve purement combinatoire existe.*

On considère un ensemble E à $n+1$ éléments, et l'on dénombre le nombre de parties de E à $k+1$ éléments de deux façons. Soit $x \in E$ un élément fixé. Parmi les parties de E à $k+1$ éléments, certaines contiennent x d'autres non. Toute partie de $k+1$ éléments qui contient x est uniquement déterminée par les k autres éléments qu'elle contient, qui sont distincts de x, ce qui laisse $\binom{n}{k}$ possibilités. Toute partie de $k+1$ éléménts qui ne contient pas x est uniquement déterminée par les $k+1$ éléments distincts de x qu'elle comprend, ce qui donne $\binom{n}{k+1}$ possibilités. Comme ce nombre de parties à $k+1$ éléments est par définition $\binom{n+1}{k+1}$, on obtient que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. ◈

Remarque Cette propriété permet de retrouver rapidement les "petits" coefficients binomiaux en construisant le triangle de Pascal, dans lequel chaque nombre est la somme des deux nombres directement au-dessus.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_de_Pascal

1.2 Applications

1.2.1 Vie courante

Plaques d'immatriculation :

La format français actuel des plaques d'immatriculation est formé de trois blocs : deux lettres, puis trois chiffres, puis deux lettres. En utilisant le principe multiplicatif et en dénombrant le nombre de possibilités pour chaque bloc, on peut dénombrer le nombre de plaques d'immatriculation différentes possibles.

Tous les chiffres sont autorisés, mais les lettres I, O et U sont interdites. Sont également interdits : la double lettre SS sur les blocs de gauche et de droite, le triple 000 sur le bloc central et la double lettre WW sur le bloc de gauche.

- Pour le bloc de droite, on a deux fois 23 lettres possibles, moins les deux cas de double lettres, donc $23^2 - 2 = 527$ possiblités.
- Pour le bloc central, on a trois fois 10 chiffres possibles, moins le triple 000, soit $10^3 - 1 = 999$ possibilités.
- Pour le bloc de droite, on a deux fois 23 lettres possibles, moins la double lettre SS, donc $23^2 - 1 = 528$ possibilités.

Cela donne alors un total de $527 \times 999 \times 528$ plaques différentes, soit 277 977 744.

Alphabet braille :

Dans l'alphabet braille, chaque caractère est composé de six emplacement, sur lesquels figurent soit une bosse, soit un plat. En utilisant le principe multiplicatif, cela donne $2^6 = 64$ caractères possibles.

1.2.2 En probabilité

Le dénombrement est lié de très près aux probabilité, notamment dans les situations d'équiprobabilité. En effet, dans ce cas, on a : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, dans le cas d'un univers Ω fini. De nombreux cas de calcul de probabilité se ramènent donc à dénombrer $|A|$ et/ou $|\Omega|$.

Loi binomiale :

Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < p < 1$ lorsqu'elle compte le nombre de succès en répétant n fois, de façon indépendante, la même expérience avec une probabilité p de succès. On a clairement $X(\Omega) = \{0, \dots, n\}$. Le calcul de $\mathbb{P}(X = k)$, pour $0 \leq k \leq n$, utilise des arguments de dénombrements.

Pour avoir k succès parmi n tirages, il faut $n - k$ échecs. Obtenir k succès et $n - k$ échecs se produit avec une probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ (par indépendance). Seulement, il existe plusieurs suites de n tirages qui amènent à k succès. Une telle suite est entièrement déterminée par l'emplacement des k succès parmi les n tirages : il existe $\binom{n}{k}$ façons de les disposer. Ainsi, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Paradoxe des anniversaires :

Voici un problème bien connu, qui amène à un apparent paradoxe dit "des anniversaires" : dans un groupe de n personnes, quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes partagent le même anniversaire ?

Pour répondre à cette question, on va calculer la probabilité que les n personnes aient n anniversaires distincts. Au total, il y a 365^n n-uplets possibles d'anniversaires. Parmi ceux-là, il en existe A_{365}^n qui sont composés de dates deux à deux distinctes. La probabilité recherchée est donc :

$$\frac{A_{365}^n}{365^n} = \frac{365!}{(365-n)! \times 365^n}$$

Le "paradoxe" vient du fait qu'à partir de $n = 23$ "seulement", cette probabilité est inférieure à 50%. Elle est même inférieure à 1% à partir de $n = 57$.

1.2.3 En analyse

Applications entre ensemble finis :

On considère deux ensembles E et F finis de cardinaux respectifs p et q. Combien existe-t-il alors d'applications distinctes de E dans F ? d'injections ? de surjections ? de bijections ?

Une application de E dans F est la donnée d'une image dans F pour chaque élément de E. Cela donne q choix pour chaque $x \in E$, ce qui fait q^p applications.

Remarque Ce nombre d'applications est alors $|F|^{|E|}$: ce n'est pas sans lien avec le fait que l'ensemble des applications de E dans F soit noté F^E.

Pour qu'il existe une injection de E dans F, il faut que $p \leq q$. Dans ce cas, pour chaque antécédent dans E, il faut choisir une image dans F, sans choisir plusieurs fois la même : cela revient à prendre un arrangement de p éléments de F. Cela donne alors $A_q^p = \frac{q!}{(q-p)!}$ injections possibles.

Il existe une bijection entre E et F si, et seulement si, $p = q$. Dans ce cas, toute injection est une bijection et réciproquement, si bien que le nombre de bijections est $A_p^p = p!$.

Remarque Le calcul du nombre de surjections de E dans F est bien plus sophistiqué. Il peut par exemple se faire en utilisant la formule du crible de Poincaré.

Sommes :

Le calcul de sommes de suites est également un exemple de dénombrement qui n'est pas étudié en détail ici. On peut notamment citer le cas des suites arithmétiques et géométriques, étudiées au lycée. Pour des raison $r \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} kr = r \times \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Cela donne les formules sur les sommes des termes de suites arithmétiques et géométriques.

1.2.4 En algèbre

Formule du binôme :

La formule du binôme de Newton est une formule qui donne la forme développée de $(a+b)^n$, pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Lorsque l'on développe ce produit, on doit choisir à chacun des n facteurs l'un des deux termes a ou b. Chacun des termes obtenu est alors de la forme $a^k b^{n-k}$, avec $0 \leq k \leq n$. Chacun de ces termes apparaît autant de fois qu'il y a de façons de choisir les k facteurs où l'on choisit le terme a, soit $\binom{n}{k}$. Cela donne alors la formule :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Remarques

- ❖ C'est cette formule qui induit le nom de coefficients binomiaux pour les coefficients $\binom{n}{k}$.
- ❖ Cette formule a un lien très étroit avec la loi binomiale : c'est cette formule qui justifie que la somme des $\mathbb{P}(X = k)$ vaut 1. C'est aussi ce qui explique son nom.
- ❖ En appliquant cette formule à $a = b = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

ce qui traduit qu'un ensemble à n éléments possède 2^n parties (ce que l'on peut montrer par le principe multiplicatif d'ailleurs).

Formule de Vandermonde :

Une autre formule sur les coefficients binomiaux est celle de Vandermonde : pour tous $a, b, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

Il est possible de démontrer algébriquement cette formule, mais un argument combinatoire est bien plus rapide. On considère un ensemble E à $a+b$ éléments que l'on partage en l'union d'un ensemble F à a éléments et un ensemble G à b éléments. Chaque partie de E à n éléments est formée de la réunion d'une partie de F à $k \in \{0, \dots, n\}$ éléments et d'une partie de G à $n-k$ éléments. Pour chaque $0 \leq k \leq n$, cela fait $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ couples de parties par le principe multiplicatif, d'où le résultat.

Nombre de diviseurs :

On considère un entier $N \geq 2$ que l'on décompose en produit de nombres premiers sous la forme $N = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\alpha_k}$, où $p_1, \dots, p_s$ sont deux à deux distincts. Alors $d \in \mathbb{N}^*$ est un diviseur de N si, et seulement si, il s'écrit $d = \prod_{k=1}^{s} p_k^{\beta_k}$, avec pour tout $1 \leq k \leq s$, $0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$. Cela laisse $\alpha_k + 1$ choix pour chaque exposant β_k, soit $\prod_{k=1}^{s}(\alpha_k + 1)$ au total, par principe multiplicatif.

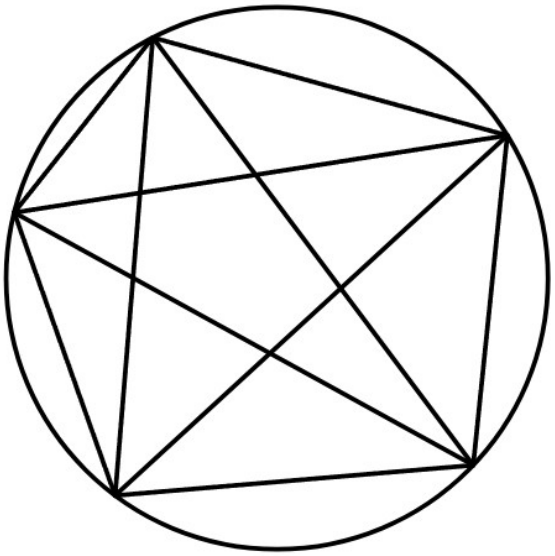
1.2.5 En géométrie

Nombre de triangles :

On trace n droites dans le plan, et on s'intéresse au nombre maximal de triangles que l'on peut former. Si l'on fait en sorte qu'il n'existe pas de droites parallèles ou concourantes, chaque triplet de droites non ordonné donne un triangle unique, ce qui fait $\binom{n}{3}$ triangles.

Partage d'un disque :

On considère un cercle et n points distincts sur celui-ci. En traçant toutes les cordes possibles, en combien de parties au maximum partage-t-on le disque ? Une expérimentation sur des petites valeurs amène à la suite 1, 2, 4, 8, 16, mais celle-ci ne se poursuit pas par 32, mais 31 ! On va montrer comment on obtient ce résultat, et pourquoi les puissances de 2 apparaissent.



En plaçant n points sur ce cercle, on peut tracer $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ cordes. Le maximum de régions est obtenu lorsque ces cordes ne sont jamais parallèles ou concourantes. Dans ce cas, chaque point d'intersection peut être associé au choix de 4 points parmi les n, ce qui donne $\binom{n}{4}$ point d'intersections.

Pour dénombrer le nombre de parties que cela forme, on va utiliser la théorie des graphes. On prend pour sommets du graphe les points d'intersections dénombrés précédemment et les n points situés sur le cercle, et pour arêtes les cordes, parties de cordes, ou arc de cercle les reliant. On va alors chercher à dénombrer le nombre de régions que forme ce graphe.

Celui-ci est nécessairement planaire, par définition de ses sommets. Il compte $n + \binom{n}{4}$ sommets. Il reste à dénombrer le nombre d'arêtes, qui n'est pas simplement le nombre de cordes. Pour cela, on remarque que dès que deux cordes ou parties de cordes se croisent, cela forme, en plus des arêtes déjà comptées, 2 arêtes de plus. Pour chacun des $\binom{n}{4}$ points d'intersection, on rajoute donc 2 arêtes, au nombre total de cordes, soit $2\binom{n}{4}$. À cela s'ajoutent les n arcs de cercles reliant les n points du disque, ce qui donne un total de $n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}$ arêtes.

On utilise à présent la formule d'Euler sur les graphes planaires,à savoir : $S - A + R = 2$, où S est le nombre de sommets, A d'arêtes, et R de régions. On en déduit que le nombre de régions que délimite ce graphe est :

$$R = 2 + n + \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} - \left(n + \binom{n}{4}\right) = 2 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

Cela compte également la région à l'extérieur du disque, si bien que le nombre de parties du disque est

$$P(n) = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$$

Expliquons maintenant d'où viennent les puissances de 2. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. D'après la formule de Pascal, on a également pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. Pour tout $n \geq 2$, on a alors

$$P(n) = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{4}$$

Comme pour $k < n$, $\binom{k}{n} = 0$, pour $n \leq 5$, $P(n)$ est la somme de tous les coefficients binomiaux $\binom{n-1}{i}$, ce qui donne 2^{n-1}. Pour $n = 6$, il manque le dernier coefficient $\binom{5}{5} = 1$, d'où $P(6) = 31$ et non $32 = 2^5$! Cela explique que ces puissances de 2 ne sont pas une coïncidence, et que le 31 a bien un lien avec 32.

D'ailleurs, en l'appliquant avec $n = 10$, on obtient

$$P(10) = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4}$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, on a

$$P(10) = \binom{9}{9} + \binom{9}{8} + \binom{9}{7} + \binom{9}{6} + \binom{9}{5}$$

Ainsi, $2P(10) = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} = 2^9$, donc $P(10) = 2^8$: on retrouve encore une puissance de 2, mais cette fois parce que l'on a additionné la moitié des coefficients binomiaux $\binom{n-1}{i}$.

2 Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle

- **Niveau :** cycle 4, Seconde générale
- **Pré-requis :** théorie des ensembles, notion de fonction, dénombrement

2.1 Expérience aléatoire et évènements

2.1.1 Expérience aléatoire

Définition On dit qu'une expérience est aléatoire lorsque son résultat ne peut pas être prévu à l'avance. Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire donnée est appelé issue de l'expérience.

Définition On note Ω, et on appelle univers, l'ensemble de toutes les issues possibles à une expérience aléatoire donnée.

Remarque Pour une même expérience aléatoire, on peut choisir plusieurs univers, en fonction des issues que l'on choisit d'observer. C'est donc un choix de modélisation.
On considère par exemple l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés à six faces usuels. On s'intéresse alors à la somme des deux nombres sur les faces de chaque dés. On peut considérer comme issue la somme obtenue, auquel cas $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, ou bien le couple formé par les deux nombres obtenus, auquel cas $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.

2.1.2 Évènements, vocabulaire

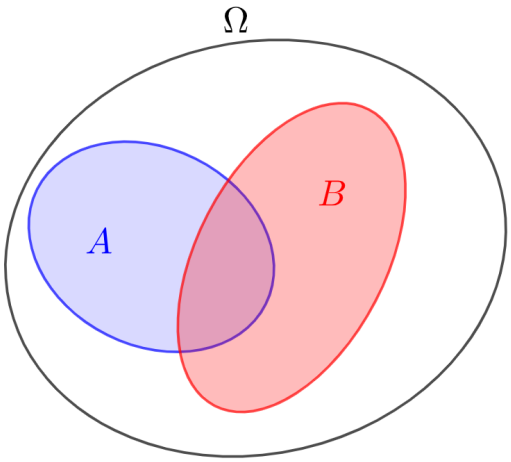
On considère à présent une expérience aléatoire et un univers Ω associé.

Définition On appelle évènement associé à une expérience aléatoire toute partie de l'univers Ω. Il s'agit donc d'un ensemble d'une ou plusieurs issues de l'expérience.

Définition Soient A et B deux évènements.

- On appelle évènement élémentaire tout évènement constitué d'une seule issue.
- L'évènement $A \cap B$, appelé "A et B", est l'évènement constitué des issues communes à A et B.
- L'évènement $A \cup B$, appelé "A ou B", est l'évènement constitué de toutes les issues de A et de B.
- On dit que A et B sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$
- On dit que A et B sont des évènements contraires si $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$, ie si B est le complémentaire de A dans Ω.

On représente fréquemment des évènements par des "patates", puisqu'il s'agit d'ensembles.



2.2 Probabilité

2.2.1 Loi de probabilité

Définition On appelle loi de probabilité sur Ω toute fonction $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \in [0,1]$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Pour tous évènements $A_1, \dots, A_n$ deux à deux incompatibles, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Pour un évènement A, $\mathbb{P}(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A. Pour un singleton $\{\omega\}$, on note souvent, par abus, $\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}\Big(\{\omega\}\Big)$.

Pour un évènement A, le réel $\mathbb{P}(A)$ indique si l'évènement a plus ou moins de chance de se produire lors de l'expérience aléatoire : plus il est proche de 1, plus l'évènement aura tendance à se produire, et plus il est proche de 0, moins il aura tendance à se produire.

A priori, pour une même expérience aléatoire, plusieurs lois de probabilité peuvent convenir. Il s'agit, tout comme pour Ω, d'un choix de modélisation.

Définition Soit A un évènement. Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que l'évènement A est certain, et si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que l'évènement est impossible.

Si l'on considère la représentation des évènements par des "patates", alors la probabilité d'un évènement peut être interprétée comme l'aire de la "patate" représentant cet évènement, en considérant l'aire totale comme étant égale à 1. Les propriétés de $\mathbb{P}$ se traduisent également dans ce registre.

2.2.2 Propriétés

Proposition Soient A et B deux évènements. Alors

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
2. $\mathbb{P}\Big(\overline{A}\Big) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3. si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$

Démonstration

1. *On a* $\varnothing \cup \Omega = \Omega$, *et* $\varnothing \cap \Omega = \varnothing$, *donc* $\mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\varnothing \cup \Omega) = \mathbb{P}(\Omega)$. *Ainsi,* $\mathbb{P}(\varnothing) + 1 = 1$, *donc* $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

2. *On a* $A \cup \overline{A} = \Omega$, *et* $A \cap \overline{A} = \varnothing$, *donc* $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, *d'où* $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

3. *Supposons que* $A \subset B$. *On a alors* $B = A \cup (B \setminus A)$, *et l'union est disjointe. Ainsi,* $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$, *car* $\mathbb{P}$ *est à valeurs dans* $[0, 1]$.

◈

Remarque La deuxième propriété est souvent utilisée pour calculer la probabilité d'un évènement de la forme "au moins un ...", comme par exemple "obtenir au moins un 6", en lançant plusieurs fois un dés.

Proposition (Formule de Poincaré) Soient A et B deux évènements. Alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Démonstration *On remarque que* $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, *et que l'union est disjointe. Ainsi*

$$\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$$

Or, $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ *et l'union est disjointe, donc* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(A \cap B)$. *De même,* $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B)$, *d'où :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

ce qui prouve le résultat. ◈

Remarque Il est possible de généraliser cette formule à une union de $n \geq 2$ évènements $A_1, \ldots, A_n$, qui porte alors également le nom de formule du crible. La voici à titre indicatif :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \right)$$

Elle se démontre par récurrence sur n, en utilisant la formule pour $n = 2$.

2.2.3 Équiprobabilité

Définition Si l'univers Ω est fini, on dit que l'on est dans une situation d'équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

Proposition Dans une situation d'équiprobabilité, pour tout $\omega \in \Omega$ on a

$$\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$$

Démonstration *On suppose qu'il y a équiprobabilité. Alors, tous les évènements* $\{\omega\}$, *pour* $\omega \in \Omega$, *ont la même probabilité. Notons* p *cette probabilité. On a alors :*

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p = p|\Omega|$$

car l'union est disjointe, d'où pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\omega) = p = \frac{1}{|\Omega|}$. ◈

Proposition Dans une situation d'équiprobabilité, pour tout évènement A, on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Démonstration *On suppose qu'il y a équiprobabilité, et on considère un évènement A. Alors, d'après la proposition précédente, pour tout $a \in A$, $\mathbb{P}(a) = \frac{1}{|\Omega|}$. Ainsi*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{a\in A}\{a\}\right) = \sum_{a\in A}\mathbb{P}(a) = \sum_{a\in A}\frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

car l'union est disjointe. ◈

2.2.4 Indépendance

Définition Soient A et B deux évènements. On dit que A et B sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$$

Remarques
- ❖ On donnera un peu plus loin une seconde caractérisation de l'indépendance d'évènements, qui justifie cette appellation.
- ❖ Au lycée, l'indépendance d'évènement est un choix de modélisation. On modélise une situation par deux évènements indépendants lorsque l'occurrence de l'un des deux n'affecte pas la probabilité qu'a le second de se produire. Cette définition sert alors comme une propriété.

2.3 Expérience aléatoire à deux épreuves

Définition On dit qu'une expérience aléatoire est à deux épreuves lorsque elle se compose de deux épreuves (successives ou simultanées), et que l'on observe les résultat de chacune de ces épreuves.

2.3.1 Probabilité conditionnelle

Définition Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B)\neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, ou plus laconiquement probabilité de A sachant B, et on note $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$, le réel

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Ce réel $\mathbb{P}_B(A)$ représente la probabilité que l'évènement A se produise, sachant que l'évènement B s'est déjà produit.

Remarque On remarque que lorsque $\mathbb{P}(B)\neq 0$, A et B sont indépendants si, et seulement si, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$. Autrement dit, A et B sont indépendants si, et seulement si, A a la même probabilité de se produire, indépendamment de si B se produit ou non. Cela justifie cette appellation d'évènements indépendants.

Proposition Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B)\neq 0$. Alors l'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega)\to\mathbb{R}$, $A\mapsto\mathbb{P}_B(A)$ est une loi de probabilité sur Ω.

Démonstration
- ❖ *Soit A un évènement. On a clairement $\mathbb{P}_B(A)\geq 0$. De plus, $A\cap B\subset B$, donc $\mathbb{P}(A\cap B)\leq\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)\leq 1$. Ainsi, $\mathbb{P}_B(A)\in[0,1]$.*
- ❖ *On a*

$$\mathbb{P}_B(\Omega) = \frac{\mathbb{P}(\Omega\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

car $B\subset\Omega$.

❖ *Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements deux à deux incompatibles. Alors :*

$$\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

car l'union est disjointe. Ainsi

$$\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{\mathbb{P}\Big(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B\Big)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_B(A_i)$$

◈

Proposition (Formule des probabilités composées) Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_2 \cap A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n|A_{n-1} \cap \dots \cap A_1)$$

En particulier, pour deux évènements A et B tels que $\mathbb{P}(A \cap B) \neq 0$, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \times \mathbb{P}(A)$.

Démonstration

On commence par remarquer que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on a $A_k \cap \dots \cap A_1 \subset A_n \cap \dots \cap A_1$, donc $\mathbb{P}(A_k \cap \dots \cap A_1) \geq \mathbb{P}(A_n \cap \dots \cap A_1) > 0$.

On procède par récurrence sur n.

❖ *Pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Pour $n = 2$, il s'agit d'un cas particulier, qui est une conséquence immédiate de la définition des probabilités conditionnelles.*

❖ *Soit $2 \leq k < n$ un entier quelconque et fixé. Supposons que*

$$\mathbb{P}(A_k \cap \dots \cap A_1) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_k|A_{k-1} \cap \dots \cap A_1)$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{k+1} \cap \dots \cap A_1) &= \mathbb{P}\Big(A_{k+1} \cap (A_k \cap \dots \cap A_1)\Big) \\
&= \mathbb{P}(A_{k+1}|A_k \cap \dots \cap A_1) \times \mathbb{P}(A_k \cap \dots \cap A_1) \quad \textit{car } \mathbb{P}(A_k \cap \dots \cap A_1) \neq 0 \\
&= \mathbb{P}(A_{k+1}|A_k \cap \dots \cap A_1) \times \mathbb{P}(A_k|A_{k-1} \cap \dots \cap A_1) \times \dots \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_1)
\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. La propriété est donc héréditaire

❖ *La propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$, et est héréditaire pour $2 \leq k < n$, donc par le principe de récurrence elle est vraie pour tout $1 \leq k \leq n$. Elle est en particulier vraie au rang n, ce que l'on voulait démontrer.*

◈

Définition Des évènements $A_1, \dots, A_n$ forment un système complet d'évènements s'ils forment une partition de Ω, ie s'ils sont deux à deux incompatibles et si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

Proposition (Formule des probabilités totales) Soit $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'évènements, tous de probabilité non nulle. Alors pour tout évènement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)$$

Démonstration

Soit B un évènement. On remarque que comme les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, il en est de même des évènements $A_1 \cap B, \dots, A_n \cap B$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap \Omega) \quad \textit{car } B \subset \Omega \\
&= \mathbb{P}\left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) \quad \textit{par hypothèse} \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) \quad \textit{car l'union est disjointe}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}$$

car les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont tous de probabilité non nulle.

◈

Proposition (Formule de Bayes) Soit $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'évènements, tous de probabilité non nulle, et soit A un évènement de probabilité non nulle. Alors pour tout $1 \leq k \leq n$

$$\mathbb{P}_A(A_k) = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(A)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(A)\mathbb{P}(A_i)}$$

En particulier, pour deux évènements A et B tels que A, B et $\overline{B}$ sont de probabilité non nulle, on a

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})}$$

Démonstration

Soit $1 \leq k \leq n$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_A(A_k) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap A_k)}{\mathbb{P}(A)} \quad \textit{car } \mathbb{P}(A) \neq 0 \\
&= \frac{\mathbb{P}_{A_k}(A)\mathbb{P}(A_k)}{\mathbb{P}(A)} \quad \textit{car } \mathbb{P}(A_k) \neq 0
\end{aligned}$$

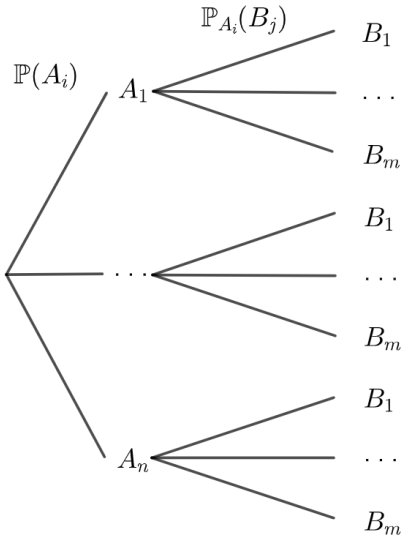
$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(A)\mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{A_i}(A)\mathbb{P}(A_i)}} \quad \textit{par la formule des probabilités totales}$$

◈

2.3.2 Arbre de probabilité

Il est très courant de représenter des expériences aléatoires à deux épreuves par des arbres de probabilités.

On considère une expérience aléatoire à deux épreuves, et l'on note $A_1, \dots, A_n$ un système complet d'évènements de la première épreuve, et $B_1, \dots, B_m$ un système complet d'évènements de le seconde épreuve.



On fait figurer sur les premières branches les probabilités $\mathbb{P}(A_i)$ et sur les secondes les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{A_i}(B_j)$.

- La formule des probabilités composées assure que l'on peut calculer les probabilités $\mathbb{P}(A_i \cap B_j)$ en multipliant les probabilités des branches qui mènent à A_i puis à B_j. Elle assure également que ce résultat reste vrai avec plus de deux épreuves.

- La formule des probabilités totales permet de calculer les probabilités $\mathbb{P}(B_j)$. Pour cela, on calcule les probabilités des $\mathbb{P}(A_i \cap B_j)$ en suivant les chemins qui mènent à B_j, puis on additionne ces probabilités.

- La formule de Bayes permet d'inverser un arbre de probabilité, ie faire figurer les évènements B_j sur les premières branches et les A_i sur les secondes. On commence par calculer les $\mathbb{P}(B_j)$ par la formule des probabilités totales, puis on calcule les $\mathbb{P}_{B_j}(A_i)$ avec la formule de Bayes, qui sont alors les probabilités sur les secondes branches.

3 Variables aléatoires discrètes

- **Niveau :** Première spécialité, Terminale spécialité, Terminale complémentaire
- **Pré-requis :** théorie des ensembles, expérience aléatoire, loi de probabilité, dénombrement, fonction exponentielle

3.1 Variables aléatoires discrètes

Dans toute cette leçon, on considère un univers Ω, et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω.

3.1.1 Définitions

Définition On appelle variable aléatoire réelle toute fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On les note régulièrement, X, Y, ...

Remarque Au lycée, on ne s'intéresse qu'aux variables aléatoires réelles. Par abus de langage, on parlera souvent plus simplement de variable aléatoire.

Définition Une variable aléatoire X est dite discrète lorsque $X(\Omega)$, ie l'ensemble des valeurs que peut prendre cette variable, est $\mathbb{N}$, ou une partie de $\mathbb{N}$.

Définition Soit $A \subset X(\Omega)$. L'évènement $\{X \in A\}$ est le sous-ensemble de Ω

$$\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}$$

Ce type d'évènement est appelé évènement généré par la variable aléatoire X.
Pour $a \in \mathbb{R}$, on notera $\{X \in \{a\}\} = \{X = a\}$

3.1.2 Loi de probabilité

Définition Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire X la fonction définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à toute partie A de $X(\Omega)$ associe $\mathbb{P}(\{X \in A\})$.
Pour simplifier, on note $\mathbb{P}(\{X \in A\}) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Proposition (partiellement admise) Soit X une variable aléatoire discrète. Alors pour tout $A \subset X(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a)$$

Démonstration

Soit $A \subset X(\Omega)$. On a $A = \bigcup_{a\in A} \{a\}$. On en déduit que

$$\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\} = \bigcup_{a\in A} \{\omega \in \Omega, X(\omega) = a\} = \bigcup_{a\in A} \{X = a\}$$

Comme tout élément ω de Ω n'a qu'une seule image par la fonction X, cette union est disjointe. Ainsi

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a\in A} \mathbb{P}(X = a)$$

◈

Remarque Cette proposition est partiellement admise en raison de la propriété de σ-additivité de la loi $\mathbb{P}$. Au lycée, la définition de loi de probabilité restreint cette propriété à des unions disjointes finies, alors qu'ici elles peuvent être infinies, si A l'est. Toutefois, cette propriété reste vraie lorsque A est dénombrable, ce qui est le cas ici car A est une partie de $\mathbb{N}$.

Ainsi, pour connaître toutes les probabilités $\mathbb{P}(X \in A)$, il suffit de connaître les probabilités $\mathbb{P}(X = a)$ pour tout $a \in X(\Omega)$. C'est une particularité des variables aléatoires discrètes.

Donner la loi d'une variable aléatoire discrète revient donc à donner l'ensemble $X(\Omega)$, ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(X = a)$ pour tout $a \in X(\Omega)$.

3.1.3 Indépendance

Définition Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont indépendantes si pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B)$$

Remarque Au lycée, l'indépendance de deux variables aléatoires résulte souvent d'un choix de modélisation. Dans ce cas, la définition précédente sert de propriété.

Définition Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. On dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour tous $A_1 \in X_1(\Omega), \dots, A_n \in X_n(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \mathbb{P}(X_2 \in A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

Remarque Si des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes. Cependant, la réciproque est fausse.

3.2 Espérance, variance et écart-type

3.2.1 Espérance

Définition Soit X une variable aléatoire discrète. X admet une espérance si la quantité $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$ est finie. Dans ce cas, l'espérance de X est le réel

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega)$$

Remarque Certaines variables aléatoires discrètes n'admettent pas d'espérance, car la somme ci-dessus est infinie. Voici un exemple. On considère une particule qui se déplace sur $\mathbb{N}$ (donc sur une demi-droite graduée par les entiers naturels). Elle part de 1 et à chaque étape, elle se déplace d'une unité vers la gauche (si elle le peut) ou d'une unité vers la droite de manière équiprobable. Si on considère X le temps que met la particule à revenir à 0, on peut montrer que X n'admet pas d'espérance.

Proposition Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

Démonstration

On part de la somme qui définit l'espérance, et on somme par paquets :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) = x} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) = x} x\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) = x} \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\omega \in \{X = x\}} \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in \Omega} x\mathbb{P}(X = x) \quad \textit{car } X \textit{ est discrète}
\end{aligned}$$

◈

Remarques

- ❖ Cette formule permet d'interpréter l'espérance comme une moyenne théorique de la valeur que va prendre la variable X en effectuant l'expérience aléatoire. On verra un peu plus loin un autre résultat qui justifie cette interprétation.
- ❖ Cette formule, par rapport à la définition, fait apparaître une somme sur $X(\Omega)$, et non sur Ω. Il n'est alors pas nécessaire de savoir sur quel univers on se place, il suffit de connaître la loi de X pour calculer son espérance.

Proposition Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance, et soient a et b deux réels. Alors $aX + bY$ admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

On dit que l'espérance est linéaire.

Démonstration

On admet que $aX + bY$ admet une espérance (cela résulte de propriété sur les sommes qui ne sont pas étudiées au lycée). On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX + bY) &= \sum_{\omega \in \Omega} (aX + bY)(\omega)\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} (aX(\omega) + bY(\omega))\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} (aX(\omega)\mathbb{P}(\omega) + bY(\omega)\mathbb{P}(\omega)) \\
&= a\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) + b\sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\omega) \\
&= a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

◈

Proposition Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, admettant une espérance. Alors

- si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$
- si $X \geq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$

Démonstration

On suppose que $X \geq 0$, ie que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$. Comme pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\mathbb{P}(\omega) \geq 0$, alors $X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \geq 0$, donc

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega) \geq 0$$

Si $X \geq Y$, alors $X - Y \geq 0$, donc $\mathbb{E}(X-Y) \geq 0$, d'où par linéarité, $\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) \geq 0$ et $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

◈

Théorème (Théorème de transfert discret) Soient X une variable aléatoire discrète admettant une espérance et f une fonction réelle à variable réelle. Alors la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance, et

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

Démonstration

On admet que $f(X)$ est une variable aléatoire discrète admettant une espérance. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X)) &= \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega))\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) = x} f(X(\omega))\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) = x} f(x)\mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) = x} \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \sum_{\omega \in \{X = x\}} \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{x \in \Omega} f(x)\mathbb{P}(X = x) \quad \textit{car } X \textit{ est discrète}
\end{aligned}$$

◈

3.2.2 Variance et écart-type

Définition Soit X une variable aléatoire discrète. On dit que X admet une variance si elle admet une espérance, et si $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admet une espérance. Dans ce cas, la variance de X est le réel

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

Remarque Lorsqu'elle existe, la variance de X s'interprète comme une moyenne des carrés des écarts à la moyenne. En ce sens, elle est donc un indicateur de dispersion. Nous verrons un peu plus loin un second résultat qui renforce cette interprétation.

Proposition (Formule de König-Huygens) Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance. Alors X admet une variance si, et seulement si, X^2 admet une espérance. On a alors

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration

On admet l'équivalence dans la proposition. Commençons par montrer un résultat auxiliaire : si une variable aléatoire discrète est constante, alors elle admet un espérance, qui est cette constante. Soit Y un variable aléatoire constante, égale à un entier naturel a. Alors Y est discrète, puisque $Y(\Omega) = \{a\}$. On a alors

$$\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} a\mathbb{P}(\omega) = a\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega) = a\mathbb{P}(\Omega) = a$$

car Y est discrète.

On a maintenant

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)\\
&= \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2)\\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \quad \textit{par linéarité}\\
&= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 \quad \textit{car } \mathbb{E}(X)^2 \textit{ est constante}\\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2
\end{aligned}$$

◈

Proposition Soient X une variable aléatoire discrète admettant une variance, et a, b deux réels. Alors $aX+b$ admet une variance, et

$$\mathbb{V}(aX+b) = a^2V(X)$$

De plus, $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

Démonstration

On admet que $aX+b$ admet une variance. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(aX+b) &= \mathbb{E}((aX+b)^2) - \mathbb{E}(aX+b)^2\\
&= \mathbb{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - \mathbb{E}(aX+b)^2\\
&= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(b^2) - (a\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(b))^2 \quad \textit{par linéarité de l'espérance}\\
&= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - (a\mathbb{E}(X) + b)^2 \quad \textit{car } b \textit{ et } b^2 \textit{ sont des constantes}\\
&= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2\\
&= a^2(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2)\\
&= a^2\mathbb{V}(X)
\end{aligned}$$

D'autre part, comme $(X-\mathbb{E}(X))^2 \geq 0$, on a $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

◈

Remarque La variance n'est pas linéaire. En particulier, en général, on a pas $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soient X une variable aléatoire discrète admettant une variance, et soit $a > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{X}(\omega)$, comme $a > 0$, on a

$$|x - \mathbb{E}(X)| \geq a \Leftrightarrow (x - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \quad \textit{par le théorème de transfert} \\
&= \sum_{x \in X(\Omega), (x-\mathbb{E}(X))^2 \geq a^2} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) + \sum_{x \in X(\Omega), (x-\mathbb{E}(X))^2 < a^2} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \\
&\geq \sum_{x \in X(\Omega), (x-\mathbb{E}(X))^2 \geq a^2} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \quad \textit{car pour tout } x \in X(\Omega),\ (x - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0 \\
&\geq \sum_{x \in X(\Omega), (x-\mathbb{E}(X))^2 \geq a^2} a^2 \cdot \mathbb{P}(X = x) \quad \textit{au vu des } x \textit{ sur lesquels on somme} \\
&\geq a^2 \sum_{x \in X(\Omega), (x-\mathbb{E}(X))^2 \geq a^2} \mathbb{P}(X = x) \\
&\geq a^2 \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2) \quad \textit{car } X \textit{ est discrète} \\
&\geq a^2 \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \quad \textit{d'après la remarque précédente}
\end{aligned}$$

Comme $a^2 > 0$, on en déduit l'inégalité souhaitée.

◈

Remarque Cette inégalité renforce l'interprétation de la variance comme un indicateur de dispersion. En effet, pour un écart $a > 0$ à la moyenne donné, plus la variance est faible, plus la probabilité que X prenne des valeurs éloignées de son espérance est faible.

Définition Soit X une variable aléatoire discrète admettant une variance. L'écart-type de X est le réel positif

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarque Tout comme la variance, l'écart-type est un indicateur de dispersion de la variable X. Cependant, il est homogène à la variable, ce qui lui donne un sens concret, alors que la variance ne l'est pas.

3.3 Somme de variables aléatoires

Définition Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires. On définit $X_1 + \ldots + X_n$ comme étant la variable aléatoire qui à $\omega \in \Omega$ associe $X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)$.

Proposition La somme de variables aléatoires discrètes est une variable aléatoire discrète.

Démonstration

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. Comme $\mathbb{N}$ est stable par addition, pour tout $\omega \in \Omega$, $X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega) \in \mathbb{N}$. La variable $X_1 + \ldots + X_n$ est donc discrète.

◈

Proposition Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes admettant des espérances. Alors leur somme admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n)$$

Démonstration

On a déjà vu que ceci est vrai pour deux variables aléatoires discrètes. Par associativité de la somme, un raisonnement par récurrence trivial permet de démontrer la propriété dans le cas général.

◈

Proposition Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires discrètes deux à deux indépendantes et admettant des variances. Alors $X_1 + \ldots + X_n$ admet une variance, et

$$\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n)$$

On pourra admettre la preuve de cette proposition au lycée. Elle est donnée ici à titre indicatif.

Démonstration

On commence par montrer un lemme : si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$ existent, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. On ne montre ce résultat que dans le cas où $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, mais il reste vrai s'ils sont infinis dénombrables.

Soient alors X et Y deux telles variables. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{z \in (XY)(\Omega)} z\mathbb{P}(XY = z) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \quad \textit{par indépendance} \\
&= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \right) \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y) \right) \quad \textit{car les sommes sont finies} \\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

On introduit maintenant la covariance de deux variables aléatoires X et Y comme étant la quantité (quand elle existe) :

$$\textit{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\Big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\Big)$$

On remarque alors que la covariance est bilinéaire symétrique et que $\mathbb{V}(X) = \textit{cov}(X, X)$, $\mathbb{V}(Y) = \textit{cov}(Y, Y)$. De plus, on montre de la même façon que l'on montre la formule de König-Huygens que

$$\textit{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

En particulier, si X et Y sont indépendantes, on a $\textit{cov}(X, Y) = 0$.

On remarque à présent que sous les hypothèses de la proposition

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) &= \textit{cov}(X_1 + \ldots + X_n, X_1 + \ldots + X_n) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \textit{cov}(X_i, X_j) \quad \textit{par bilinéarité} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \textit{cov}(X_i, X_j) \quad \textit{par symétrie}
\end{aligned}$$

Comme $X_1, \ldots, X_n$ sont deux à deux indépendantes, on a pour tous $1 \leq i < j \leq n$, $\textit{cov}(X_i, X_j) = 0$, d'où

$$\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n)$$

◈

Définition Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle échantillon de taille n de X la donnée de n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \ldots, X_n$, de même loi que X.

Proposition Soient X une variable aléatoire discrète admettant une variance, et $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon de X. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ et $M_n = \frac{S_n}{n}$. Alors

- $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(S_n) = n\mathbb{V}(X)$
- $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(M_n) = \frac{\mathbb{V}(X)}{n}$

Démonstration

Ces propriétés résultent directement de celles démontrées plus haut sur l'espérance et la variance d'une somme de variables aléatoires.

◈

Théorème (Loi faible des grands nombres) Soient X une variable aléatoire discrète admettant une espérance, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_k$ soit un échantillon de X. Alors pour tout $a > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq a) = 0$$

Démonstration

On admet le théorème dans le cas général. On donne une démonstration dans le cas où X admet également une variance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit a>0. Dans ce cas, M_n admet également une variance. Ainsi, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(M_n)}{a^2}$$

Or, d'après la proposition précédente, sous les hypothèses du théorème, on a $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(M_n) = \frac{\mathbb{V}(X)}{n}$, d'où

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{na^2}$$

Comme $\frac{\mathbb{V}(X)}{na^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq a) \geq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq a) = 0$$

◈

Remarques

- La variable aléatoire M_n est une moyenne empirique sur l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$. Ainsi, ce théorème énonce que la moyenne empirique converge, en un sens, vers l'espérance. Cela renforce l'interprétation de l'espérance comme moyenne théorique.
- Cette loi énonce une forme de convergence entre des variables aléatoires. Il existe une seconde loi des grands nombres, dite loi forte, qui énonce une autre forme de convergence (convergence presque-sure), plus forte que celle présentée ici (convergence en probabilité).

Cette loi justifie l'approche fréquentiste des probabilités. Cette approche consiste à approximer une probabilité par une fréquence, avec un grand effectif. En interprétant cette probabilité et cette fréquence comme l'espérance et la moyenne empirique d'une variable de Bernouilli (que nous étudierons un peu plus loin), cette loi justifie que la fréquence approxime effectivement la probabilité.

3.4 Lois discrètes usuelles

3.4.1 Loi de Bernouilli

Définition Une variable aléatoire X suit la loi de Bernouilli de paramètre $p \in [0,1]$ si

$$X(\Omega) = \{0,1\} \quad \mathbb{P}(X=1) = p \text{ et } \mathbb{P}(X=0) = 1-p$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

On appelle expérience de Bernouilli toute expérience à deux issues. L'une est appelée succès, et l'autre échec. La variable aléatoire qui vaut 1 si l'issue est un succès et 0 si l'issue est un échec suit alors une loi de Bernouilli. On parle alors de variable de Bernouilli.

Proposition Soit $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \mathbb{V}(X) = p(1-p)$$

Démonstration

$X(\Omega)$ est fini, donc X admet une espérance et une variance. On a

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) = 1^2 \times p + 0^2 \times (1-p) = p$$

donc

$$\mathbb{V}(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

◆

3.4.2 Loi binomiale

Définition Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si

$$X(\Omega) = \{0,\dots,n\} \quad \forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note alors $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Proposition Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernouilli de paramètre p. Alors $X = X_1 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Démonstration

Comme pour tout $1 \leq i \leq n$, $X_i(\Omega) = \{0,1\}$, on a $X(\Omega) = \{0,\dots,n\}$. Soit $k \in X(\Omega)$. $X = k$ si, et seulement si, parmi les X_i, k prennent la valeur 1 et $n-k$ prennent la valeur 0. Il y a donc autant d'issues qui réalisent $X = k$ qu'il y de façons de choisir k des X_i parmi les n, sans compter l'ordre. Il en existe donc $\binom{n}{k}$.

Chacune de ces issues se réalise lorsque k des X_i prennent la valeur 1 et $n-k$ la valeur 0. La probabilité qu'une de ces issues se produise est donc

$$\mathbb{P}(X_i=1)^k \mathbb{P}(X_i=0)^{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

◆

Lorsque l'on répète une expérience de Bernouilli plusieurs fois de manière indépendante, et que l'on s'intéresse au nombre de succès obtenus, la variable aléatoire qui compte ces succès suit donc une loi binomiale.

Remarque Par la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1$$

Proposition Soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

Démonstration

X est une somme de n variables de Bernouilli indépendantes, d'espérance p et de variance $p(1-p)$, d'où le résultat. ◈

3.4.3 Loi géométrique

Définition Une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0,1[$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$$

On note alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Lorsque l'on répète plusieurs fois une même expérience de Bernouilli de manière indépendante, la variable aléatoire représentant l'instant du premier succès suit une loi géométrique.

Remarque La preuve de $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(X=k) = 1$ fait intervenir une série géométrique, mais elle peut tout de même être abordée au lycée, en appui sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Proposition (admise) Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Cette proposition est admise car sa preuve fait intervenir des résultats sur les séries entières.

Proposition Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Soient $s,t \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\mathbb{P}_{(X>t)}(X > t+s) = \mathbb{P}(X > s)$$

On dit que la loi est sans mémoire.

Démonstration

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > k) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq k) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X = i) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1} \\
&= 1 - p\sum_{i=0}^{k-1} (1-p)^{i} \\
&= 1 - p\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \quad \textit{car } p \neq 1 \\
&= 1 - (1-(1-p)^k) \\
&= (1-p)^k
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X>t)}(X > t+s) &= \frac{\mathbb{P}((X > t+s) \cap (X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > t)} \quad \textit{car } \{X > t+s\} \subset \{X > t\} \\
&= \frac{(1-p)^{t+s}}{(1-p)^t} \\
&= (1-p)^s \\
&= \mathbb{P}(X > s)
\end{aligned}$$

◈

Ainsi, la probabilité d'obtenir un succès au bout de s tentatives ne dépend pas du temps t depuis lequel on réalise les expériences, ce qui justifie cette appellation de loi sans mémoire.

3.4.4 Loi de Poisson

Définition Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Remarque La preuve de $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k) = 1$ demande la formule $e^{\lambda} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!}$, qui n'est pas vu systématiquement au lycée. Cependant, elle peut faire l'objet d'un exercice.

Proposition (admise) Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors X admet une variance et une espérance, et

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \mathbb{V}(X) = \lambda$$

Tout comme pour la loi géométrique, cette preuve nécessite des arguments sur les séries entières.

Proposition Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Démonstration

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq k$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \frac{n \times \ldots \times (n-k+1)}{n^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \frac{n-1}{n} \times \ldots \times \frac{n-k+1}{n} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \exp\left((n-k)\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{\lambda(n-k)}{n} \frac{\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}{\frac{\lambda}{n}}\right)$$

Comme $\frac{\lambda}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors

$$\frac{\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}{\frac{\lambda}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$$

De plus, $\frac{\lambda(n-k)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$, si bien que

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(-\lambda)$$

D'autre part on a

$$\prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

◈

Ainsi, lorsqu'une variable aléatoire suit une loi binomiale avec un paramètre n grand et un paramètre p petit, on peut approximer sa loi par une loi de Poisson. C'est ce qui donne à cette loi le nom de loi des évènements rares.

4 Variables aléatoires réelles à densité

- **Niveau :** Terminale complémentaire
- **Pré-requis :** notion de fonction, intégrales, primitives, variables aléatoires, probabilités, intervalles de $\mathbb{R}$, limites de fonctions

4.1 Intégrale impropre

Nous allons commencer par donner quelques définitions sur les intégrales impropres. Bien que ce type d'intégrale ne soit pas étudiée au lycée, elles apparaissent lorsque l'on aborde les variables aléatoires à densité. C'est pour cela que nous donnons ici quelques définitions qui seront utiles par la suite.

La notion d'intégrale impropre consiste à étudier l'équivalent de l'intégrale de Riemann, mais sur tout type d'intervalles et pas seulement des segments.

Définition Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continue. On définit :

- Si $I = [a, b]$, avec $a < b$ deux réels
$$\int_I f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$
- Si $I = [a, +\infty[$ avec a un réel
$$\int_I f(t)dt = \int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$
si cette limite est finie.
- Si $I =]-\infty, b]$ avec b un réel
$$\int_I f(t)dt = \int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)dt$$
si cette limite est finie.
- Si $I = \mathbb{R}$
$$\int_I f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^{+\infty} f(t)dt$$
si les deux intégrales sont finies.

Comme on peut s'y attendre, ces quantités représentent l'aire sous la courbe représentative de f sur l'intervalle I.

4.2 Rappels sur les variables aléatoires réelles

Dans toute cette leçon, on se place dans un univers Ω.

Définition On appelle variable aléatoire réelle toute fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition Soit X une variable aléatoire réelle. La loi de probabilité de X est l'application qui à chaque partie A de $\mathbb{R}$ associe la probabilité :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}\right)$$

4.3 Variables aléatoires réelles à densité

4.3.1 Définitions et propriétés

Définition On appelle densité de probabilité sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ toute fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continue, positive sur I telle que $\int_I f(t)dt = 1$.

Remarque On verra au fur et à mesure de la leçon qu'une densité de probabilité joue un rôle analogue à l'application $k \mapsto \mathbb{P}(X = k)$ pour les variables aléatoires réelles discrètes. Ainsi, la condition $\int_I f(t)dt = 1$ est l'équivalent de $\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Définition Une variable aléatoire réelle X est dite à densité sur un intervalle I s'il existe une densité de probabilité f sur I telle que pour tout intervalle J inclus dans I :

$$\mathbb{P}(X \in J) = \int_J f(t)dt$$

La fonction f est alors appelée densité de X, et on dit que la loi de X est une loi à densité.

Proposition (admise) Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I. Alors l'application qui à tout intervalle J inclus dans I associe $\int_J f(t)dt$ est une loi de probabilité sur I, c'est-à-dire :

- Pour tout intervalle $J \subset I$, $\int_J f(t)dt \in [0, 1]$.
- $\int_I f(t)dt = 1$
- Pour tous intervalles $I_1, \ldots, I_n$ disjoints inclus dans J :

$$\int_{I_1 \cup \ldots \cup I_n} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{I_k} f(t)dt$$

Démonstration

- *Soit J un intervalle inclus dans I. Comme f est positive sur I (en tant que densité de probabilité), $\int_J f(t)dt \geq 0$. De plus, comme $J \subset I$ et f est positive sur I, on a*

$$\int_J f(t)dt \leq \int_I f(t)dt = 1$$

  Ainsi, $\int_J f(t)dt \in [0, 1]$.
- *Trivial, par définition d'une densité de probabilité.*
- *Si les intervalles I_k sont tous des segments, le résultat découle des propriétés de l'intégrale de Riemann. Si l'un des I_k n'est pas un segment, on admet la preuve (qui découle soit d'une définition, soit de la relation de Chasles généralisée aux intégrales impropres).*

◈

Proposition Soit X une variable aléatoire à densité. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Démonstration

On note f la densité de probabilité de X. Alors

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \in [x, x]) = \int_x^x f(t)dt = 0$$

◈

Remarques

- ❖ C'est une différence capitale avec les variables aléatoires discrètes. Cela implique que pour une variable aléatoire à densité X, on a pour tous a, b réels $\mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X < a)$, $\mathbb{P}(X \geq b) = \mathbb{P}(X > b)$, ... Les inégalités peuvent être strictes ou larges, la probabilité reste inchangée.
- ❖ Cela implique également qu'une variable aléatoire ne peut pas être à la fois discrète et à densité. En effet, si c'était le cas il existerait un $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X = x) = 0$ et $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Attention, une variable aléatoire n'est cependant pas nécessairement discrète ou à densité.

Définition Soit X une variable aléatoire à densité sur un intervalle I. On note $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ la borne inférieure de I. La fonction de répartition de X est la fonction F définie par

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_b^x f(t)dt$$

Proposition (admise) Soit X une variable aléatoire à densité sur un intervalle I. Alors sa fonction de répartition F vérifie :

- ❖ F vaut 0 en la borne inférieure de I et 1 en la borne supérieure de I.
- ❖ Pour tous réels x et y tels que $x \leq y$, $\mathbb{P}(x \leq X \leq y) = F(y) - F(x)$.
- ❖ F est croissante sur I.

Démonstration

On note f la densité de probabilité de X, a la borne inférieure de I et b sa borne supérieure.

- ❖ *Si a est un réel, on a $F(a) = \mathbb{P}(X \leq a) = \mathbb{P}(X = a) = 0$, car a est le seul réel de I susceptible d'être inférieur ou égal à a (en tant que borne inférieure). De même si b est un réel, on a $F(b) = \mathbb{P}(X \leq b) = \mathbb{P}(X \in I) = 1$, car tout réel de I est inférieur ou égal à b (en tant que borne supérieure). Si $a = -\infty$, ou $b = +\infty$, on admet le résultat.*
- ❖ *Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$. On a*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq y) &= \mathbb{P}\Big((X \leq x) \cup (x < X \leq y)\Big) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(x < X \leq y) \quad \textit{car l'union est disjointe} \\ &= \mathbb{P}(X \leq x) + \mathbb{P}(x \leq X \leq y) \quad \textit{car } X \textit{ est à densité}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbb{P}(x \leq X \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y) - \mathbb{P}(X \leq x) = F(y) - F(x)}$$

- ❖ *D'après le point précédent, pour tous réels x et y tels que $x \leq y$, on a*

$$F(y) - F(x) = \mathbb{P}(x \leq X \leq y) \geq 0$$

donc $F(y) \geq F(x)$, et F est croissante.

◈

Proposition La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité caractérise sa loi, c'est-à-dire que deux variables aléatoires réelles à densité de même fonctions de répartition ont même loi.

Démonstration

Soit J un intervalle inclus dans l'intervalle I sur lequel est défini la fonction de répartition.

- *Si J est de la forme $[a,b]$, on vient de voir que $\mathbb{P}(X \in J) = F(b) - F(a)$.*
- *Si J est de la forme $]-\infty, b]$, on a $\mathbb{P}(X \in J) = \mathbb{P}(X \leq b) = F(b)$.*
- *Si J est de la forme $[a, +\infty[$, on a*
$$\mathbb{P}(X \in J) = \mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(X \in I) - \mathbb{P}(X < a) = 1 - F(a)$$
- *Si $J = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X \in J) = 1$.*

Dans tous les cas, si X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité de même fonction de répartition, on a $\mathbb{P}(X \in J) = \mathbb{P}(Y \in J)$, ce qui prouve qu'elles ont la même loi.

◈

4.3.2 Espérance

Définition Soit X une variable aléatoire réelle à densité. On dit que X admet une espérance si la quantité $\int_I tf(t)dt$ est finie. Dans ce cas, on définit l'espérance de X par
$$\mathbb{E}(X) = \int_I tf(t)dt$$

Remarque Pour les variables aléatoires réelles discrètes, on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)$. On retrouve l'analogie entre la densité f et l'application $k \mapsto \mathbb{P}(X = k)$.

Remarque Pour les variables aléatoires réelles à densité, il est possible que l'espérance n'existe pas. Par exemple, la loi de Cauchy de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, définie sur $\mathbb{R}$, n'admet pas d'espérance finie.

Proposition (admise) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité admettant une espérance, et soient a et b deux réels. Alors $\mathbb{E}(aX + bY)$ existe et
$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(y)$$
Autrement dit, l'espérance est linéaire.

Proposition Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité, admettant une espérance.
Si $X \geq 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$, et si $X \geq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration

Si $X \geq 0$, on a pour tout $x \in I$, $x \geq 0$. Comme la densité de probabilité de X est positive, l'intégrale $\int_I tf(t)dt$ est positive (si I n'est pas un segment, il suffit d'étudier la limite).
Si $X \geq Y$, alors $X - Y \geq 0$, et $\mathbb{E}(X - Y) \geq 0$, d'après le premier point. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$.

◈

Théorème (Théorème de transfert continu) Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur un intervalle I, de densité f, et soit g une fonction réelle continue telle que $\int_I g(t)f(t)dt$ est finie. Alors $\mathbb{E}(g(X))$ existe et
$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_I g(t)f(t)dt$$

Remarque Ce théorème est l'équivalent du théorème de transfert discret, pour les variables aléatoires réelles discrètes. On note toutefois qu'en plus de l'hypothèse d'existence de l'espérance de $g(X)$, on demande également que g soit continue.

4.3.3 Variance et écart-type

Définition Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Elle admet une variance si $\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$ existe. Dans ce cas, on appelle cette quantité la variance de X et on la note $\mathbb{V}(X)$.

Remarque C'est la même définition que dans le cas discret, sous réserve d'existence. L'interprétation est exactement la même.

Proposition Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant une espérance. Alors X admet une variance si, et seulement si, $\mathbb{E}(X^2)$ existe.

Démonstration

On note $m=\mathbb{E}(X)$. X admet une variance si, et seulement si, la quantité suivante est finie :

$$\int_I (t-m)^2 f(t)dt$$

d'après le théorème de transfert continu.

Pour tout $t\in I$, on a $(t-m)^2=t^2-2mt+m^2$. Comme X admet une espérance finie, par linéarité de l'intégrale, l'intégrale précédente existe si et seulement si $\int_I t^2 f(t)dt$ est finie, c'est-à-dire si et seulement si $\mathbb{E}(X^2)$ est finie.

◈

Proposition (Formule de König-Huygens) Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant une variance. Alors

$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration

La preuve est identique au cas discret. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)&=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)\\&=\mathbb{E}(X^2-2\mathbb{E}(X)X+\mathbb{E}(X)^2)\\&=\mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X)^2+\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \quad \textit{par linéarité de l'espérance}\\&=\mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X)^2+\mathbb{E}(X)^2 \quad \textit{car } \mathbb{E}(X) \textit{ est constante}\\ \boxed{\mathbb{V}(X)&=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2}\end{aligned}$$

◈

Proposition Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant une variance, et soient a et b deux réels. Alors

- $\mathbb{V}(X)\geq 0$
- $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$

Démonstration

❖ *Comme X est réelle, $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$. Par conséquent, $\mathbb{V}(X) \geq 0$.*

❖ *On a*

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX+b) &= \mathbb{E}((aX+b)^2) - \mathbb{E}(aX+b)^2 \\ &= \mathbb{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (a\mathbb{E}(X)+b)^2 \\ &= a^2\mathbb{E}(X^2) + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2 - a^2\mathbb{E}(X)^2 - 2ab\mathbb{E}(X) - b^2 \\ &= a^2(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) \\ &= a^2\mathbb{V}(X)\end{aligned}$$

◈

Proposition (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant une variance. Alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

Démonstration

Soit $a > 0$. On note f la densité de X. On note $m = \mathbb{E}(X)$, $I_- = \{x \in I, (x-m)^2 < a^2\}$ et $I_+ = \{x \in I, (x-m)^2 \geq a^2\}$. Ainsi, I_- et I_+ sont deux intervalles qui partitionnent I. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X)^2)) \\ &= \int_I (t-m)^2 f(t)dt \\ &= \int_{I_-} (t-m)^2 f(t)dt + \int_{I_+} (t-m)^2 f(t)dt \\ &\geq \int_{I_+} (t-m)^2 f(t)dt \quad \textit{car pour } t \in \mathbb{R}, (t-m)^2 f(t) \geq 0 \\ &\geq \int_{I_+} a^2 f(t)dt \quad \textit{par définition de } I_+ \\ &\geq a^2 \int_{I_+} f(t)dt \\ &\geq a^2 \mathbb{P}(X \in I_+) \\ &\geq a^2 \mathbb{P}((X-m)^2 \geq a^2) \\ \boxed{\mathbb{V}(X) \geq a^2 \mathbb{P}(|X-m| \geq a)} &\quad \textit{car } a > 0\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité souhaitée.

◈

Définition Soit X une variable aléatoire réelle à densité admettant une variance. L'écart-type de X est défini comme

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarque L'écart-type a la même interprétation que dans le cas discret.

4.4 Lois à densité usuelles

4.4.1 Loi uniforme sur $[a, b]$

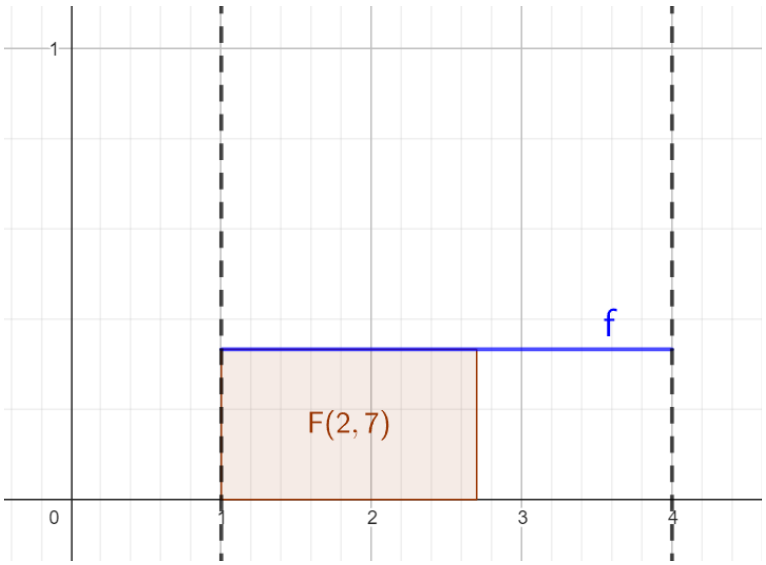
Soit $[a, b]$ un intervalle non réduit à un point.

Définition On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si X est à densité sur $[a, b]$, de densité

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \forall x \in [a, b]$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

Voici la courbe représentative de la densité d'une loi uniforme sur $[1, 4]$.



Proposition La fonction définie par $f(x) = \frac{1}{b-a}$ est une densité de probabilité sur $[a, b]$.

Démonstration

f est continue et positive sur $[a, b]$. On a

$$\int_a^b \frac{1}{b-a} dt = (b-a)\frac{1}{b-a} = 1$$

car $b > a$.

◈

On considère $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

Proposition La fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \forall x \in [a, b]$$

Démonstration

Soit $x \in [a, b]$. On a

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

car $x \geq a$.

◈

Proposition X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Démonstration

Les fonctions $x \mapsto \frac{x}{b-a}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{b-a}$ sont continues sur $[a,b]$, donc X admet une espérance et une variance.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_a^b \frac{t}{b-a}dt \\ &= \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}}$$

Puis

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_a^b \frac{t^2}{b-a}dt = \left[\frac{t^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(a^2+ab+b^2)(b-a)}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} \\ &= \frac{a^2-2ab+b^2}{12}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

◈

4.4.2 Loi exponentielle

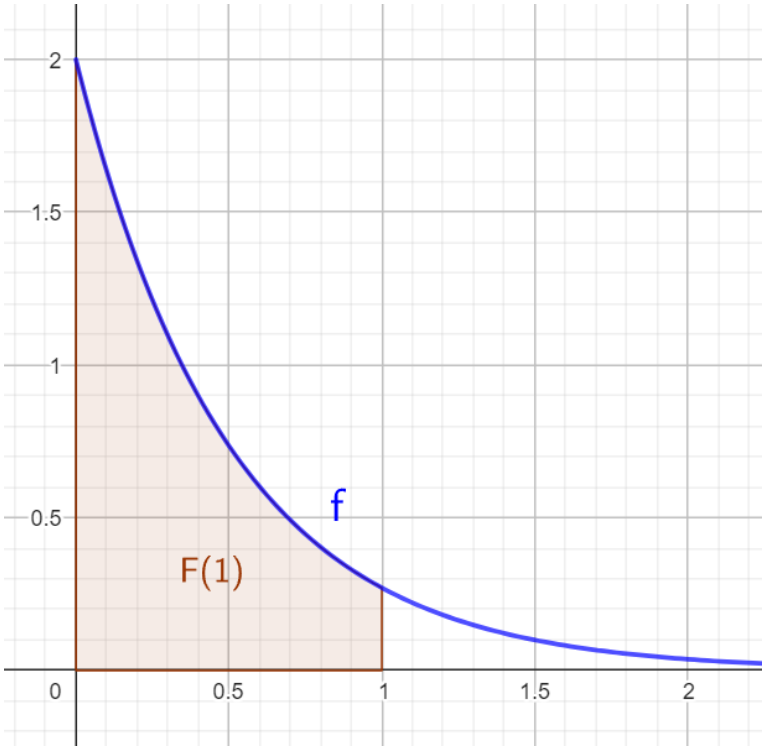
Soit $\lambda > 0$.

Définition On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la exponentielle de paramètre λ si elle est à densité sur $[0, +\infty[$, de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0$$

On note alors $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Voici la courbe représentative de la densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.



Proposition La fonction définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité sur $[0, +\infty[$.

Démonstration

f est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Soit $x \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

Comme $\lambda > 0$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$, d'où le résultat.

◈

Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition La fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0$$

Démonstration

C'est une conséquence immédiate du calcul effectué pour démontrer la proposition précédente.

◈

Proposition X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Démonstration

Soit $x \geq 0$. On calcule $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$ en intégrant par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt &= \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-\lambda t} dt \\ &= -xe^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x \quad \text{car } \lambda > 0 \\ &= -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda x} - 1)\end{aligned}$$

Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$, et d'autre part, $\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$. On en déduit que X admet une espérance et que

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}}$$

Maintenant, on calcule $\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$ en intégrant par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt &= \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x -2te^{-\lambda t} dt \\ &= -x^2 e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt \quad \text{car } \lambda > 0\end{aligned}$$

Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} -x^2 e^{-\lambda x} = 0$. D'autre part, comme X admet une espérance, le terme de droite converge vers $\frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(X)$. Ainsi, X^2 admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(X^2) = 0 + \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Par conséquent, X admet une variance et

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}}$$

◈

Proposition Pour tous réels positifs s et t, on a

$$\mathbb{P}_{(X\geq s)}(X \geq t+s) = \mathbb{P}(X \geq t)$$

On dit que la loi exponentielle est sans mémoire.

Démonstration

Commençons par remarquer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

En particulier, $\mathbb{P}(X \geq x) > 0$, ce qui assure que la probabilité conditionnelle de la proposition est bien définie.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X\geq s)}(X \geq t+s) &= \frac{\mathbb{P}((X \geq s) \cap (X \geq t+s))}{\mathbb{P}(X \geq s)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq t+s)}{\mathbb{P}(X \geq s)} \quad \text{car comme } t \geq 0,\ (X \geq t+s) \subset (X \geq s) \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda(t+s)+\lambda s} \\ &= e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X\geq s)}(X \geq t+s) = \mathbb{P}(X \geq t)}$$

◈

Remarque Cette propriété fait de la loi exponentielle une loi sans mémoire, tout comme la loi géométrique pour les lois discrètes. Cette appellation vient du fait que la probabilité que la variable X "survive" un temps t ne dépend pas de son "temps de survie" précédent s. Contrairement au cas discret, on a même un résultat plus fort, bien que hors programme, qui est le suivant.

Proposition La loi exponentielle est la seule loi à densité sur $[0,+\infty[$ sans mémoire.

Démonstration

Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $[0,+\infty[$. On note F sa fonction de répartition, et G sa fonction de survie, c'est-à-dire la fonction définie pour tout $x \in I$ par

$$G(x) = 1 - F(x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X \geq x)$$

Nous allons démontrer que cette fonction de survie est nécessairement de la forme de celle d'une loi exponentielle.

Commençons par remarquer que $G(0) = \mathbb{P}(X \geq 0) = 1$. Comme X est sans mémoire, on a pour tous s et t réels positifs

$$G(s+t) = \mathbb{P}(X \geq s+t) = \mathbb{P}(X \geq s)\mathbb{P}(X \geq t) = G(s)G(t) \quad (*)$$

d'après le calcul effectué dans la preuve de la proposition précédente. On remarque également que pour tous x, y réels positifs tels que $x \geq y$, on a $(X \geq y) \subset (X \geq x)$, donc $G(y) \geq G(x)$. Ainsi, G est décroissante.

De la relation $(*)$, on déduit facilement que $G(2) = G(1)^2$, puis par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G(n) = G(1)^n$. De plus, pour tous $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, on a $G\left(\frac{p}{q}\right)^q = G\left(\frac{p}{q}q\right) = G(p) = G(1)^p$, donc $G\left(\frac{p}{q}\right) = G(1)^{\frac{p}{q}}$. Ainsi, pour tout rationnel positif r, on a

$$G(r) = G(1)^r$$

Montrons que $G(1) \in]0,1[$. On a clairement $G(1) \in [0,1]$. Si $G(1) = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G(n) = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} G(n) = 1$, alors que

$$\lim_{n\to+\infty} G(n) = 1 - \lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$$

Si $G(1) = 0$, alors on démontre facilement que $G(\frac{1}{2}) = 0$, et par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G(\frac{1}{2^n}) = 0$. On a donc une suite croissante d'évènements $(X \geq \frac{1}{2^n})_n$ dont l'union est $(X > 0)$. Ainsi,

$$G(0) = \lim_{n\to+\infty} G\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

ce qui est contradictoire. On en déduit que $G(1) \in]0,1[$.

Soit $x \in [0,+\infty[$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe deux suites de rationnels $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ qui convergent vers x, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$ (il suffit de considérer les approximations décimales par défaut et par excès de x successives par exemple). Par décroissance de G, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} G(a_n) \geq G(x) \geq G(b_n) &\Rightarrow G(1)^{a_n} \geq G(x) \geq G(1)^{b_n} \\ &\Rightarrow e^{a_n \ln(G(1))} \geq G(x) \geq e^{b_n \ln(G(1))} \quad \text{car } G(1) \in]0,1[\end{aligned}$$

Comme $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers x, par continuité de l'exponentielle et par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$G(x) = e^{x \ln(G(1))}$$

On remarque que comme $G(1) \in]0,1[$, $\ln(G(1)) < 0$, ce qui correspond donc bien à la fonction de survie

d'une loi exponentielle.
Puisque la fonction de survie de X est celle d'une loi exponentielle, c'est aussi le cas de sa fonction de répartition, donc X suit une loi exponentielle.

◈

4.4.3 Loi normale

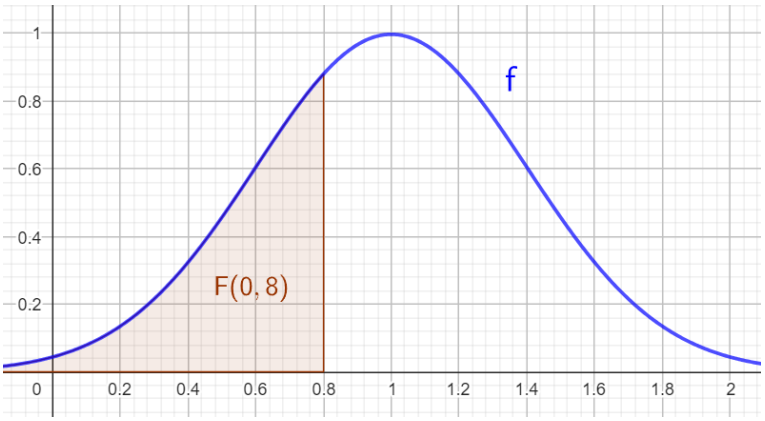
Cette loi à densité n'est pas étudiée de manière systématique au lycée, mais elle joue un rôle central en probabilités. C'est pourquoi nous la présentons ici, même si de nombreux résultats seront admis.

Définition On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et σ^2, avec $\sigma > 0$, si elle est à densité sur $\mathbb{R}$, et de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

On note alors $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est appelée loi normale centrée réduite.

Voici la courbe représentative de la densité d'une loi normale de paramètres $\mu = 1$ et $\sigma^2 = 0,16$.



Proposition (admise) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$

est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Remarques

Le calcul de l'intégrale de cette fonction sur $\mathbb{R}$, appelée intégrale de Gauss, nécessite des outils hors de portée au lycée, ce qui nécessite d'admettre cette proposition.

Il n'existe aucune expression analytique de la fonction de répartition de cette loi, c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Cela empêche un calcul exact des valeurs de cette fonction, autre que sa limite en $+\infty$.

Proposition (admise) Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

La démonstration de cette proposition repose sur un changement de variable sur une intégrale impropre. Cela peut faire l'objet d'un exercice guidé au lycée.

Remarque Il suffit alors d'étudier la loi normale centrée réduite. Cette proposition justifie en partie le nom de loi normale centrée réduite : soustraire μ revient à centrer et diviser par σ revient à réduire. La proposition suivante vient compléter ce propos.

Proposition (admise) Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)^2$. Alors X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

La preuve de cette proposition repose sur des calculs d'intégrales par intégration par parties, sur la densité d'une loi normale centrée réduite en premier lieu.

Remarque La loi normale est une loi qui apparaît lorsque l'on répète de manière indépendante la même expérience aléatoire plusieurs fois.

La loi des grands nombres affirme que pour une variable aléatoire X (à densité ou non) admettant une espérance, si l'on répète de nombreuses fois l'expérience aléatoire associée de manière indépendante (ce qui revient à produire un échantillon de grande taille de X), alors la moyenne empirique des résultats obtenus "converge" en un sens précis vers l'espérance de X.

Que se passe-t-il si l'on réitère ce procédé plusieurs fois ? On doit obtenir des moyennes empiriques "centrées" autour de l'espérance de X, mais comment se répartissent-elles autour ? Quelle loi suivent-elles ? On peut démontrer, et c'est l'objet d'un théorème du nom de théorème central limite, que lorsque l'on effectue un échantillonnage de très grand taille, les moyenne empiriques obtenues suivent une loi normale, dont les paramètres dépendent directement de l'espérance et la variance de X.

Ce résultat ne dépend pas de loi de la variable X, ce qui explique que cette loi normale apparaisse dans de nombreux domaines, où des phénomènes sont issus de multitudes de petites perturbations aléatoires additionnées.

5 Statistique à une ou deux variable, représentation et analyse de données

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** notion de fonction, polynômes de degré 2, équations de droite

5.1 Statistiques à une variable

5.1.1 Série statistique

Définition La statistique est le domaine des mathématiques qui étudie les caractères propres des individus d'une certaine population. Les caractères étudiés peuvent être qualitatifs (couleur, sexe, lieu , ...), quantitatifs discrets (âge en année, nombre d'habitants, ...) ou quantitatifs continus (longueur, durée de vie, ...).

Définition Une série statistique est un ensemble de donnés. On dit qu'elle est brute lorsque ces données ne sont pas encore traitées. Il est courant de regrouper ces données par classes.
Si l'on observe un seul caractère, on dit qu'il s'agit d'une série à une variable.

Définition L'effectif d'une classe est le nombre de données de cette classe. On appelle effectif total le nombre total de données.

Remarque L'effectif total d'une série est la somme des effectifs de chaque classe.

Définition La fréquence d'une classe de données est le rapport :

$$\frac{\text{effectif de la classe}}{\text{effectif total}}$$

C'est donc un nombre réel compris entre 0 et 1.

Définition Si l'on étudie un caractère quantitatif, on appelle effectif (respectivement fréquence) cumulé(e) croissant(e) d'une classe la somme des effectifs (respectivement des fréquences) des classes inférieures ou égale à celle-ci.

Remarque Pour la plus grande valeur de la série, l'effectif cumulé croissant est l'effectif total, et la fréquence cumulée croissante vaut 1.

5.1.2 Types de représentation

Pour représenter et organiser une série statistique à une variable, il existe plusieurs types de représentations, qui ont chacun leurs caractéristiques.

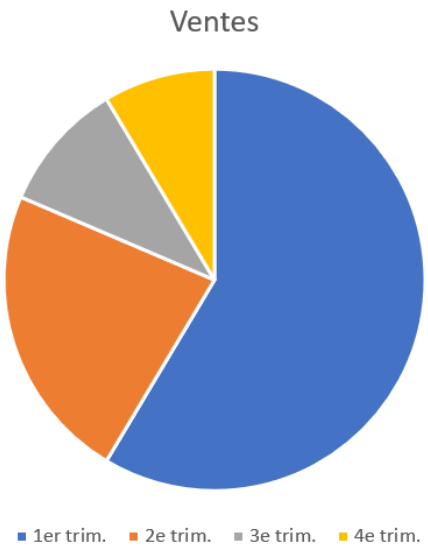
❖ **Tableau de données**

On peut rassembler les données d'une série dans un tableau, en laissant la série brute, ou en les regroupant par classes, que l'on peut également ranger dans l'ordre croissant ou décroissant par exemple.

Couleurs des yeux	Bleu	Vert	Marron
Effectif	8	10	15
Fréquence	$\frac{8}{33}$	$\frac{10}{33}$	$\frac{15}{33}=\frac{5}{11}$

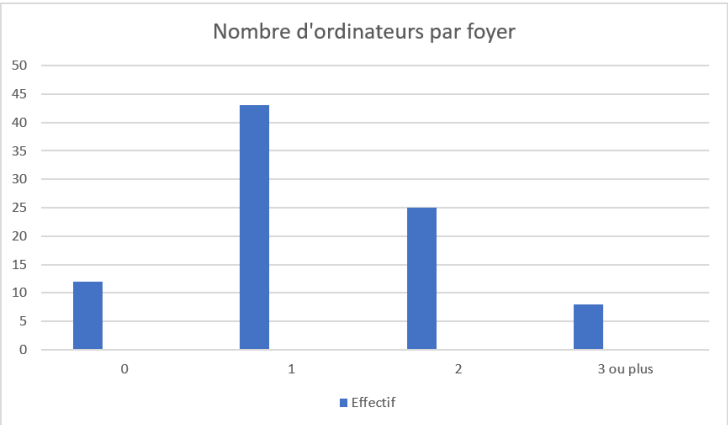
❖ **Diagramme circulaire**

On peut représenter les différentes comme des secteurs de disque, dont l'angle est proportionnel à l'effectif. Cela permet notamment de représenter les proportions que représentent chaque classe.



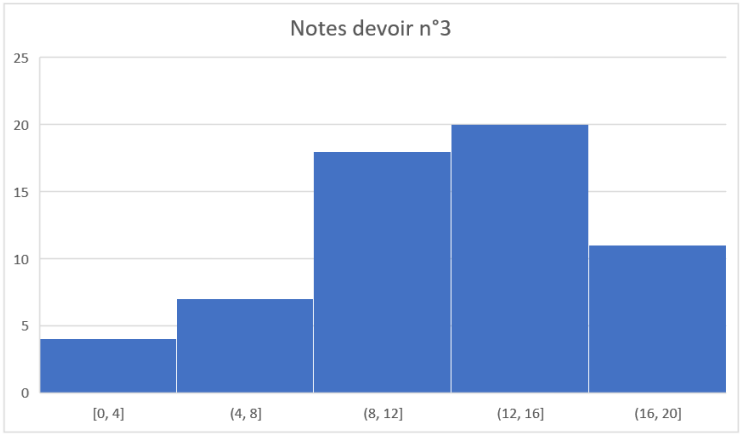
❖ **Diagramme en barres**

On représente chaque classe par une rectangle de hauteur l'effectif de cette classe. Cela permet de montrer la répartition de données qualitatives ou quantitatives discrètes.



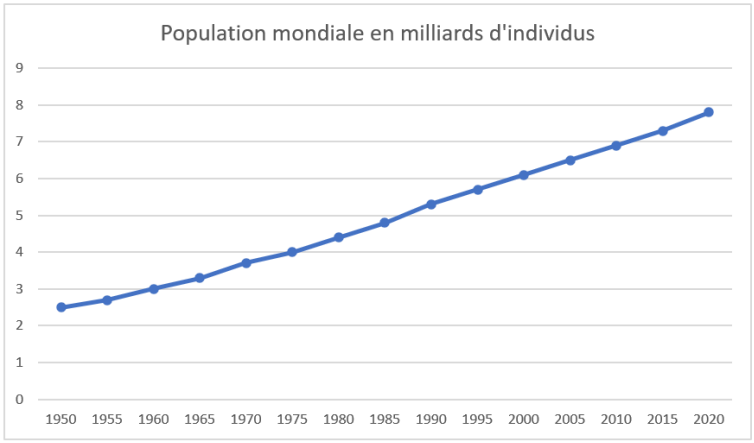
❖ **Histogramme**

On se sert d'histogramme pour montrer la répartition de données quantitatives continues. On associe à chaque intervalle un rectangle de hauteur l'effectif de la classe.



❖ **Graphique**

Un graphique permet de montrer l'évolution d'un caractère quantitatif par rapport à une certaine grandeur.



5.1.3 Indicateurs

Certaines séries peuvent présenter beaucoup de données, et les traiter en entier peut s'avérer trop complexe. On utilise alors certains indicateurs de position ou de dispersion.

Définition Soit $x = (x_i)_i$ une série statistique brute d'effectif total N. On définit la moyenne de x comme

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

La moyenne est un indicateur de position d'une série statistique. Elle représente une valeur autour de laquelle les données de la série se répartissent. C'est en particulier une valeur comprise entre la plus grande donnée et la plus petite.

Proposition Soit $x = (x_i)_i$ une série statistique, pour laquelle les données sont regroupées en M classes. Chacune de ces classes a pour valeur m_i, pour effectif n_i et pour fréquence f_i. Alors

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M} n_i \times m_i = \sum_{i=1}^{M} f_i \times m_i$$

Démonstration

Pour la première égalité, il suffit de regrouper les données x_i par classes (sommation par paquets). Pour la seconde, il suffit de remarquer que pour tout i, on a $f_i = \frac{n_i}{N}$.

◈

Proposition On considère deux séries statistiques $x = (x_i)_i$, $y = (y_i)_i$, d'effectifs totaux respectifs N_x et N_y. On considère également deux réels a et α. Alors

1. $\overline{x+a} = \overline{x} + a$

2. $\overline{\alpha x} = \alpha \overline{x}$

3. $N_x \times \overline{x} = \sum_{i=1}^{N_x} x_i$

4. Si on note $z = x \cup y$ la série obtenue en réunissant les séries x et y, alors

$$\overline{z} = \frac{N_x}{N_x + N_y}\overline{x} + \frac{N_y}{N_x + N_y}\overline{y}$$

Démonstration

1. *On a*

$$\overline{x+a} = \frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x}(x_i + a) = \frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x} x_i + \frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x} a = \overline{x} + \frac{N_x a}{N_x} = \overline{x} + a$$

2. *On a*

$$\overline{\alpha x} = \frac{1}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x} \alpha x_i = \frac{\alpha}{N_x}\sum_{i=1}^{N_x} x_i = \alpha \overline{x}$$

3. *Cela découle directement de la définition de $\overline{x}$.*

4. *Commençons par remarquer que l'effectif total de z est $N_x + N_y$. Puisque $z = x \cup y$, on peut écrire $z = (x_1, \dots, x_{N_x}, y_1, \dots, y_{N_y})$. On a alors*

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \frac{1}{N_x + N_y}\left(\sum_{i=1}^{N_x} x_i + \sum_{i=1}^{N_y} y_i\right) \\ &= \frac{1}{N_x + N_y}(N_x\overline{x} + N_y\overline{y}) \\ \boxed{\overline{z} &= \frac{N_x}{N_x + N_y}\overline{x} + \frac{N_y}{N_x + N_y}\overline{y}}\end{aligned}$$

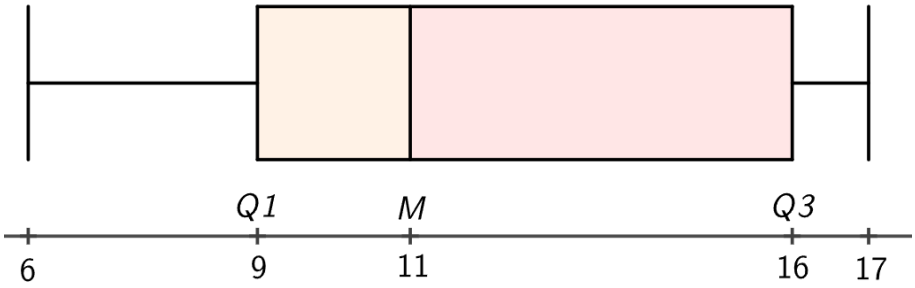
◈

Définition La médiane d'une série statistique est une valeur telle que 50% des données de la série sont inférieures à la médiane, et 50% lui sont supérieures.
Le premier (respectivement troisième) quartile est une valeur telle que 25% (respectivement 75%) des données de la série lui sont inférieures, et 75% (respectivement 25%) lui sont supérieures.
La différence entre le troisième quartile et la premier est appelé écart inter-quartile. La moitié des données de la série sont donc contenus dans cet intervalle.

La médiane et les quartiles sont des indicateurs de position de la série. L'écart inter-quartile est un indicateur de dispersion.

Remarque Si la série compte un nombre impair de donnée, la valeur "centrale" est la médiane. Lorsque la série compte un nombre pair de données, une telle valeur n'existe. Par convention, la médiane est la moyenne des deux valeurs "centrales", bien que d'autres valeurs soient possibles. La même convention est utilisée pour les quartiles.

On peut représenter ces quatre indicateurs sur un même schéma, appelé diagramme en boîte, ou boîte à moustache.



On peut y voir que la série s'étend de 6 à 17. Les quartiles sont 9 et 16, la médiane est 11 et l'écart inter-quartile est 7. Ce diagramme partage également l'intervalle [6,17] en quatre intervalles qui contiennent tous un quart des données de la série.

Définition On appelle étendue d'une série statistique à caractère quantitatif la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale.

L'étendue est un indicateur de dispersion, qui peut se lire sur un diagramme en boîte.

Définition Soit x une série statistique. On appelle variance de cette série la quantité :

$$v(x) = \overline{(x - \overline{x})^2}$$

On appelle écart-type de x la quantité :

$$\sigma(x) = \sqrt{v(x)}$$

La variance et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion d'une série statistique. Ils mesurent un "écart moyen" à la moyenne (au carré pour la variance) : plus ils sont proches de 0, plus les données sont proches de la moyenne, et inversement.

Pour résumer une série statistique, il est d'usage de donner deux indicateurs : un indicateur de position et un de dispersion. On utilise régulièrement deux couples d'indicateurs : (médiane, écart inter-quartile) et (moyenne, écart-type).

Le couple (médiane, écart inter-quartile) est peu sensible aux valeurs extrêmes, c'est-à-dire que rajouter ou retirer une valeur très éloignée des autres ne modifiera pas (ou très peu) ces indicateurs. En revanche, ils sont en général difficiles à calculer en pratique.

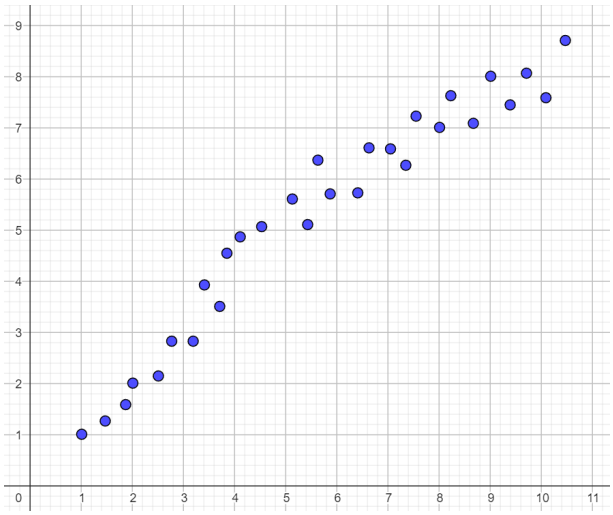
Le couple (moyenne, écart-type) est plus facile à calculer en pratique. Cependant, il est plutôt sensible aux valeurs extrêmes. Le choix d'un couple ou d'un autre est un choix de traitement de la série statistique.

5.2 Statistiques à deux variables

5.2.1 Nuage de points

Définition Si l'on considère deux séries statistiques x et y, qui étudient deux caractères distincts, on dit que la série (x, y) est une série statistiques à deux variables.

Lorsque l'on étudie ce type de série, on cherche souvent à rendre compte d'une relation entre les deux séries x et y. Pour cela, on représente régulièrement ces séries par un nuage de points, constitué de tous les points (x, y).



Cela permet en général de conjecturer une relation entre les deux grandeurs x et y observées : linéaire, affine, quadratique, logarithmique, exponentielle, ...

On considère pour la suite de cette leçon une série à deux statistiques (x, y), d'effectif total n.

5.2.2 Indicateurs

Lorsque l'on étudie une série statistique à deux variables, on dispose évidemment des indicateurs de position et de dispersion propres à chacune des deux séries, mais on peut en définir d'autres, qui décrivent la relation entre les deux grandeurs étudiées.

Définition On appelle point milieu de la série (x, y) le point $(\overline{x}, \overline{y})$.

Tout comme la moyenne représente une sorte de "milieu" d'une série à une statistique, le point milieu représente le "milieu" du nuage de points. C'est donc un indicateur de position.

Définition On définit la covariance de x et y comme

$$\text{cov}(x, y) = \overline{(x - \overline{x})(y - \overline{y})}$$

La covariance entre x et y indique dans quelle mesure les valeurs d'une des deux variables augmentent avec les valeurs croissantes de l'autre.

Définition On appelle coefficient de corrélation linéaire entre x et y le réel :

$$r(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$$

Remarque Si x a un écart-type nul, cela signifie qu'il s'agit d'une série constante. Dans ce cas, il n'y a pas de relation entre x et y. Il en est de même pour y.

Nous donnerons une interprétation de ce coefficient et une explication concernant son nom un peu plus loin. Pour l'instant, étudions les propriétés de la covariance et de ce coefficient de corrélation.

Proposition On considère une troisième série z. On a les propriétés suivantes :

1. $\text{cov}(x,x) = v(x) \geq 0$

2. $\text{cov}(x,y) = \text{cov}(y,x)$

3. $\forall a,b \in \mathbb{R}, \text{cov}(ax+by,z) = a\text{cov}(x,z) + b\text{cov}(y,z)$

4. $\forall a,b \in \mathbb{R}, \text{cov}(x,ay+bz) = a\text{cov}(x,y) + b\text{cov}(x,z)$

Démonstration

1. *Cela découle des définitions de la covariance et de la variance. La variance est positive puisqu'il s'agit de la moyenne d'une série de données positives.*

2. *Trivial, par définition de la covariance.*

3. *Soient $a,b \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned}
\text{cov}(ax+by,z) &= \overline{(ax+by-\overline{ax+by})(z-\overline{z})} \\
&= \overline{(ax+by-a\overline{x}-b\overline{y})(z-\overline{z})} \\
&= \overline{(a(x-\overline{x})+b(y-\overline{y}))(z-\overline{z})} \\
&= \overline{a(x-\overline{x})(z-\overline{z})+b(y-\overline{y})(z-\overline{z})} \\
&= a\overline{(x-\overline{x})(z-\overline{z})}+b\overline{(y-\overline{y})(z-\overline{z})} \\
\boxed{\text{cov}(ax+by,z) = a\text{cov}(x,z)+b\text{cov}(y,z)}
\end{aligned}$$

4. *Cela résulte des propriétés 2. et 3.*

◈

Remarque Ces propriétés font de la covariance une forme bilinéaire (3. et 4.), symétrique (2.) et positive (1.). C'est également le cas du produit scalaire entre deux vecteurs du plan, ou de l'espace.

Proposition On a $r(x,y) \in [-1,1]$.

Démonstration

Cela résulte principalement d'un résultat du nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\text{cov}(x,y)^2 \leq v(x)v(y)$$

Nous allons commencer par démontrer ce résultat.

Si $v(x) = 0$, x est constante égale à $\overline{x}$, donc $\text{cov}(x,y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Il en est de même pour y. On suppose à présent que $v(x) > 0$ et $v(y) > 0$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
v(tx+y) &= \text{cov}(tx+y,tx+y) \\
&= t\text{cov}(x,tx+y)+\text{cov}(y,tx+y) \quad \textit{par bilinéarité} \\
&= t^2\text{cov}(x,x)+t\text{cov}(x,y)+t\text{cov}(y,x)+\text{cov}(y,y) \quad \textit{par bilinéarité} \\
v(tx+y) &= t^2v(x)+2t\text{cov}(x,y)+v(y) \quad \textit{par symétrie}
\end{aligned}$$

On remarque que puisque $v(x) > 0$, $v(tx+y)$ est un polynôme de degré 2 en t. Or, $v(tx+y) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit que le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&(2cov(x,y))^2 - 4v(x)v(y) \leq 0 \\
\Rightarrow &4cov(x,y)^2 \leq 4v(x)v(y) \\
\Rightarrow &cov(x,y)^2 \leq v(x)v(y)
\end{aligned}$$

De cette inégalité, on déduit que :

$$\begin{aligned}
&cov(x,y)^2 \leq v(x)v(y) \\
\Rightarrow &\frac{cov(x,y)^2}{v(x)v(y)} \leq 1 \quad \textit{car } v(x) > 0 \textit{ et } v(y) > 0 \\
\Rightarrow &-1 \leq \frac{cov(x,y)}{\sigma(x)\sigma(y)} \leq 1 \\
\Rightarrow &\boxed{r(x,y) \in [-1,1]}
\end{aligned}$$

◈

Cela justifie le nom de coefficient de cette quantité.

Remarque L'inégalité de Cauchy-Schwarz démontrée dans cette preuve est un lemme vrai pour tout forme bilinéaire symétrique et positive. C'est donc également le cas pour les vecteurs et le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\| \, \|v\|$$

Une conséquence de cette inégalité appliquée aux intégrales est l'inégalité suivante, pour f et g continues sur un segment $[a,b]$:

$$\left(\int_a^b |f(t)g(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt \right) \times \left(\int_a^b g(t)^2 dt \right)$$

5.2.3 Droites d'ajustement

Lorsque l'on recherche une corrélation entre x et y, on peut la modéliser par différentes relations : affine, quadratique, exponentielle, par exemple.

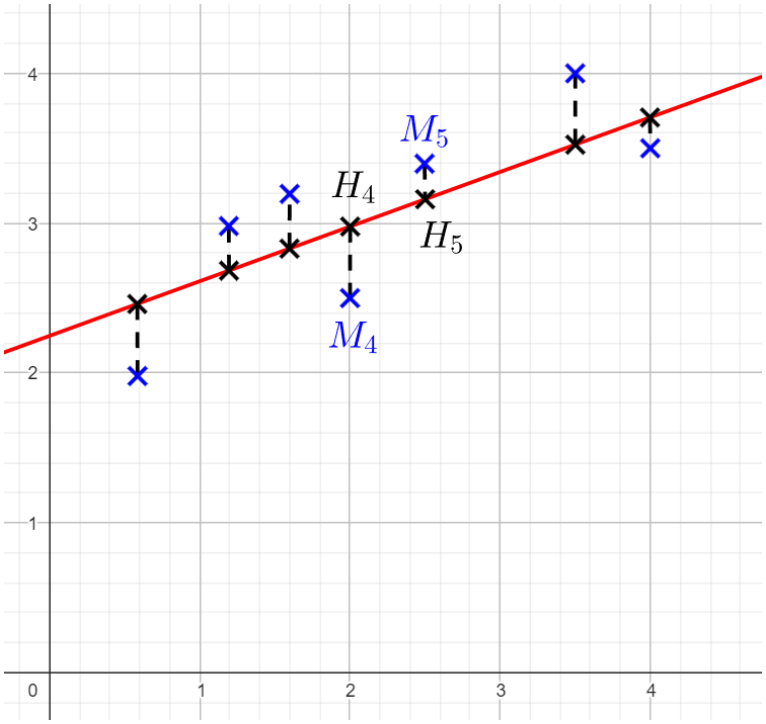
Lorsque l'on cherche une relation affine, on dit que l'on cherche une droite d'ajustement. Visuellement, cela revient à trouver une droite qui "passe" au plus proche des points du nuage de points. Il existe différentes méthodes pour cela. Nous en présentons ici deux, dont une que nous étudierons plus en détail.

Méthode de Mayer : On partage le nuage de points en deux sous-nuages (en-dessous d'une certaine abscisse, et au-dessus). La droite d'ajustement est alors la droite passant par les points milieux de ces deux sous-nuages.

Cette méthode a l'avantage d'être rapide, mais ne fournit pas toujours un résultat probant.

Méthode des moindres carrés : Pour tout $1 \leq i \leq n$, on note M_i le point (x_i, y_i), et on note H_i le point de la droite d'ajustement d'abscisse x_i. Cette méthode vise à minimiser la quantité $\sum_{i=1}^{n} H_i {M_i}^2$, d'où son nom.

Si on note a et b les deux paramètres de la droite d'ajustement, c'est-à-dire tels que l'équation de cette droite soit $Y = aX + b$, alors H_i a pour coordonnées $(x_i, ax_i + b)$. On a alors $H_i {M_i}^2 = (ax_i + b - y_i)^2$.



Théorème Les réels a et b qui minimisent $\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = \sum_{i=1}^n H_iM_i{}^2$ sont

$$a = \frac{\text{cov}(x,y)}{v(x)} \quad \text{et} \quad b = \overline{y} - \overline{x}\frac{\text{cov}(x,y)}{v(x)}$$

Remarque Si $v(x) = 0$, x est constante. Dans ce cas, il n'y a aucune relation entre x et y, puisque x n'évolue pas quand y varie. Il est donc raisonnable de supposer $v(x) > 0$.

Démonstration

Pour démontrer ce résultat, on va décomposer $\sum_{i=1}^n H_iM_i{}^2$ en une somme d'un polynôme de degré 2 en a et d'un carré, ce qui nous permettra de la minimiser. Pour cela, on va introduire les quantités $\overline{x}$ et $\overline{y}$ dans les calculs, pour faire apparaître des variances, des covariances et des simplifications.

On a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n H_iM_i{}^2 &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(a(x_i - \overline{x}) - (y_i - \overline{y}) + (a\overline{x} + b - \overline{y})\Big)^2\end{aligned}$$

On va poser $m = a\overline{x} + b - \overline{y}$, qui est une constante, pour écrire les calculs plus facilement. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n H_iM_i{}^2 =& \sum_{i=1}^n \Big(a(x_i - \overline{x}) - (y_i - \overline{y}) + m\Big)^2 \\ =& a^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - y)^2 + \sum_{i=1}^n m^2 \\ & - 2a \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + 2am \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}) - 2m \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})\end{aligned}$$

On a $\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 = nv(x)$, $\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2 = nv(y)$ et $\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = n\text{cov}(x,y)$. De plus, par définition de la moyenne, on a $\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y}) = 0$. Ainsi

$$\sum_{i=1}^n H_iM_i{}^2 = na^2v(x) + nv(y) + nm^2 - 2an\text{cov}(x,y)$$

et

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_iM_i^2 = a^2v(x) - 2a\mathrm{cov}(x,y) + v(y) + (a\overline{x} + b - \overline{y})^2$$

On voit donc que la somme que l'on cherche à minimiser, à un facteur n près, s'écrit comme la somme d'un polynôme du second degré en a et d'un carré.

Ce polynôme a pour coefficient dominant $v(x) > 0$, donc il admet un minimum en

$$a = \frac{2\mathrm{cov}(x,y)}{2v(x)} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v(x)}$$

Le second terme admet un minimum, pour cette valeur de a, lorsqu'il est nul puisqu'il s'agit d'un carré. Or

$$a\overline{x} + b - \overline{y} = 0 \Leftrightarrow b = \overline{y} - a\overline{x}$$

On en déduit les deux valeurs de a et b énoncées :

$$a = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v(x)} \quad \textit{et} \quad b = \overline{y} - \overline{x}\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v(x)}$$

◈

Le droite des moindres carrés est donc la droite d'équation :

$$Y = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v(x)}(X - \overline{x}) + \overline{y}$$

Remarque On a prouvé que ces paramètres minimisent la somme des carrés. On peut également s'intéresser à la valeur de cette somme pour ces paramètres :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} H_iM_i^2 &= \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v(x)}x_i + \overline{y} - \overline{x}\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v(x)} - y_i\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v(x)}(x_i - \overline{x}) - (y_i - \overline{y})\right)^2 \\
&= \frac{\mathrm{cov}(x,y)^2}{v(x)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 - 2\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v(x)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \\
&= n\frac{\mathrm{cov}(x,y)^2}{v(x)} + nv(y) - 2n\frac{\mathrm{cov}(x,y)^2}{v(x)} \\
&= n\left(v(y) - \frac{\mathrm{cov}(x,y)^2}{v(x)}\right) \\
&= nv(y)\left(1 - \frac{\mathrm{cov}(x,y)^2}{v(x)v(y)}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} H_iM_i^2 = nv(y)\Big(1 - r(x,y)^2\Big)}$$

On sait que $r(x,y)^2$ est compris entre 0 et 1. Au vu de cette égalité, plus il est proche de 0, plus la somme est élevée, et plus il est proche de 1, plus elle est faible. Celle-ci mesure le défaut de corrélation affine entre x et y, ce qui justifie l'appellation de coefficient de corrélation linéaire de $r(x,y)$: il quantifie à quel point les grandeurs x et y sont affinement liés.

6 Multiples et diviseurs dans $\mathbb{N}$, nombres premiers

- **Niveau :** cycle 4, Terminale experte
- **Pré-requis :** nombres entiers, division euclidienne, relation de congruence

6.1 Multiples et diviseurs

6.1.1 Division euclidienne

Théorème (Division euclidienne dans $\mathbb{N}$) Pour tous entiers naturels a et b, avec b non nul, il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tels que

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

On considère l'ensemble des multiples de b inférieurs ou égaux à a, c'est-à-dire l'ensemble des bk avec $k \in \mathbb{N}$ et $bk \leq a$. Ce sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est non-vide (il contient 0), et majoré : comme $b \in \mathbb{N}^*$, $ba \geq a$. Cet ensemble admet donc un plus grand élément bq, $q \in \mathbb{N}$. On définit maintenant $r = a - bq \in \mathbb{N}$, de sorte que $a = bq + r$.

Par définition, $bq \leq a$, donc $r \geq 0$. Si $r \geq b$, alors $a - bq \geq b$ et $a \geq b(q+1)$. $b(q+1)$ serait alors un multiple de b inférieur à a qui est strictement supérieur à bq, ce qui contredit la définition de bq. Par conséquent, $r < b$.

Cela prouve l'existence d'un couple (q, r) tel que $a = bq + r$ et $a \leq r < b$.

Démontrons maintenant l'unicité. Soient (q, r) et (q', r') deux couples d'entiers naturels tels que

$$a = bq + r = bq' + r' \quad , \quad 0 \leq r < b \quad \text{et} \quad 0 \leq r' < b$$

Quitte à échanger q et q', on peut supposer que $q \geq q'$. On a alors

$$b(q - q') = r' - r$$

On a $0 \leq r < b$, $0 \leq r' < b$ et $q \geq q'$, donc

$$0 \leq r' - r < b$$

Or , $r' - r = b(q - q')$ est un multiple de b, qui est strictement inférieur à b : nécessairement, $r' - r = 0$, donc $r = r'$.

On en déduit que $b(q-q')=0$. Comme $b \neq 0$, il suit que $q-q'=0$ et $q=q'$, ce qui démontre l'unicité. ◈

On appelle q et r respectivement le quotient et le reste de a par b. Pour calculer ce quotient et ce reste, on suit l'algorithme de division euclidienne : on calcule les multiples successifs de b jusqu'à dépasser a, pour trouver le quotient, puis on calcule le reste.

On peut coder cet algorithme sur Python par exemple :

```
def div_eucl(a,b):
    q=0
    while b*q < a:
        q=q+1
    q=q-1
    r=a-b*q
    return(q,r)
```

6.1.2 Définitions et propriétés

On considère deux entiers naturels a et b.

Définition On dit que a est un multiple de b si il existe un entier naturel k tel que $a=bk$.

Proposition Si b est non nul, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. a est un multiple de b.
2. Le reste de a par b est 0.
3. $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^*$

Démonstration

On suppose b non nul.

$(1 \Leftrightarrow 3)$ *Pour $k \in \mathbb{N}$, on a*

$$a=bk \Leftrightarrow \frac{a}{b}=k$$

car b est non nul, d'où l'équivalence.

$(1 \Leftrightarrow 2)$ *On note q et r le quotient et le reste de a par b. On a alors, pour $k \in \mathbb{N}$*

$$a=bk \Leftrightarrow bq+r=bk \Leftrightarrow b(k-q)=r$$

Or, $0 \leq r < b$, donc cette dernière égalité équivaut à dire que $r=0$, d'où le résultat.

◈

Remarque Si b est non nul, on peut alors dire que b divise a, ou que b est un diviseur de a, ou encore que a est divisible par b.

Proposition On a les propriétés suivantes :

1. 0 est multiple de tout entier.
2. 1 est un diviseur de tout entier, et est toujours le plus petit.
3. Si a est un multiple non nul de b, alors $a \geq b$.
4. Si $b \neq 0$, b est le plus grand diviseur de b et le plus petit multiple de b non nul.

Démonstration

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 = 0 \times n$, donc 0 est un multiple de n.*

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = 1 \times n$, donc 1 divise n. De plus, par définition un diviseur est non nul, donc vaut au moins 1. 1 est donc le plus petit diviseur de n.*

3. *Si a est un multiple non nul de b, alors $a = bk$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $k \geq 1$, donc $a \geq b$.*

4. *On suppose $b \neq 0$. Comme $b = 1 \times b$, b est à la fois un multiple et un diviseur de b. Tout diviseur d de b est de la forme $\frac{b}{c}$, avec $c \in \mathbb{N}^*$. Comme $b = \frac{b}{1}$, b est le plus grand de ses diviseurs. Tout multiple m de b est de la forme bk, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $b = b \times 1$, b est le plus petit multiple non nul de b.*

◈

Pour trouver la liste des diviseurs d'un entier non nul a, on peut simplement effectuer les divisions euclidiennes de a par les entiers compris entre 1 et a : si le reste est nul, alors le quotient est un diviseur de a. Toutefois, cela demande a divisions euclidiennes, ce qui peut être long. On peut accélérer légèrement le processus.

En effet, si d est un diviseur de a, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = dk$: k est alors également un diviseur de a. Cela permet d'éviter d'effectuer la division de a par d et par k, et de seulement faire une des deux. De ce fait, il n'est pas nécessaire d'effectuer les divisions euclidiennes jusqu'à a, mais seulement jusqu'à $\sqrt{a}$. En effet, si $d > \sqrt{a}$ et $k > \sqrt{a}$, alors $dk > a$, donc lorsque l'on décompose a en $a = dk$, d ou k est inférieur ou égal à $\sqrt{a}$.

Définition On dit qu'un entier d est un diviseur commun à a et b si d divise a et d divise b.

Pour trouver les diviseurs communs à deux entiers a et b, on peut dresser la liste des diviseurs de chacun de ces entiers, puis observer quels diviseurs figurent dans les deux listes.

Remarque On sait que pour tous entiers a, b et k, avec b et k non nuls, on a

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

Ainsi, si l'on veut réduire une fraction, il faut chercher un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

Définition On dit que a et b sont premiers entre eux si 1 est leur seul diviseur commun.

Comme on l'a déjà spécifié auparavant, 1 est un diviseur de tout entier.

Remarque On dit qu'une fraction $\frac{a}{b}$ est écrite sous forme irréductible si les entiers a et b sont premiers entre eux.
En effet, dans ce cas, puisque 1 est le seul diviseur commun à a et b, il n'est plus possible de réduire davantage la fraction $\frac{a}{b}$.

Proposition Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls.

- a divise a.
- Si a divise b et b divise a, alors $a = b$.
- Si a divise b et b divise c, alors a divise c.

Démonstration

- *On a déjà vu que a divise a, puisque $a = a \times 1$.*
- *On suppose que a divise b et b divise a. Alors il existe deux entiers naturels non nuls k et k' tels que $a = bk$ et $b = ak'$. On en déduit que $a = akk'$, puis que $kk' = 1$, car $a \neq 0$. Puisque k et k' sont des entiers naturels, nécessairement $k = k' = 1$, donc $a = b$.*
- *On suppose que a divise b et b divise c. Alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que $b = ak$ et $c = bk'$. Ainsi, $c = akk'$, avec $kk' \in \mathbb{N}$, donc a divise c.*

◈

Remarque Ces trois propriétés font de la relation de divisibilité ce que l'on appelle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Proposition Soient a, b et c trois entiers naturels non nuls. Si c divise a et b, alors c divise toute combinaison linéaire de a et b, c'est-à-dire tout entier naturel de la forme

$$pa + qb \quad \text{ou} \quad pa - qb \quad \text{ou} \quad qb - pa$$

Démonstration

On suppose que c divise a et b. Il existe deux entiers naturels k et k' tels que $a = kc$ et $b = k'c$. Pour tous entiers naturels p et q, on a alors

$$pa + qb = pkc + qk'c = (pk + qk')c$$

donc c divise $pa + qb$.

Pour les deux autres formes, la preuve est similaire.

◈

6.1.3 Critères de divisibilité

Comme on l'a vu, pour déterminer si un entier est multiple d'un autre, on peut effectuer une division euclidienne. Cependant, cela peut s'avérer long lorsque les entiers en question sont grands.

Il existe dans certains cas des critères permettant de dire si un entier est divisible par un autre entier ou non, et ce, sans diviser.

Proposition (Critères de divisibilité) Soit n un entier naturel. Alors

1. n est un multiple de 2 si, et seulement si, le chiffre des unités de n est 0, 2, 4, 6 ou 8.
2. n est un multiple de 5 si, et seulement si, le chiffre des unités de n est 0 ou 5.
3. n est un multiple de 10 si, et seulement si, le chiffre des unités de n est 0.
4. n est un multiple de 4 si, et seulement si, le nombre formé par les deux derniers chiffres de n est un multiple de 4.
5. n est un multiple de 3 (resp. 9) si, et seulement si, la somme des chiffres de n est un multiple de 3 (resp. 9).
6. n est un multiple de 11 si, et seulement si, la différence entre la somme des chiffres de rang pair et la somme des chiffres de rang impair de n est un multiple de 11.

Démonstration

Les critères par 3, 9 et 11 demandent l'usage de la relation de congruence sur les entiers, ce qui n'est abordée qu'en option mathématiques expertes en terminale. On commence donc par démontrer les autres critères, qui invoquent des arguments moins sophistiqués.

1. *Remarquons que l'on peut écrire n comme la somme d'un multiple de 10 et de son chiffre des unités. Puisque $10 = 2 \times 5$, ce multiple de 10 est un multiple de 2. On en déduit que n est un multiple de 2 si, et seulement si, son chiffre des unités l'est, d'où le résultat.*

2. *Par la même remarque, un multiple de 10 est un multiple de 5, donc n est un multiple de 5 si, et seulement si, son chiffre des unités l'est, d'où le résultat.*

3. *Le chiffre des unités de n est, par définition, le reste de la division euclidienne de n par 10, d'où le résultat.*

4. *On remarque que ce nombre formé par les deux derniers chiffres de n est le reste dans la division de n par 100. Or, $100 = 4 \times 25$, donc tout multiple de 100 est un multiple de 4. Il suit que n est un multiple de 4 si, et seulement si, son reste dans la division par 100 l'est également, d'où le résultat.*

On démontre à présent les critères par 3, par 9 et par 11. On note $a_0, \dots, a_s$ les chiffres de n en base 10, c'est-à-dire

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k 10^k$$

5. *On remarque que $10 \equiv 1[3]$ et $10 \equiv 1[9]$. Ainsi, pour tout entier naturel m, on a $10^m \equiv 1[3]$ et $10^m \equiv 1[9]$. On en déduit que*

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{s} a_k \ [3]$$
$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{s} a_k \ [9]$$

Ainsi, la somme des chiffres de n a le même reste que n dans le division par 3 (resp. par 9), ce qui prouve le résultat.

6. *On remarque que $10 \equiv -1[11]$ et $10^2 \equiv 1[11]$. On en déduit que pour tout entier naturel m, $10^m \equiv 1[11]$ si m est pair, et $10^m \equiv -1[11]$ si m est impair. Ainsi*

$$\begin{aligned} n &= \sum_{k=0}^{s} a_k 10^k \\ &= \sum_{k=0,\ k\ \text{pair}}^{s} a_k 10^k + \sum_{k=0,\ k\ \text{impair}}^{s} a_k 10^k \\ &\equiv \sum_{k=0,\ k\ \text{pair}}^{s} a_k - \sum_{k=0,\ k\ \text{impair}}^{s} a_k \ [11] \end{aligned}$$

Cette différence entre les deux sommes a donc le même reste que n dans la division par 11, d'où le résultat.

◈

6.2 Nombres premiers

6.2.1 Définition et premières propriétés

Définition Un entier naturel p est premier s'il admet exactement 2 diviseurs : 1 et p.

Remarque Pour tout entier p, 1 et p divisent p. Par convention, 1 n'est pas un nombre premier.

Un moyen historique et très pratique pour lister les nombres premiers est le crible d'Eratosthène (mathématicien grec du IIIème siècle avant J.C.).

Pour trouver tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un certain entier N, on commence par écrire tous les entiers entre 1 et N. On commencer par noter 2, qui est premier, puis l'on raye de la liste tous les autres multiples de 2. On note ensuite le prochain entier non rayé (ici 3), et on raye tous ses multiples. On continue ainsi de suite jusqu'à ce que chaque nombre soit rayé ou noté comme premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Cela permet de déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

Il est également possible de coder cet algorithme en langage Python, afin d'obtenir cette liste :

```
def crible(n):
    L=[]
    for i in range(2,n+1):
        L.append(i)
    for p in range(2,n+1):
        for k in range(1,len(L)+1):
            if L[len(L)-k]!=p and L[len(L)-k]%p==0:
                del L[len(L)-k]
    return L
```

Lemme Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.

Démonstration

Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- *Si n est premier, alors il est lui-même un diviseur premier de n.*
- *Si n n'est pas premier, alors il admet au moins un diviseur d strictement compris entre 1 et n. On applique alors le même raisonnement à d : soit il est premier, et n admet un diviseur premier, soit d admet un autre diviseur strictement compris entre 1 et d.*

On continue ce procédé jusqu'à obtenir un nombre premier, qui est alors un diviseur premier de n.
Si ce procédé ne se termine pas, on peut alors créer une liste de diviseurs $d_0 = n$, $d_1 = d$, etc. qui est strictement décroissante, mais dont tous les diviseurs sont strictement supérieurs à 1, ce qui est impossible. Ainsi, ce procédé s'arrête.

◈

Théorème (Théorème d'Euclide) Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration

On va procéder par l'absurde.

Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini s de nombres premiers $p_1, \dots, p_s$. On considère alors l'entier

$$N = \prod_{k=1}^{s} p_k + 1$$

On remarque que $N \geq 2$. D'après le lemme précédent, il admet donc un diviseur premier p.

Si p est l'un des p_k, alors il divise $\prod_{k=1}^{s} p_k$. Puisqu'il divise N, il divise également

$$N - \prod_{k=1}^{s} p_k = 1$$

Or, le seul diviseur de 1 est 1, ce qui est incompatible avec le fait que p est premier.

On en déduit qu'il existe un nombre premier qui n'est pas dans la liste $\{p_1, \dots, p_s\}$. Autrement dit, cette liste est incomplète. Ceci étant vrai pour toute liste finie, il existe une infinité de nombres premiers.

◈

Lemme (Lemme d'Euclide) Soient p un nombre premier, et b, c deux entiers naturels non nuls. Si p divise bc, alors p divise b ou p divise c.

Démonstration

Supposons par l'absurde qu'il existe des triplets d'entiers naturels (p, b, c) tels que p est premier, divise bc, et ne divise ni b, ni c. Si l'on fixe les entiers p et b, il existe alors un plus petit entier c tel que (p, b, c) vérifie ces propriétés.

On remarque que si $c \geq p$, alors $c-p$ vérifie les mêmes propriétés que c. En effet : $b(c-p) = bc-bp$, donc p divise $b(c-p)$, et p ne peut pas diviser $c-p$, car il diviserait c. Quitte à remplacer plusieurs fois c par $c-p$, on peut supposer que $1 \leq c < p$. De plus, si $c = 1$, le résultat est clair, donc on peut supposer $c > 1$.

Notons à présent r le reste dans la division de p par c : $p = qc + r$, avec $0 \leq r < c$. On a alors $br = bp - bqc$. Puisque p divise bc, il divise donc br. (p, b, r) est donc un triplet tel que p est premier, divise br, mais ne divise ni n, ni r, puisque $r < c < p$, ce qui contredit la minimalité de c.

On en déduit qu'il n'existe aucun de ces triplets, ce que l'on voulait démontrer.

◈

Corollaire Soient p et q deux nombres premiers distincts, et a un entier naturel non nul. Si p et q divisent a, alors pq divise a.

Démonstration

Supposons que p et q divisent a. Il existe alors k et k' tels que $a = pk = qk'$. Alors p divise qk'. Or, comme p et q sont premiers et distincts, p ne divise pas q. D'après le lemme d'Euclide, on en déduit que p divise k'. Il existe donc un entier naturel k'' tel que $pk'' = k'$. Ainsi, $a = qk' = pqk''$, donc pq divise a.

◈

Remarque On en déduit un critère de divisibilité par 6 : comme $6 = 2 \times 3$, avec 2 et 3 premiers distincts, si un nombre est divisible par 2 et 3, alors il est divisible par 6.

6.2.2 Décomposition en produit de facteurs premiers

Théorème (Théorème fondamental de l'arithmétique) Tout entier supérieur ou égal à 2 s'écrit de manière unique (à l'ordre près des facteurs) comme produit de nombres premiers.

Les nombres premiers qui apparaissent dans ce produit s'appellent les facteurs premiers de l'entier en question, et cette écriture s'appelle la décomposition en produit de facteurs premiers.

Démonstration

On commence par démontrer l'existence d'une décomposition en produit de facteurs premiers. Pour cela, on procède par récurrence.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$\mathcal{P}(n)$: "Tout entier compris entre 2 et n admet une décomposition en produit de facteurs premiers"

- ***Initialisation :*** *Comme 2 est un nombre premier, il s'écrit comme un produit d'un seul nombre premier, qui est lui-même. On en déduit que $\mathcal{P}(2)$ est vraie.*

- ***Hérédité :*** *Soit un entier $n \geq 2$ quelconque et fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie. Par hypothèse de récurrence, tout entier compris entre 2 et n admet une décomposition en produit de facteurs premiers. Il reste donc à démontrer que $n+1$ en admet une également.*
  Si $n+1$ est premier, alors il s'écrit comme produit d'un seul nombre premier, qui est lui-même. Sinon, $n+1$ s'écrit sous la forme ab, avec a et b deux entiers non nuls strictement inférieurs à $n+1$. En particulier, par hypothèse de récurrence, a et b admettent une décomposition en produit de facteurs premiers. On en déduit que c'est également le cas de $ab = n+1$.
  $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie, et la propriété est héréditaire.

- ***Conclusion :*** *La propriété est vraie pour $n = 2$ et héréditaire pour tout entier $n \geq 2$, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 2$.*

Cela démontre donc l'existence d'une décomposition en produit de facteurs premiers pour tout entier $n \geq 2$.

Démontrons à présent l'unicité. Soit $n \geq 2$ un entier. Supposons que celui-ci admette deux décompositions en produit de facteurs premiers. Il existe alors des nombres premiers deux à deux distincts $p_1, \ldots, p_s$ et des entiers naturels $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s$ tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} = p_1^{\beta_1} \ldots p_s^{\beta_s}$$

Remarquons que puisque les entiers α_i et β_i peuvent être nuls, il est raisonnable d'écrire les deux décompositions avec les mêmes nombres premiers $p_1, \ldots, p_s$.

Quitte à échanger les deux décompositions, on peut supposer que $\alpha_1 \geq \beta_1$. Dans ce cas, en simplifiant par $p_1^{\beta_1}$, on obtient que

$$p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \ldots p_s^{\alpha_s} = p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s}$$

Si $\alpha_1 > \beta_1$, alors p_1 divise le produit $p_2^{\beta_2} \ldots p_s^{\beta_s}$. Par le lemme d'Euclide, p_1 divise nécessairement l'un des p_i, $2 \leq i \leq s$. Or, les p_k, $1 \leq k \leq s$, sont premiers, donc nécessairement p_1 est égal à l'un des p_i, $2 \leq i \leq s$. Cependant, les p_k, $1 \leq k \leq s$, sont par hypothèse deux à deux distincts. On en déduit que

$\alpha_1 = \beta_1$, *et que*

$$p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s} = p_2^{\beta_2} \dots p_s^{\beta_s}$$

On peut alors poursuivre le même processus $s-1$ *fois pour prouver que pour tout* $1 \leq i \leq s$, $\alpha_i = \beta_i$, *ce qui prouve que les deux décompositions sont identiques. Cela assure l'unicité de cette décomposition.*

◈

Ce théorème donne une "structure multiplicative" de $\mathbb{N}$, d'où son nom de théorème fondamental de l'arithmétique. Le fait que 1 n'est pas un nombre premier, par convention, assure l'unicité dans ce théorème.

Nous allons voir quelques applications utiles de ce théorème.

Proposition Soient n et d deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Alors d divise n si, et seulement si, d a les mêmes facteurs premiers que n, avec des exposants inférieurs ou égaux à ceux de n.

Démonstration

On écrit les décompositions en produit de facteurs premiers de n *et* d *:*

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \quad \text{et} \quad d = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}$$

avec $p_1, \dots, p_s$ *des nombres premiers deux à deux distincts, et* $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_s$ *des entiers naturels, éventuellement nuls.*

Si pour tout $1 \leq i \leq s$, $\beta_i \leq \alpha_i$, *alors*

$$\frac{n}{d} = p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \dots p_s^{\alpha_s - \beta_s}$$

Puisque pour tout $1 \leq i \leq s$, $\beta_i \leq \alpha_i$, *la fraction* $\frac{n}{d}$ *est un entier, donc* d *divise* n.

Réciproquement, supposons que d *divise* n. *Il existe donc un entier naturel non nul* k *tel que* $dk = n$. *Tout facteur premier de* d *divise également* n, *donc est un facteur premier de* n.
Si $\beta_1 > \alpha_1$, *alors en simplifiant l'égalité* $dk = n$ *par* $p_i^{\alpha_i}$, *on obtient que*

$$p_1^{\beta_1 - \alpha_1} \dots p_s^{\beta_s} k = p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$$

Comme $\beta_1 > \alpha_i$, p_1 *divise* $p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\beta_s}$. *Par le lemme d'Euclide,* p_1 *divise l'un des* $p_2, \dots, p_s$, *ce qui est impossible car* $p_1, \dots, p_s$ *sont deux à deux distincts. Par conséquent,* $\beta_1 \leq \alpha_1$.
Le même raisonnement appliqué aux autres facteurs premiers montre que pour tout $1 \leq i \leq s$, $\beta_i \leq \alpha_i$.

◈

Proposition Soit n un entier supérieur ou égal à 2, que l'on décompose en produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\beta_s}$$

Alors n admet exactement $(\alpha_1 + 1) \times \dots \times (\alpha_s + 1)$ diviseurs distincts.

Démonstration

D'après le proposition précédente, tout diviseur de n *se décompose de la façon suivante :*

$$p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}$$

avec pour tout $1 \leq i \leq s$, $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$. *Ainsi, il y a au plus autant de diviseurs de* n *que de façons de choisir ces exposants* β_i. *Chacun d'eux peut prendre* $\alpha_i + 1$ *valeurs distinctes, ce qui donne au plus* $(\alpha_1 + 1) \times \dots \times (\alpha_s + 1)$ *possibilités.*
Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, ces possibilités sont bien deux à deux distinctes, d'où le résultat.

◈

Ces résultats ont de nombreuses applications pratiques.

❖ **Liste des diviseurs :**

On peut dresser la liste des diviseurs d'un entier n grâce à sa décomposition en produit de facteurs premiers : on décompose n, puis l'on forme tous les diviseurs possibles. On peut également calculer le nombre de diviseurs, pour vérifier que la liste est complète.

❖ **Réduction de fraction :**

On a vu que pour réduire une fraction $\frac{a}{b}$, il faut chercher un diviseur commun à a et b, et que lorsque a et b sont premiers entre eux, la fraction est sous forme irréductible. Pour obtenir cette forme irréductible directement, on peut utiliser la décomposition de a et b en produit de facteurs premiers. On peut alors simplifier la fraction par tous les facteurs en communs. Quand il n'y en a plus, on obtient alors la forme irréductible.

❖ **PGCD et PPCM :**

On considère deux entiers a et b, et on cherche leur PGCD (plus grand diviseur commun) et leur PPCM (plus petit multiple commun). Pour cela, on décompose a et b en produit de facteurs premiers :

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s} \quad \text{et} \quad b = p_1^{\beta_1} \dots p_s^{\beta_s}$$

Le PGCD est formé des mêmes facteurs premiers, pour lesquels chaque exposant est $\min(\alpha_i, \beta_i)$. Il en est de même avec le PPCM, et chaque exposant est $\max(\alpha_i, \beta_i)$.

6.2.3 Progression arithmétique

Nous allons à présent discuter d'un résultat supplémentaire sur les nombres premiers.

Lorsque l'on examine le crible d'Eratosthène présenté auparavant, on observe que les nombres premiers semblent s'y répartir de façon irrégulière. Cependant, hormis 2 et 5, ils ont tous pour chiffre des unités 1, 3, 7 ou 9. On remarque également que, hormis 2 et 3, ils précèdent ou suivent tous un multiple de 6.

Il semble donc que ces nombres suivent tout de même une certaine "organisation". C'est le sujet du résultat dont nous allons parler ici.

Proposition Hormis pour un nombre fini de nombres premiers p, pour tout entier naturel n non nul, le reste de la division euclidienne de p par n est premier avec n.

Démonstration

On considère un nombre premier p et un entier naturel non nul n. On écrit la division euclidienne de p par n : $p = nq + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$.

Si r n'est pas premier avec n, alors ils admettent un diviseur premier p' en commun. Comme $p = nq + r$, on en déduit que p' divise p et que $p' = p$, car p et p' sont premiers.

Ainsi, r n'est pas premier avec n qu'à l'unique condition que p soit un facteur premier de n. Or, n n'admet qu'un nombre fini de facteurs premiers. Il n'existe donc qu'un nombre fini de nombres premiers dont le reste par n n'est pas premier avec n.

◈

Cette proposition confirme ce que nous avons observé sur le crible. En effet, 2 et 5 sont les deux facteurs premiers de 10, et 2 et 3 sont les deux facteurs premiers de 6. Il est même plus général.

Il énonce que, en dehors d'un certain nombre fini, tous les nombres premiers se trouvent dans des "classes" de nombres qui ont un certain reste par n. Ces classes sont en progression arithmétique, puisque tous leurs éléments sont distants d'un multiple de n. Elles portent le nom de "classes de congruence modulo n", mais cela ne concerne pas cette leçon.

Il reste une question : certes les nombres premiers se répartissent dans ces classes, mais comment ? C'est le théorème suivant, donné à titre culturel, qui donne le résultat.

Théorème (Théorème de progression arithmétique de Dirichlet) Soit n un entier naturel non nul. Chaque classe de congruence modulo n contient une infinité de nombres premiers, et ils y sont équitablement répartis.

7 PGCD et PPCM dans $\mathbb{Z}$

- **Niveau :** troisième, Terminale experte
- **Pré-requis :** multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$, division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, nombres premiers, décomposition en produit de facteurs premiers, congruences dans $\mathbb{Z}$

7.1 PGCD dans $\mathbb{Z}$

7.1.1 Définition

Définition Soient a et b deux entiers non tous les deux nuls. On appelle PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de a et b, et on note $\text{pgcd}(a,b)$, le plus grand diviseur commun à a et b.

Remarques
- 1 est un diviseur de tout nombre entier, et comme a et b sont tous les deux non nuls, il existe un nombre fini de diviseurs communs à a et b. Cela justifie que leur PGCD est alors bien défini.
- Par définition, le PGCD de deux entiers relatifs est un entier naturel non nul.

Définition On dit que deux entiers a et b sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1.

Proposition Soient a et b deux entiers naturels non tous les deux nuls. Alors a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, $\text{pgcd}(a,b) = 1$.

Démonstration
Si a et b sont premiers entre eux, leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1, donc le plus grand d'entre eux est 1. Ainsi, pgcd$(a,b) = 1$.
Réciproquement, supposons que pgcd$(a,b) = 1$. 1 et -1 divisent tout entier, et sont donc des diviseurs communs à a et b. Puisque 1 est le plus grand d'entre eux, par hypothèse, il est le seul diviseur positif commun à a et b. Supposons que a et b possède un diviseur commun $d < -1$. Alors $-d$ divise a et b, et $-d > 1$, ce qui est impossible. Par conséquent, 1 et -1 sont les seuls diviseurs communs à a et b, ce qui assure que a et b sont premiers entre eux.

◈

7.1.2 Algorithme d'Euclide et théorème de Bézout

Pour trouver le PGCD de deux entiers, on peut dresser la liste de leurs diviseurs, et identifier le plus grand de leurs diviseurs communs. Cependant, cela peut être particulièrement long pour des entiers de valeur absolue trop grande. On va alors présenter un algorithme de calcul du PGCD, qui a à la fois une utilité pratique et théorique.

Lemme Soient a et b deux entiers, avec b non nul. On note $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b. Alors

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$$

Démonstration

Soit d un diviseur commun à a et b. Comme $r = a - bq$, d divise également r. d est alors un diviseur commun à b et r.

Soit D un diviseur commun à b et r. Puisque $a = bq + r$, D divise aussi a. Il est donc un diviseur commun à a et b.

Les diviseurs communs à a et b sont donc identiques aux diviseurs communs à b et r. En particulier, ils ont le même plus grand diviseur commun, d'où $pgcd(a, b) = pgcd(b, r)$.

◈

Théorème (Algorithme d'Euclide) Soient a et b deux entiers avec b non nul. On écrit $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b. On définit les suites (a_n), (b_n), (q_n) et (r_n) comme suit.
On note $a_0 = a$, $b_0 = b$, $r_0 = r$ et $q_0 = q$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note alors $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = r_n$ et q_n, r_n le quotient et le reste de la division euclidienne de a_n par b_n.
Alors la suite (r_n) atteint 0, et $\text{pgcd}(a, b)$ est alors le dernier terme non nul de cette suite.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après le lemme précédent,

$$pgcd(a_{n+1}, b_{n+1}) = pgcd(b_n, r_n) = pgcd(a_n, b_n)$$

La suite $(pgcd(a_n, b_n))_n$ est donc constante, égale à $pgcd(a, b)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $r_n > 0$, r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de a_{n+1} par b_{n+1}, ie de b_n par r_n. Ainsi, si $r_n > 0$, alors $0 \leq r_{n+1} < r_n$. La suite (r_n) est alors une suite d'entiers naturels strictement décroissante, donc elle finit par atteindre 0.

On note alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $r_{N+1} = 0$ et $r_n > 0$ pour $n < N + 1$. r_{N+1} est alors le reste de la division euclidienne de b_N par r_N, ie $b_N = q_N r_N + r_{N+1} = q_N r_N$. r_N est alors un diviseur de b_N, et donc un diviseur commun à r_N et b_N. Il s'agit du plus grand diviseur de r_N, donc $pgcd(b_N, r_N) = r_N$. Comme $b_N = a_{N+1}$ et $r_N = b_{N+1}$, d'après la remarque faite précédemment, $pgcd(a, b) = pgcd(b_N, r_N) = r_N$.

◈

On peut coder cet algorithme en langage Python :

```
def euclide(a,b):
    r=a%b
    while r>0 :
        (a,b)=(b,r)
        r=a%b
    return(b)
```

Théorème Soient a et b, avec b non nul. Alors il existe des entiers u et v tels que

$$au + bv = \text{pgcd}(a, b)$$

Une telle relation est appelée relation de Bézout entre a et b.

La preuve de ce résultat découle de l'algorithme d'Euclide étendu. C'est un algorithme qui permet d'assurer l'existence des entiers u et v, ainsi que de les calculer explicitement.

Algorithme d'Euclide étendu : On considère deux entiers a et b, avec b non nul. On note (r_n) et (q_n) les suites définies par l'algorithme d'Euclide classique, et on note N l'entier tel que $r_N = \text{pgcd}(a, b)$. On définit alors deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $u_1 = 0$, $v_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} = u_{n-1} - q_n u_n \quad v_{n+1} = v_{n-1} - q_n v_n$$

On remarque alors que $r_0 = au_0 + bv_0$, et $r_1 = au_1 + bv_1$. De plus, on montre par une récurrence double que pour tout $0 \leq N$, $r_n = au_n + bv_n$. En particulier, $\text{pgcd}(a, b) = r_N = au_N + bv_N$, ce qui prouve le résultat.

Remarque Il n'y a jamais unicité des entiers u et v. Plus précisément, il existe une infinité de tels entiers. En effet, si u et v sont de tels entiers, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$a(u - kb) + b(v + ka) = au + bv - akb + bka = au + bv = \text{pgcd}(a, b)$$

Théorème (Théorème de Bachet-Bézout) Soient a et b deux entiers, avec b non nul. Alors a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration

Si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Le résultat découle alors du théorème précédent. Réciproquement, supposons qu'il existe des entiers u et v tels que $au+bv = 1$. Soit d un diviseur commun à a et b. En particulier, d divise au et bv, donc il divise 1. On en déduit que $d = 1$ ou $d = -1$. 1 et -1 divisent tous les entiers, si bien que ce sont les seuls diviseurs communs à a et b, ce qui assure qu'ils sont premiers entre eux.

◈

Remarque Ce résultat est souvent appelé simplement théorème de Bézout. Cependant, cela peut également renvoyer à un autre théorème du même nom, qui porte sur les points d'intersections de courbes algébriques planes. Au lycée, il n'y a jamais d'ambiguïté, donc on parlera simplement du théorème de Bézout.

7.1.3 Propriétés

Proposition Soient a et b deux entiers, avec b non nul. On note $d = \text{pgcd}(a, b)$. Alors il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$.

Démonstration

Comme d divise a et b, il existe des entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Puisque $d = pgcd(a, b)$, il existe des entiers u et v tels que $au+bv = d$. On a alors $da'u+db'v = d$, et comme $d \geq 1$, $a'u+b'v = 1$. D'après le théorème de Bézout, a' et b' sont alors premiers entre eux.

◈

Proposition On considère a et b deux entiers, avec b non nul. Si d divise a et b, alors il divise également $\text{pgcd}(a, b)$.

Démonstration
Soit d un diviseur commun à a et b. On considère une relation de Bézout $au + bv = pgcd(a, b)$. Comme d divise a et b, il divise au et bv, et donc pgcd(a, b).

◈

Remarque La définition du PGCD ne permet que de conclure que $d \leq \text{pgcd}(a, b)$. Ce résultat est donc plus fort.

Proposition Soient a et b des entiers non nuls.

- pgcd$(a, b) = \text{pgcd}(b, a)$
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, pgcd$(ka, kb) = |k|\text{pgcd}(a, b)$
- pgcd$(a, b) = |b| \Leftrightarrow b$ divise a

Démonstration

- *Trivial, par définition du PGCD.*
- *Soit $k \in \mathbb{Z}$. On note $d = pgcd(a, b)$, et $D = pgcd(ka, kb)$. Comme d divise a et b, $|k|d$ divise $|k|a$ et $|k|b$. Ainsi, $|k|d$ divise D. Il existe alors un entier u tel que $D = |k|du$. Or, D divise $|k|a$ et $|k|b$, donc du divise a et divise b. Il divise donc d. On en déduit que u divise 1, ie $u = 1$, ou $u = -1$. Si $u = -1$, alors $D = -|k|d \leq 0$, ce qui n'est pas. Ainsi, $u = 1$ et $D = |k|d$.*
- *Si $pgcd(a, b) = |b|$, alors $|b|$ est un diviseur de a, par définition, donc b aussi. Si b divise a, alors $|b|$ est un diviseur commun à a et b. C'est le plus grand diviseur de b, donc aussi le plus grand des diviseurs communs à a et b.*

◈

Lemme (Lemme de Gauss) Soient a, b et c des entiers non nuls. Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration
D'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$. Ainsi, $acu + bcv = c$. Or, a divise bc, par hypothèse, donc il divise acu et bcv, et donc divise c.

◈

Corollaire Soient a, b et c des entiers non nuls. Si a et b sont premiers entre eux, et si a divise c et b divise c, alors ab divise c.

Démonstration
Comme a divise c et b divise c, il existe des entiers k et k' tels que $ka = c = k'b$. Ainsi, a divise $k'b$, avec a et b premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss, a divise k'. Il existe alors un entier u tel que $k' = au$. On a alors $ka = abu = c$, donc ab divise c.

◈

Proposition Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On note $a = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{j=1}^{s} {p_j}^{\beta_j}$ les décompositions en produits de facteurs premiers de a et b. Si on note pour tout entier $1 \leq k \leq s$, $\delta_k = \min(\alpha_k, \beta_k)$, alors

$$\text{pgcd}(a, b) = \prod_{k=1}^{s} {p_k}^{\delta_k}$$

Démonstration
Commençons par remarquer que, quitte à considérer que les α_i ou les β_j peuvent être nuls, il est raisonnable d'écrire les décompositions sous cette forme.
Le produit $\prod_{k=1}^{s} {p_k}^{\delta_k}$ est, par définition, un diviseur de $D = pgcd(a,b)$. On écrit $D = \prod_{k=1}^{s} {p_k}^{\gamma_k}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de D. Encore une fois, quitte à considérer certains exposants comme étant nuls, il est raisonnable de l'écrire sous cette forme.
Comme $\prod_{k=1}^{s} {p_k}^{\delta_k}$ divise D, on a pour tout $1 \leq k \leq s$, $\delta_k \leq \gamma_k$. De plus, $\prod_{k=1}^{s} {p_k}^{\delta_k}$ divise D, donc $\prod_{k=2}^{s} {p_k}^{\delta_k}$ divise ${p_1}^{\gamma_1-\delta_1} \prod_{k=2}^{s} {p_k}^{\gamma_k}$.
Supposons par l'absurde que $\gamma_1 > \delta_1$. Alors p_1 divise $\prod_{k=2}^{s} {p_k}^{\delta_k}$. Les p_k sont premiers et deux à deux distincts, donc p_1 est premier avec chacun d'eux. D'après le lemme de Gauss (appliqué plusieurs fois), p_1 divise l'un des p_k, avec $2 \leq k \leq s$. Par hypothèse, ceci est faux. Ainsi, on a nécessairement $\gamma_1 = \delta_1$.
On en déduit que $\prod_{k=2}^{s} {p_k}^{\delta_k}$ divise $\prod_{k=2}^{s} {p_k}^{\gamma_k}$. On réitère alors le même raisonnement pour montrer que pour tout $1 \leq k \leq s$, on a $\gamma_k = \delta_k$, ce qui prouve l'égalité voulue.

◈

7.2 PPCM dans $\mathbb{Z}$

7.2.1 Définition

Définition On appelle PPCM de deux entiers non nuls a et b, et on note $\text{ppcm}(a,b)$, le plus petit des multiples positifs communs à a et b.

Remarque Pour deux entiers non nuls a et b, $|ab|$ est un multiple positif commun à a et b, donc le PPCM est bien défini.

7.2.2 Lien avec le PGCD

Proposition Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Il existe deux entiers a' et b' premiers entre eux tels que

$$\text{ppcm}(a,b) = a'b'\text{pgcd}(a,b)$$

Démonstration
On note $M = ppcm(a,b)$ et $d = pgcd(a,b)$. On sait qu'il existe des entiers a' et b' premiers entre eux tels que $a = da'$ et $b = db'$. On remarque que $da'b'$ est donc un multiple commun de a et b.
Soit m un multiple commun de a et b. Il existe alors des entiers k et k' tels que $m = ak = bk'$. Ainsi, $m = da'k = db'k'$, donc $a'k = b'k'$. Or, a' et b' sont premiers entre eux, donc par le lemme de Gauss, a' divise k'. Il existe alors un entier q tel que $k' = a'q$. On a alors $m = db'k' = db'a'q$. m est donc un multiple de $da'b'$. En particulier, $m \geq da'b'$. $da'b'$ est donc le plus petit des multiples communs à a et b, d'où $M = da'b'$.

◈

Proposition Soient deux entiers naturels a et b. Alors

$$\text{ppcm}(a,b) \times \text{pgcd}(a,b) = ab$$

Démonstration
On a vu que les entiers $a' = \frac{a}{pgcd(a,b)}$ *et* $b' = \frac{b}{pgcd(a,b)}$ *sont tels que* $ppcm(a,b) = a'b'pgcd(a,b)$. *On en déduit que* $ppcm(a,b) = \frac{ab}{pgcd(a,b)}$, *d'où le résultat.*

◈

Proposition Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On note $a = \prod_{i=1}^{s} {p_i}^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{j=1}^{s} {p_j}^{\beta_j}$ les décompositions en produits de facteurs premiers de a et b. Si on note pour tout entier $1 \leq k \leq s$, $\gamma_k = \max(\alpha_k, \beta_k)$, alors

$$\text{ppcm}(a,b) = \prod_{k=1}^{s} {p_k}^{\gamma_k}$$

Démonstration
Pour tous réels x *et* y, *on a* $x + y = \min(x,y) + \max(x,y)$. *En reprenant les notations précédentes, on a alors pour tout* $1 \leq k \leq s$, $\alpha_i + \beta_i = \delta_i + \gamma_i$. *Comme* $pgcd(a,b) \times ppcm(a,b) = ab$, *en écrivant les décompositions en produit de facteurs premiers de ces entiers, on obtient le résultat voulu.*

◈

7.2.3 Propriétés

Proposition Soient a et b deux entiers non nuls. Si m est un multiple de a et de b, alors il est un multiple de $\text{ppcm}(a,b)$.

Démonstration
On a vu qu'il existe des entiers premiers entre eux a' *et* b' *tels que* $ppcm(a,b) = a'b'pgcd(a,b)$, $a = a'pgcd(a,b)$ *et* $b = b'pgcd(a,b)$.
Soit m *un multiple commun de* a *et* b. *Il existe alors des entiers* k *et* k' *tels que* $m = ak = bk'$. *Ainsi,* $m = pgcd(a,b)a'k = pgcd(a,b)b'k'$, *donc* $a'k = b'k'$. *Or,* a' *et* b' *sont premiers entre eux, donc par le lemme de Gauss,* a' *divise* k'. *Il existe alors un entier* q *tel que* $k' = a'q$. *On a alors* $m = pgcd(a,b)b'k' = pgcd(a,b)b'a'q = ppcm(a,b)q$. m *est donc un multiple de* $ppcm(a,b)$.

◈

Proposition Soient a et b deux entiers non nuls. Alors

- $\text{ppcm}(a,b) = \text{ppcm}(b,a)$
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\text{ppcm}(ka,kb) = |k|\text{ppcm}(a,b)$
- $\text{ppcm}(a,b) = |b| \Leftrightarrow a$ divise b

Démonstration

- *Trivial, par définition du PPCM.*
- *Soit* $k \in \mathbb{Z}$. *On a* $ppcm(ka,kb) \times pgcd(ka,kb) = ka \times kb = k^2ab$, *et* $ppcm(a,b) \times pgcd(a,b) = ab$, *donc*

  $$ppcm(ka,kb) \times pgcd(ka,kb) = k^2 \times ppcm(a,b) \times pgcd(a,b) = |k|^2 \times ppcm(a,b) \times pgcd(a,b)$$

  Or, $pgcd(ka,kb) = |k|pgcd(a,b)$, *donc*

  $$|k|ppcm(ka,kb)pgcd(a,b) = |k|^2 ppcm(a,b)pgcd(a,b)$$

  Comme $pgcd(a,b) \geq 1$ *et* $k \neq 0$, *on en déduit que* $ppcm(ka,kb) = |k|ppcm(a,b)$.

- *Si ppcm$(a,b) = |b|$, alors $|b|$ est un multiple de a, donc b aussi. Réciproquement, si a divise b, alors $|b|$ est un multiple commun de a et b. Comme c'est le plus petit multiple positif de b, nécessairement ppcm$(a,b) = |b|$.*

◈

7.3 Applications

7.3.1 Équations diophantiennes

Définition On appelle équation diophantienne toute équation polynomiale, à une ou plusieurs inconnues, à coefficients entiers, et dont on cherche des solutions entières.

Au lycée, on s'intéresse particulièrement aux équations de le forme $ax + by = c$, d'inconnues x et y, avec a, b et c des entiers non nuls.

Proposition Soient a, b et c des entiers non nuls. Alors l'équation $ax + by = c$, d'inconnues x et y, admet des solutions entière si, et seulement si, pgcd(a,b) divise c.

Démonstration
Supposons qu'il existe une solution (x_0, y_0). Alors $ax_0 + by_0 = c$. Comme pgcd(a,b) divise a et b, il divise ax_0 et bx_0, donc il divise c.
Réciproquement, supposons que pgcd(a,b) divise c. Il existe alors un entier k tel que $c = k$pgcd(a,b). On sait qu'il existe des entiers u et v tels que $au + bv =$ pgcd(a,b). Ainsi, $aku + bkv = k$pgcd$(a,b) = c$, donc le couple (ku, kv) est solution.

◈

Méthode de résolution : Ce type d'équation, lorsqu'elle admet des solutions, en admet une infinité. On présente ici une méthode de résolution.

On procède comme suit. On calcule le PGCD de a et b, et on s'assure que l'équation admet des solutions. On divise l'équation par pgcd(a,b), ce qui permet de se ramener au cas où a et b sont premiers entre eux. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation avec l'algorithme d'Euclide étendu. Enfin, par un "changement de variable", on se ramène à une équation "homogène" $ax + by = 0$, que l'on résout avec le lemme de Gauss. Ce procédé n'est pas sans rappeler la méthode de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1, à coefficients constants, vue au lycée.

On considère par exemple l'équation $18x - 60y = 24$.

- On calcule le PGCD de 18 et 60. Ici, on a $18 = 2\times3^2$ et $60 = 2^2\times3\times5$, donc pgcd$(18,60) = 2\times3 = 6$. On vérifie que 6 divise 24 : l'équation admet des solutions entières.
- En divisant par 6, l'équation est équivalente à $3x - 10y = 4$. On remarque alors que 3 et 10 sont premiers entre eux.
- On cherche une solution particulière de $3x-10y = 1$. Ici, on remarque que $3\times(-3)-10\times(-1) = 1$, ce que l'on peut retrouver par l'algorithme d'Euclide étendu. On en déduit que $3\times(-12)-10\times(-4) = 4$, ce qui fournit une solution particulière de $3x - 10y = 4$.
- On considère une solution (x,y) de $3x - 10y = 4$. Alors $3x - 10y = 4 = 3\times(-12) - 10\times(-4)$, d'où
$$3(x+12) = 10(y+4)$$
Ainsi, 3 divise $10(y+4)$. Or, 3 et 10 sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss, 3 divise

$(y+4)$. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $3k = y+4$, ie $y = 3k-4$. Comme $3x - 10y = 4$, on en déduit que

$$3x = 4 + 10(3k-4) = 30k - 36$$

ie $x = 10k - 12$.

- ❖ Réciproquement, on vérifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$3(10k-12) - 10(3k-4) = 30k - 36 - 30k + 40 = 4$$

- ❖ Il suffit alors de remultiplier par 6. Les solutions de $18x - 60y = 24$ sont donc les couples $(60k - 72, 18k - 24)$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

7.3.2 Théorème des restes chinois

Théorème (Théorème des restes chinois) Soient deux entiers n et m premiers entre eux. Alors pour tout couple d'entiers (a,b), le système d'équations

$$\begin{cases} x \equiv a(n) \\ x \equiv b(m) \end{cases}$$

admet une solution $x_0 \in \mathbb{Z}$.
Les solutions sont alors les entiers de la forme $x_0 + knm$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration
On considère un couple d'entiers (a,b). Comme n et m sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe des entiers u et v tels que $nu + mv = 1$. On considère alors l'entier $x_0 = bnu + amv$. On a alors $x_0 = b(1-mv) + amv = b + mv(a-b)$, donc $x_0 \equiv b(m)$. De même, $x_0 = bnu + a(1-nu) = a + nu(b-a)$, donc $x_0 \equiv a(n)$. Cela donne une solution, au système.
Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de ce système. Alors $x - x_0 \equiv 0(n)$ et $x - x_0 \equiv 0(m)$. Ainsi, n et m divisent $x - x_0$. Or, comme n et m sont premiers entre eux, par le corollaire du lemme de Gauss, nm divise $x - x_0$. Il existe alors un entier k tel que $x - x_0 = knm$, ie $x = x_0 + knm$. Réciproquement, on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_0 + knm \equiv x_0(n)$ et $x_0 + knm \equiv x_0(m)$, ce qui en fait une solution du système.

◈

Remarque Ce théorème est généralisable à un système d'équations à plus de deux inconnues. Si les entiers $m_1, \ldots, m_s$ sur lesquelles on considère les congruences sont deux à deux premiers entre eux, alors il existe une infinité de solutions au système, qui sont toutes égales modulo le produit $M = m_1 \times \ldots \times m_s$. Il s'interprète également dans le cadre des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: l'anneau produit $\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z}$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$.

8 Congruences dans $\mathbb{Z}$

- **Niveau :** Terminale maths expertes
- **Pré-requis :** division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, multiples et diviseurs dans $\mathbb{Z}$, nombres premiers, PGCD dans $\mathbb{Z}$, théorème de Bézout, lemme de Gauss, raisonnement par récurrence

8.1 Congruences dans $\mathbb{Z}$

8.1.1 Relation de congruence

Définition Soient a et b deux entiers, et n un entier naturel non nul. On dit que a est congru à b modulo n si ils ont le même reste dans la division euclidienne par n.
On note alors $a \equiv b \pmod{n}$, ou $a \equiv b\ (n)$ ou encore $a \equiv b\ [n]$.

Proposition Soient a, b deux entiers et n un entier naturel non nul. Alors :

$$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow n \text{ divise } b-a$$

Démonstration
On écrit les divisions euclidiennes de a et b par n. Il existe des entiers q, q', r et r' tels que $a = qn + r$, avec $0 \leq r < n$ et $b = q'n + r'$, avec $0 \leq r' < n$. On a alors $r = a - qn$ et $r' = b - q'n$.
Supposons que $a \equiv b\ (n)$, ie que $r = r'$. Alors $a - qn = b - q'n$, et $b - a = n(q' - q)$. Ainsi, n divise $b - a$.
Réciproquement, supposons que n divise $b - a$. Il existe alors un entier k tel que $nk = b - a$. On a alors :

$$nk = b - a = (q' - q)n + (r' - r) \Rightarrow n(k - q' + q) = r' - r$$

$r' - r$ est donc un multiple de n. Or, comme $0 \leq r < n$ et $0 \leq r' < n$, $-n < r' - r < n$. Ainsi, nécessairement $r' - r = 0$, ie $r = r'$ et $a \equiv b\ (n)$. ◆

Remarque En particulier, a est divisible par n si et seulement si $a \equiv 0\ (n)$.

8.1.2 Propriétés

Proposition Soient a, b, c des entiers et n un entier naturel non nul.

- $a \equiv a\ (n)$. On dit que la relation est réflexive.
- $a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow b \equiv a\ (n)$. On dit que la relation est symétrique.
- $a \equiv b\ (n)$ et $b \equiv c\ (n) \Rightarrow a \equiv c\ (n)$. On dit que la relation est transitive.

Démonstration

On note r, r' et r'' les restes respectifs de a, b et c modulo n.

- *On a trivialement $r = r$, donc $a \equiv a\ (n)$.*
- *On a $r = r' \Leftrightarrow r' = r$, donc $a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow b \equiv a\ (n)$.*
- *Si $r = r'$ et $r' = r''$, alors $r = r''$, d'où le résultat.*

◈

Remarques

- Le fait que la relation de congruence modulo n soit réflexive, symétrique et transitive fait de cette relation une relation d'équivalence.
- Puisque la relation de congruence est symétrique, on pourra à la fois dire "a congru à b", "b congru à a" et "a et b congrus".

Proposition Soient a, b, c, d des entiers et n un entier naturel non nul tels que $a \equiv b\ (n)$ et $c \equiv d\ (n)$. Alors :

- $a + c \equiv b + d\ (n)$
- $ac \equiv bd\ (n)$
- $a^k \equiv b^k\ (n)$ pour tout $k \in N$.

On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition et la multiplication.

Démonstration

- *Par hypothèse, $b - a$ et $d - c$ sont des multiples de n, donc $(b - a) + (d - c) = (b + d) - (a + c)$ également. Ainsi, $a + c \equiv b + d\ (n)$.*
- *Comme $a \equiv b\ (n)$ et $c \equiv d\ (n)$, il existe des entiers k et k' tels que $b - a = kn$ et $d - c = k'n$, ie $b = a + kn$ et $d = c + k'n$. On a alors :*

$$bd = (a + kn)(c + k'n) = ac + ak'n + ckn + kk'n^2 = ac + n(ak' + ck + kk'n)$$

Par conséquent, $bd - ac = n(ak' + ck + kk'n)$, donc $bd - ac$ est un multiple de n, d'où $ac \equiv bd\ (n)$.

- *En utilisant la propriété précédente, on a $a^2 \equiv b^2\ (n)$, puis $a^3 \equiv b^3\ (n)$, et par une récurrence immédiate, $a^k \equiv b^k\ (n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

◈

8.2 Ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

8.2.1 Définitions et propriétés

Soit n un entier naturel non nul.

Définition On appelle classe de congruence d'un entier a modulo n l'ensemble des entiers qui sont congrus à a modulo n. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'entier n, on note $\overline{a}$ cette classe de congruence.

Proposition Soit a un entier. Alors $\overline{a}$ est l'ensemble des entiers de la forme $a + kn$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration

Soit b un entier congru à a modulo n. Alors $b - a$ est un multiple de n, donc il existe un entier k tel que $b - a = kn$, ie $b = a + kn$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(a + kn) - a = kn$ est un multiple de n, donc $a + kn$ est congru à a modulo n. ◈

Définition On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes de congruences modulo n, ie $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{a}, a \in \mathbb{Z}\}$.

Proposition Les classes de congruences modulo n sont soit confondues, soient disjointes.

Démonstration
Soient a et b deux entiers. Supposons que $\overline{a}$ et $\overline{b}$ ne soient pas disjointes. Il existe alors un entier m qui est à la fois congru à a et à b modulo n.
Pour tout $x \in \overline{a}$, on a alors $x \equiv a\ (n)$, $a \equiv m\ (n)$ et $m \equiv b\ (n)$, donc par transitivité, $x \equiv b\ (n)$, ie $x \in \overline{b}$. Ainsi, $\overline{a} \subset \overline{b}$. On montre par le même raisonnement que $\overline{b} \subset \overline{a}$. Par conséquent, $\overline{a} = \overline{b}$. ◈

Remarque On en déduit que les classes de congruences modulo n partitionnent $\mathbb{Z}$, ie $\mathbb{Z}$ est la réunion disjointe de ces classes.

Proposition $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

Démonstration
Par définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a clairement $\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Soit $a \in \mathbb{Z}$. On note r le reste de la division euclidienne de a par n. Alors $a \equiv r\ (n)$ donc $r \in \overline{a}$, et $\overline{a} = \overline{r}$.
Or, r est le reste de la division euclidienne de a par n, donc $0 \leq r < n$. Ainsi, $\overline{r} \in \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$, d'où $\overline{a} \in \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$, et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$.
Finalement, $\{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\} \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subset \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$, donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \dots, \overline{n-1}\}$.
◈

8.2.2 Opérations

Le fait que la relation de congruence soit compatible avec l'addition et la multiplication permet de définir correctement des opérations sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition Soient a, b des entiers et k un entier naturel.
- $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$
- $\overline{a} - \overline{b} = \overline{a-b}$
- $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{ab}$
- $\overline{a}^k = \overline{a^k}$

Proposition Ces opérations sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication sur $\mathbb{Z}$: commutativité, associativité, éléments neutres, distributivité.

Démonstration *Il suffit d'utiliser les définitions et ces propriétés dans $\mathbb{Z}$.* ◈

Définition Soit a un entier. On dit que $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si il existe un entier b tel que $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{1}$. On dit alors que $\overline{b}$ est un inverse de $\overline{a}$ (il est en fait unique).

Proposition Soit a un entier. Alors $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si $\text{PGCD}(a, n) = 1$, ie si et seulement si a est premier avec n.

Démonstration
Supposons que $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il existe alors un entier b tel que $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{ab} = \overline{1}$. En particulier, $1 \equiv ab\ (n)$, donc $ab-1$ est un multiple de n. Il existe alors un entier k tel que $ab-1 = kn$, ie $ab-kn = 1$. D'après le théorème de Bézout, a et n sont alors premiers entre eux.

Réciproquement, supposons que a et n sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe alors deux entiers u et v tels que $au + nv = 1$, ie $au - 1 = -vn$. Ainsi, $au - 1$ est un multiple de n, donc $au \equiv 1\ (n)$. Par conséquent, $1 \in \overline{au}$, donc $\overline{1} = \overline{au} = \overline{a} \times \overline{u}$. $\overline{a}$ est donc inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et $\overline{u}$ en est un inverse.

◈

Remarques ❖ On note $\phi(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n qui sont premiers avec n. $\phi(n)$ est donc le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Cette fonction ϕ est appelé indicatrice d'Euler.

❖ Trouver un inverse de $\overline{a}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ revient à trouver deux entiers u et v tels que $au + nv = 1$, ce qui se fait à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu.

8.3 Applications

8.3.1 Critères de divisibilité

Au collège, on étudie les critères de divisibilité par 3, par 9 et par 11, sans les démontrer. Les congruences permettent de le faire. On rappelle ces critères.

Proposition ❖ Un entier est divisible par 3 (resp. par 9) si et seulement si la somme des ses chiffres en base 10 est divisible par 3 (resp. par 9).

❖ Un entier est divisible par 11 si et seulement la différence de la somme de ces chiffres de rangs impairs et de la somme de ces chiffres de ranges pairs (en base 10) est divisible par 11.

Démonstration *Soit a un entier, écrit en base 10 sous la forme $a = \sum_{k=0}^{s} a_k 10^k$, où $s \in \mathbb{N}$ et pour tout $0 \leq k \leq s$, $a_k \in \{0, \dots, 9\}$.*

❖ *Comme $10 = 9 + 1$, $10 \equiv 1\ (3)$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $10^m \equiv 1^m\ (3)$ et $10^m \equiv 1\ (3)$. En utilisant les la compatibilité de la relation de congruence avec l'addition et la multiplication, on obtient que :*

$$a = \sum_{k=0}^{s} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{s} a_k\ (3)$$

Ainsi, a est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres l'est. Comme $10 \equiv 1\ (9)$, le même résultat est vraie pour la divisibilité par 9.

❖ *On a $10 \equiv -1\ (11)$, donc on a pour tout $m \in \mathbb{N}$: $10^m \equiv 1\ (11)$ si m est pair, et $10^m \equiv -1\ (11)$ si m est impair. Il suit que :*

$$a = \sum_{k=0}^{s} a_k 10^k = \sum_{k=0,\ k\ pair}^{s} a_k 10^k + \sum_{k=0,\ k\ impair}^{s} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0,\ k\ pair}^{s} a_k - \sum_{k=0,\ k\ impair}^{s} a_k\ (11)$$

Il suit que a et cette différence ont le même reste modulo 11, d'où le résultat.

◈

En s'inspirant des critères de divisibilité par 2, 4 (voire 8), on peut déterminer un critère de divisibilité par 2^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On sait qu'un nombre N est divisible par 4 si, et seulement si, le nombre formé par ses deux derniers chiffres est lui-même divisible par 4. Ce nombre formé par les deux derniers chiffres est le reste de la division euclidienne de N par 100. On remarque que $4 = 2^2$ et $100 = 10^2$.

Pour le critère par 2, on regarde le dernier chiffre, ce qui revient à regarder le reste dans la divsion par 10. En remarquant que $2 = 2^1$ et $10 = 10^1$, on voit se répéter le même schéma que pour le critère par 4. Essayons de le généraliser.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $10^k = (2\times 5)^k = 2^k \times 5^k$. On écrit la division euclidienne de N par 10^k : $N = q \times 10^k + r = q \times 2^k \times 5^k + r$, avec $q, r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r < 10^k$. Si N est un multiple de 2^k, alors il en est de même de r, et réciproquement. Ce reste r est alors le nombre formé par les k derniers chiffres de N. Ainsi, N est un multiple de 2^k si, et seulement si, le chiffre formé par ses k derniers chiffres est aussi un multiple de 2^k.

Remarque Ce raisonnement fonctionne également pour 5^k, même si ce résultat est beaucoup moins utilisé.

8.3.2 Petit théorème de Fermat

Théorème (Petit théorème de Fermat) Soient p un nombre premier et a un entier naturel. Alors $a^p \equiv a\ (p)$. Si de plus a n'est pas un multiple de p, alors $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

Démonstration

On procède par récurrence sur l'entier a. Pour $a \in \mathbb{N}$, on note $P(a)$ la propriété : "$a^p \equiv a\ (p)$".

- ***Initialisation :*** *On a $0^p = 0$, donc $0^p \equiv 0\ (p)$, et $P(0)$ est vraie.*
- ***Hérédité :*** *Soit $a \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons que $P(a)$ est vraie, et montrons que $P(a+1)$ est alors vraie. On a :*

$$(a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k = a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k$$

Soit $k \in \{1, \dots, p-1\}$. On a :

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = p \times \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$$

Par conséquent :

$$k\binom{p}{k} = p \times \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = p \times \frac{(p-1)!}{(k-1)!\big((p-1)-(k-1)\big)!} = p\binom{p-1}{k-1}$$

Ainsi, p divise $k\binom{p}{k}$. Or, p est premier et $1 \leq k \leq p-1$, donc p et k sont premiers entre eux. Par le lemme de Gauss, p divise donc $\binom{p}{k}$, et $\binom{p}{k} \equiv 0\ (p)$. On en déduit que :

$$(a+1)^p = a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k \equiv a^p + 1\ (p)$$

Par hypothèse de récurrence, $a^p \equiv a\ (p)$, donc $(a+1)^p \equiv a+1\ (p)$. $P(a+1)$ est alors vraie, et la propriété est héréditaire.

- ***Conclusion :*** *$P(0)$ est vraie, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, la propriété est héréditaire, donc par le principe de récurrence, $P(a)$ est vraie pour tout $a \in \mathbb{N}$.*

Cela démontre la première partie du théorème.

Supposons à présent que a n'est pas un multiple de p. Comme p est premier, a et p sont donc premiers entre eux. D'après le résultat précédent, on a $a^p \equiv a\ (p)$, donc p divise $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Or, a et p sont premiers entre eux, donc d'après le lemme de Gauss p divise $a^{p-1} - 1$, ie $a^{p-1} \equiv 1\ (p)$.

◈

8.3.3 Théorème des restes chinois

Théorème (Théorème des restes chinois) Soient n, m deux entiers naturels premiers entre eux, et soient a, b deux entiers. Alors le système d'équation

$$\begin{cases} x \equiv a\ (n) \\ x \equiv b\ (m) \end{cases}$$

admet une solution $x_0 \in \mathbb{Z}$.
Les solutions sont alors les entiers de la forme $x_0 + knm$, où $k \in \mathbb{Z}$. La solution est donc unique modulo nm.

Démonstration
Comme n et m sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $nu + mv = 1$. On définit $x_0 = bnu + amv$. Montrons que x_0 est solution du système.
Comme $nu+mv = 1$, $nu = 1-mv$ et $mv = 1-nu$. On a donc $x_0 = b(1-mv)+amv = b+mv(a-b) \equiv b\ (m)$. De même, $x_0 = bnu + a(1-nu) = a + nu(b-a) \equiv a\ (n)$. x_0 est donc une solution du système.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_0 + knm \equiv x_0\ (n)$ et $x_0 + knm \equiv x_0\ (m)$, donc $x_0 + knm$ est solution du système.
Réciproquement, soit x une solution de ce système. Alors $x \equiv x_0\ (n)$, donc $x - x_0$ est un multiple de n. De même, $x - x_0$ est un multiple de m. Comme n et m sont premiers entre eux, cela implique que $x - x_0$ est un multiple de nm. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = knm$, ie $x = x_0 + knm$.

◈

8.3.4 Nombres premiers

On fixe un entier naturel non nul n. On a vu que les classes de congruences modulo n partitionnent $\mathbb{Z}$. On cherche à savoir comment les nombres premiers se répartissent dans ces classes de congruences.

Proposition Le reste de la division euclidienne d'un nombre premier par $n \neq p$ est premier avec n, sauf pour un nombre fini de cas.

Démonstration
Soit p un nombre premier. On écrit la division euclidienne de p par n : $p = qn + r$, avec q, r entiers et $0 \leq r < n$. Supposons que r n'est pas premier avec n. Alors ils possèdent un diviseur $d > 1$ en commun. Comme $p = qn + r$, d divise également p. Or p est premier et $d > 1$, donc $d = p$.
Puisque n ne possède qu'un nombre fini de diviseurs premiers, il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers dont le reste modulo n n'est pas premier avec n, ce qui prouve le résultat. Ces nombres premiers sont d'ailleurs les diviseurs premiers de n.

◈

En dehors de ces quelques cas particuliers, l'infinité des nombres premiers se répartit donc dans $\phi(n)$ classes de congruences modulo n. Cela implique en particulier que le chiffre des unités d'un nombre premier est nécessairement 1, 3, 7 ou 9, à l'exception de 2 et 5.

Remarque On dispose en réalité d'un résultat plus fort, appelé théorème de progression arithmétique de Dirichlet, du nom du mathématicien prusse Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1807-1859).
Celui-ci énonce que chacune de ces $\phi(n)$ classes de congruences contient une infinité de nombres premiers, et que ceux-ci s'y répartissent équitablement. Plus précisément, si l'on fixe une classe de congruence, lorsque N tend vers $+\infty$, la proportion de nombres premiers inférieurs à N qui appartiennent à cette classe tend vers $\frac{1}{\phi(n)}$, et ce, pour n'importe quelle classe de congruence.

9 Différentes écritures d'un nombre complexe

- **Niveau :** Terminale experte
- **Pré-requis :** trigonométrie, coordonnées cartésiennes et polaires dans le plan, fonction exponentielle, angles orientés, vecteurs du plan

9.1 Forme algébrique

9.1.1 Définitions

Théorème (admis) Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés nombres complexes, qui contient $\mathbb{R}$, et tel que :

- l'addition et la multiplication s'étendent à $\mathbb{C}$ en gardant les mêmes propriétés : associativité, commutativité, distributivité, existence d'un élément neutre.
- Il existe $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
- Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, avec x, y réels.

Remarque Comme $i^2 = -1 < 0$, i n'est pas un nombre réel, ce qui fait de $\mathbb{C}$ une véritable extension de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathbb{C} \neq \mathbb{R}$.

Définition Pour $z \in \mathbb{C}$, les uniques réels x et y tels que $z = x + iy$ sont appelés respectivement partie réelle de z et partie imaginaire de z.
On note $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$. Cette écriture s'appelle la forme algébrique d'un nombre complexe.

Remarque Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \text{Re}(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Lorsque $\text{Re}(z) = 0$, on a $z = i\,\text{Im}(z)$. Si de plus $\text{Im}(z) \neq 0$, on dit alors que z est imaginaire pur.

9.1.2 Propriétés et plan complexe

Proposition Soient x, y, x', y' des réels. Alors

- $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$
- $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Démonstration

❖ *On a*

$$\begin{aligned}(x+iy)+(x'+iy') &= (x+x')+(iy+iy') \quad \textit{par associativité et commutativité de la somme}\\ &= (x+x')+i(y+y') \quad \textit{par distributivité}\end{aligned}$$

❖ *On a*

$$\begin{aligned}(x+iy)(x'+iy') &= xx'+xiy'+iyx'+iyiy' \quad \textit{par distributivité}\\ &= xx'+ixy'+ix'y+i^2yy' \quad \textit{par associativité et commutativité du produit}\\ &= xx'+ixy'+ix'y-yy' \quad \textit{car } i^2=-1\\ &= xx'+i(xy'+x'y)-yy' \quad \textit{par distributivité}\\ &= (xx'-yy')+i(xy'+x'y) \quad \textit{par associativité et commutativité de la somme}\end{aligned}$$

◈

Proposition Tout $z \in \mathbb{C}$ non nul admet un unique inverse pour la multiplication, noté $\frac{1}{z}$.

Démonstration

Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$ non nul, c'est-à-dire tel que $(a,b) \neq (0,0)$. On cherche un complexe $z' = x+iy$ tel que

$$zz' = z'z = 1$$

Puisque $1 = 1+0\times i$, par unicité de la forme algébrique, cela équivaut à

$$\begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$$

Si $a=0$, alors $b\neq 0$. On en déduit que $x=0$ et $y=-\frac{1}{b}$. Si $b=0$, alors $a\neq 0$. On en déduit que $x=\frac{1}{a}$ et $y=0$.

Désormais, on suppose que $a\neq 0$ et $b\neq 0$. On a

$$ay+bx=0 \Leftrightarrow ay=-bx \Leftrightarrow y=-\frac{b}{a}x$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}ax-by=1 &\Leftrightarrow ax=1+by\\ &\Leftrightarrow ax=1-\frac{b^2}{a}x\\ &\Leftrightarrow \left(a+\frac{b^2}{a}\right)x=1\\ &\Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{a}x=1\\ &\Leftrightarrow x=\frac{a}{a^2+b^2} \quad \textit{car } (a,b)\neq(0,0)\end{aligned}$$

On a alors

$$y=\frac{b}{a}x=\frac{b}{a^2+b^2}$$

Cela démontre l'unicité.

Réciproquement, on vérifie que

$$a\frac{a}{a^2+b^2}+b\frac{b}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$$

Cela prouve l'existence d'un inverse pour la multiplication.

On peut également démontrer l'existence et l'unicité de l'inverse sans en expliciter la forme, en écrivant le système de manière matricielle, avec une matrice inversible.

◈

Remarque On peut étendre les opérations sur les fractions dans $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, en définissant pour $z, z' \in \mathbb{C}$ avec $z' \neq 0$:

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$$

Définition Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On appelle conjugué de z le complexe

$$\overline{z} = x - iy$$

Remarque Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = -\mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow 2\,\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Proposition Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. Si $z \neq 0$, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$
4. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Démonstration

On écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. *On a*

$$\begin{aligned}\overline{z + z'} &= \overline{(x + iy) + (x' + iy')} \\ &= \overline{(x + x') + i(y + y')} \\ &= x + x' - i(y + y') \\ &= (x - iy) + (x' - iy')\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$$

2. *On a*

$$\begin{aligned}\overline{zz'} &= \overline{(x + iy)(x' + iy')} \\ &= \overline{(xx' - yy') + i(xy' + x'y)} \\ &= xx' - yy' - i(xy' + x'y) \\ &= xx' - ixy' - ix'y + i^2yy' \\ &= (x - iy)(x' - iy')\end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}}$$

3. *On a*

$$\frac{\overline{1}}{z} \times \overline{z} = \overline{\frac{1}{z} \times z} = \overline{1} = 1$$

Ainsi, $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$.

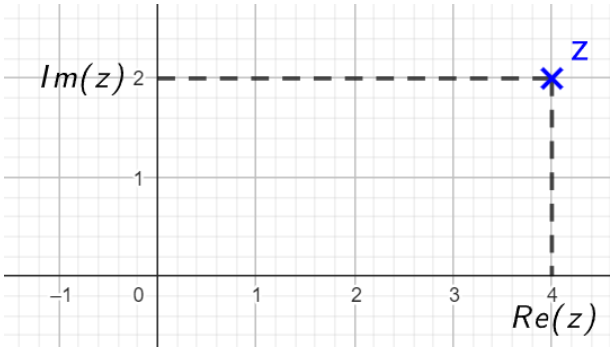
4. *Il suffit de procéder par récurrence en utilisant la deuxième propriété.*

◈

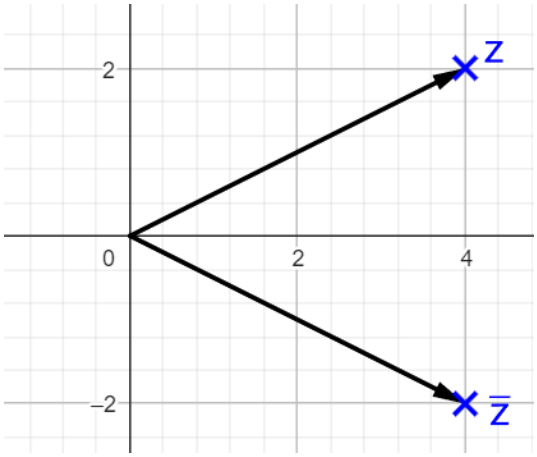
On remarque que via la forme algébrique d'un nombre complexe, il existe une correspondance bijective entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$: on peut donc voir tout nombre complexe comme un point, ou un vecteur, du plan $\mathbb{R}^2$ et réciproquement.

Le plan alors obtenu prend le nom de plan complexe, ou de plan d'Argand-Cauchy. Pour un nombre complexe donné, le point de ce plan correspondant s'appelle son point image. Réciproquement, pour un point de $\mathbb{R}^2$ donné, on appelle affixe de ce point le nombre complexe associé.

On définit de même la notion de vecteur image et d'affixe d'un vecteur.



Si l'on considère $z = x + iy \in \mathbb{C}$, comme $\overline{z} = x - iy$, le point image de $\overline{z}$ est le symétrique du point image de z par rapport à l'axe des abscisses.



9.2 Forme trigonométrique

On va à présent voir une autre écriture des nombres complexes appelée forme trigonométrique. La forme algébrique d'un complexe le décrit de manière analogue aux coordonnées cartésiennes pour les points et vecteurs de $\mathbb{R}^2$. La forme trigonométrique va permettre de les décrire de façon analogue aux coordonnées polaires.

9.2.1 Module

Définition Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On appelle module de z le réel positif

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Remarque Par le théorème de Pythagore, puisque la forme algébrique est analogue aux coordonnées cartésiennes dans le plan, le module de z est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$, avec M le point image de z.

Lorsque z est réel, son module coïncide alors avec sa valeur absolue, d'où la notation commune.

Proposition Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors $AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration

On écrit $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$. On a

$$\begin{aligned} |z_B - z_A|^2 &= |x_B + iy_B - x_A - iy_A|^2 \\ &= |x_B - x_A + i(y_B - y_A)|^2 \\ &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= AB^2 \quad \textit{par le théorème de Pythagore} \end{aligned}$$

Ces quantités sont positives, d'où $AB = |z_B - z_A|$.

◈

Proposition Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $z\overline{z} = |z|^2$
3. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$

Démonstration

On note $z = x + iy$.

1. *On a*
$$|z| = 0 \Leftrightarrow |z|^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0$$
En effet, comme x et y sont réels, $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$. Ainsi, $x^2 + y^2 = 0$ si, et seulement si, $x^2 = y^2 = 0$, c'est-à-dire $x = y = 0$.
2. *On a*
$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$
3. *Comme $x^2 = (-x)^2$ et $y^2 = (-y)^2$, on a*
$$|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$$

◈

Proposition Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. $|zz'| = |z||z'|$
2. Si $z \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
3. Si $z' \neq 0$, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
4. $|z^n| = |z|^n$

Démonstration

On écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

1. *On a*

$$\begin{aligned}|zz'|^2 &= |(x+iy)(x'+iy')|^2 \\ &= |(xx'-yy') + i(xy'+x'y)|^2 \\ &= (xx'-yy')^2 + (xy'+x'y)^2 \\ &= x^2x'^2 + y^2y'^2 - 2xx'yy' + x^2y'^2 + x'^2y^2 + 2xy'x'y \\ &= x^2(x'^2+y'^2) + y^2(x'^2+y'^2) \\ &= (x^2+y^2)(x'^2+y'^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{|zz'|^2 = |z|^2|z'|^2}$$

Les quantités étant positives, on en déduit que $|zz'| = |z||z'|$.

2. *On suppose que $z \neq 0$. On a alors*

$$\left|\frac{1}{z}\right| \times |z| = \left|\frac{1}{z} \times z\right| = |1| = 1$$

donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

3. *Supposons $z' \neq 0$. Il suffit de combiner les deux propriétés précédentes :*

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|\frac{1}{z'} \times z\right| = \left|\frac{1}{z'}\right| \cdot |z| = \frac{1}{|z'|} \cdot |z| = \frac{|z|}{|z'|}$$

4. *Il suffit de procéder par récurrence sur n en utilisant la première propriété.*

◈

Proposition (Inégalité triangulaire) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration

On a

$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z') \times \overline{(z+z')} \\ &= (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + \overline{z}z' + \overline{\overline{z}z'} \\ |z+z'|^2 &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,Re(\overline{z}z')\end{aligned}$$

Or, pour tous réels x, y, on a

$$|x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} \geq |x| \geq x$$

Ainsi, $Re(\overline{z}z') \leq |\overline{z}z'| = |\overline{z}||z'| = |z||z'|$, d'où

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,Re(\overline{z}z') \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2$$

Comme les quantités sont positives, on en déduit que $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

◈

9.2.2 Argument

Définition Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On dit que $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z si

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

Proposition Tout complexe non nul admet des arguments. Si $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de $z \in \mathbb{C}^*$, alors l'ensemble des arguments de z est

$$\{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On remarque que

$$\left(\frac{Re(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{Im(z)}{|z|}\right)^2 = \frac{Re(z)^2 + Im(z)^2}{|z|^2} = 1$$

Ainsi, le point du plan de coordonnées $\left(\frac{Re(z)}{|z|}, \frac{Im(z)}{|z|}\right)$ appartient au cercle unité. Par conséquent, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{Re(z)}{|z|} \qquad et \qquad \sin(\theta) = \frac{Im(z)}{|z|}$$

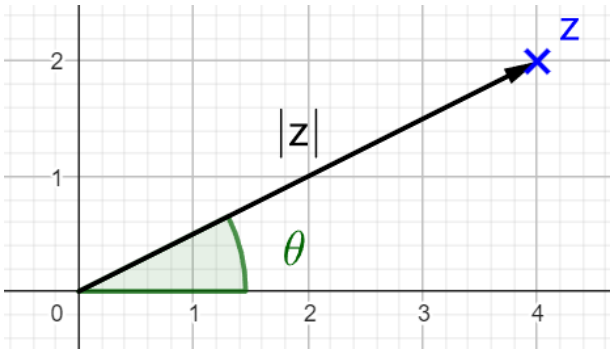
Pour $\theta' \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\theta = \cos\theta' \text{ et } \sin\theta = \sin\theta' \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta' = \theta + 2k\pi$$

d'où le résultat.

◈

D'un point de vue géométrique, un argument θ d'un complexe non nul z de point image M est l'angle (orienté) formé par l'axe des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.



Pour un complexe z non nul d'argument θ, on peut donc écrire

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = |z|(\cos(\theta) + i\sin\theta)$$

On appelle cette seconde écriture la forme trigonométrique d'un nombre complexe. Elle est analogue aux coordonnées polaires dans le plan.

Remarque Au vu de l'ensemble des arguments d'un complexe non nul, il en existe une infinité, mais il y a unicité modulo 2π. Il existe ainsi un unique argument dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, appelé argument principal de z, et noté $\arg(z)$.

Proposition Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors

1. $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \ [2\pi]$

2. $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$

3. $\arg(z) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$

4. $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \Leftrightarrow z$ imaginaire pur

Démonstration

On note $\theta = \arg(z)$.

1. *On a*

$$-z = -\cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi)$$

$\theta + \pi$ *est donc un argument de* $-z$*, d'où le résultat.*

2. *On a*

$$\overline{z} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$-\theta$ *est donc un argument de* $\overline{z}$*, d'où le résultat.*

3. *On a*

$$\theta \equiv 0 \ [\pi] \Leftrightarrow \sin(\theta) = 0 \Leftrightarrow z = |z|\cos(\theta) = \mathit{Re}(z) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$$

4. *On a*

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow z = i|z|\sin(\theta) = i\,\mathit{Im}(z) \Leftrightarrow z \text{ imaginaire pur}$$

◈

Proposition Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$, et $n \in \mathbb{N}$.

1. $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ [2\pi]$

2. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \ [2\pi]$

3. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ [2\pi]$

4. $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \ [2\pi]$

Démonstration *On note* $\theta = \arg(z)$ *et* $\theta' = \arg(z')$.

1. *On a*

$$\begin{aligned} zz' &= |z|\Big(cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big) \times |z'|\Big(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\Big) \\ &= |zz'|\Big(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))\Big) \\ &= |zz'|\Big(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\Big) \end{aligned}$$

Ainsi, $\theta + \theta'$ *est un argument de* zz'*, d'où le résultat.*

2. *On a* $z \times \frac{1}{z} = 1$*, avec* θ *un argument de* z *et* 0 *un argument de* 1*. Alors*

$$\theta + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$$

d'où le résultat.

3. *Il suffit de combiner les deux premières propriétés.*

4. *Il suffit de procéder par récurrence à partir de la première propriété.*

◈

9.2.3 Ensemble $\mathbb{U}$ et notation exponentielle

Définition On note

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

Proposition L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par multiplication, par passage à l'inverse et par conjugaison complexe.

Démonstration

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$. On remarque que comme $|z| = 1$, z est non nul, et admet donc un inverse.

On a $|zz'| = |z||z'| = 1$, donc $zz' \in \mathbb{U}$. De même, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1 = |\overline{z}|$, donc $\frac{1}{z}$ et $\overline{z}$ sont dans $\mathbb{U}$.

◈

Remarque D'ailleurs, pour $z \in \mathbb{U}$, on a $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, donc $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

D'un point de vue géométrique, un complexe appartient à $\mathbb{U}$ si, et seulement si, son point image est sur le cercle trigonométrique.

On remarque qu'au vu des propriétés de l'argument d'un nombre complexe, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : \theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

vérifie la même propriété que la fonction exponentielle :

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ f(a+b) = f(a)f(b)$$

et vaut 1 en 0.

On note alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

de sorte que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ d'argument θ :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

On appelle cette écriture (qui est une réécriture de la forme trigonométrique) la forme exponentielle d'un complexe (non nul).

Attention toutefois, il s'agit bien d'une notation, et pas d'une propriété de la fonction exponentielle. Cette écriture est souvent plus commode que la forme trigonométrique.

9.3 Applications

On va maintenant voir différentes applications des nombres complexes, et principalement des deux écritures dont nous disposons. De manière générale, on peut remarquer (au vu des propriétés précédentes) que la forme algébrique est adaptée pour additionner/soustraire des complexes, et la forme trigonométrique est adaptée pour multiplier/diviser des complexes.

En particulier, additionner deux complexes revient à additionner leur parties réelles entre elles, et leur parties imaginaires entre elles. Multiplier deux complexes non nuls revient à multiplier leurs modules et additionner leurs arguments. Cela donne également une intuition géométrique de l'effet de ces opérations sur les complexes.

9.3.1 Trigonométrie

Comme on l'a vu, il y a un lien étroit entre nombres complexes et trigonométrie. Les propriétés sur les complexes et la forme trigonométrique découlent des propriétés des fonctions trigonométriques. On ne peut alors pas démontrer des propriétés trigonométriques avec les nombres complexes à proprement parler, mais leur usage peut permettre de les retrouver facilement.

Proposition (Formules d'Euler) Pour tout réel x, on a

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Démonstration *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \quad \textit{et} \quad e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos(x) - i\sin(x)$$

d'où le résultat. ◈

Ces deux formules sont utiles en pratiques pour retrouver des formules trigonométriques (somme, duplication, etc.). Elles permettent également de linéariser des fonctions trigonométriques. Par exemple, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
\cos(x)^3 &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8} \\
&= \frac{1}{8}\Big((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3\Big) \\
&= \frac{1}{8}\Big(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\Big) \\
\cos(x)^3 &= \frac{1}{4}\Big(\cos(3x) + 3\cos(x)\Big)
\end{aligned}$$

Ce type de linéarisation est particulièrement utile en intégration.

9.3.2 Équations polynomiales

Sans rentrer dans le détail, les nombres complexes sont d'une importance capitale dans la résolution d'équations polynomiales. Le théorème de d'Alembert-Gauss (aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre) énonce en effet que toute équation polynomiale à coefficients complexes admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

On va passer en revue quelques équations polynomiales que les complexes permettent de résoudre.

Proposition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour $z \in \mathbb{C}$,

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \dots, n-1\}, z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Démonstration

Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a

$$\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n = e^{i\frac{2k\pi}{n}\times n} = e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) = 1$$

Réciproquement, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$. Comme $0^n = 0$, z est non nul. On écrit $z = re^{i\theta}$, avec $r = |z|$ et θ un argument de z. Alors

$$z^n = 1 \Rightarrow (re^{i\theta})^n = 1 \Rightarrow r^n e^{in\theta} = 1$$

On en déduit que $r^n = 1$, avec $r \in \mathbb{R}_+$, donc nécessairement $r = 1$. De plus, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$, c'est-à-dire $\theta = \frac{2k\pi}{n}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. On écrit la division euclidienne de k par n : $k = an + b$, avec $b \in \{0, \dots, n-1\}$. Alors

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2b\pi}{n} + ia2\pi} = e^{i\frac{2b\pi}{n}} \times e^{ia2\pi} = e^{i\frac{2b\pi}{n}} \times 1 = e^{i\frac{2b\pi}{n}}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de $z^n = 1$ est bien

$$\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

◈

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de $z^n = 1$ sont appelées racines n-ièmes de l'unité. On note l'ensemble de ces racines $\mathbb{U}_n$. On a également une application des complexes aux équations de degré 2.

Proposition On considère une équation de degré 2 d'inconnue x : $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b, c réels, a non nul. On note $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux racine réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle :
$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux racines complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration

Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

Comme $a \in \mathbb{R}$, $\frac{\Delta}{4a^2}$ a le signe de Δ.

- *Si $\Delta > 0$, on a alors deux solutions réelles distinctes, en extrayant la racine carrée.*
- *Si $\Delta = 0$, on a une seule solution réelle.*
- *Si $\Delta < 0$, on remarque que*
$$\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
sont des racines carrées de $\frac{\Delta}{4a^2}$, dans le sens où élevées au carré, elles donnent ce réel (bien que négatif). On en déduit les deux solutions.

◈

Les nombres complexes servent également à résoudre les équations de degré 3 par radicaux. Pour une équation de degré 3 de la forme $ax^3+bx^2+cx+d=0$, avec a,b,c,d réels, a non nul, le changement de variables $x=y-\frac{b}{3a}$ permet d'annuler le terme de degré 2, et d'obtenir une équation de la forme $y^3+py+q=0$ avec p,q réels.

Nous n'allons pas donner une méthode générale, bien que ce soit possible, mais nous allons étudier le cas particulier :

$$x^3-15x-4=0$$

C'est avec cet exemple, et à travers la méthode de Cardan (que nous utiliserons ici), que l'italien Bombelli traite pour la première fois de nombres dont le carré est négatif, et qui deviendront les nombres imaginaires purs.

On cherche une solution x sous la forme $x=u+v$, avec u et v des complexes éventuellement. Bien que cela puisse paraître contre-intuitif de passer d'une inconnue à deux, cela va permettre plus tard de fixer une condition de notre choix. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} x^3-15x-4=0 &\Leftrightarrow (u+v)^3-15(u+v)-4=0\\ &\Leftrightarrow u^3+3u^2v+3uv^2+v^3-15(u+v)-4=0\\ &\Leftrightarrow u^3+v^3+(3uv-15)(u+v)-4=0 \end{aligned}$$

Le fait de passer d'une inconnue x à deux inconnues u et v nous permet d'imposer en plus la condition $uv=5$, c'est-à-dire $3uv-15=0$. Cela donne alors l'équation :

$$u^3+v^3-4=0\Leftrightarrow u^3+\left(\frac{5}{u}\right)^3-4=0\Leftrightarrow u^6-4u^3+125=0$$

Ainsi, u^3 est solution de $X^2-4X+125=0$. Il en est de même pour v^3 par symétrie. Cette équation a pour discriminant

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times125=16-500=-484<0$$

ce qui laisse présager que l'équation initiale n'admet pas de solution réelle. Or, on peut vérifier que 4 en est bien une solution.

C'est à ce moment que l'on introduit les nombres complexes. C'est ce que fait Bombelli en introduisant une quantité $\sqrt{-121}$, qui est en fait $i\sqrt{121}=11i$. L'équation $X^2-4X+125=0$ admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{4-22i}{2}=2-11i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{4+22i}{2}=2+11i$$

On peut alors remarquer que

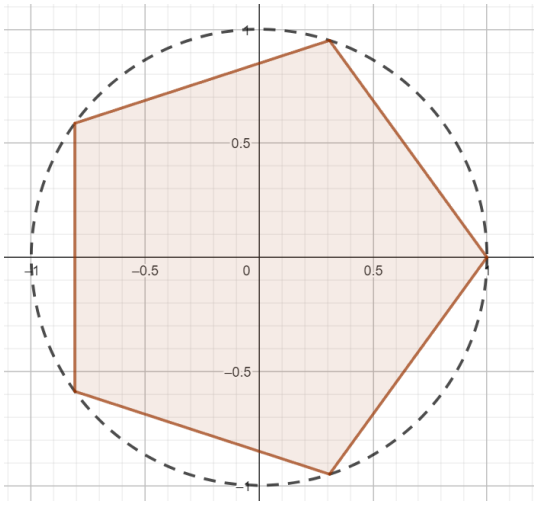
$$(2+i)^3=2^3+3\times2^2\times i+3\times2\times i^2+i^3=8-6+i(12-1)=2+11i$$

et de même $(2-i)^3=2-11i$. Les nombres $u=2+i$ et $v=2-i$ conviennent donc, ce qui donne $x=u+v=4$, qui est bien la solution que l'on connaissait.

Cette méthode, appliquée à toute équation de la forme $x^3+px+q=0$, permet de trouver une solution. On peut alors factoriser l'expression et se ramener à une équation de degré 2.

9.3.3 Géométrie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. On remarque que ces n racines ont pour points images les sommets d'un polygone convexe régulier à n côté, centré sur l'origine.



On peut utiliser les complexes pour donner une construction à la règle et au compas du pentagone régulier. On va les utiliser pour donner une valeur à $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, ce qui va permettre de construire un des sommets du pentagone. On peut alors construire les autres par report de longueur.

On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, de sorte que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

c'est-à-dire

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

On remarque que $z^5 = 1$. Ainsi :

$$z^5 = 1 \Rightarrow z^5 - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

car $z \neq 1$. Comme $z \neq 0$, on a

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de

$$4X^2 + 2X - 1 = 0$$

Cette équation a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20 = 4 \times 5$. Ainsi, les solutions de cette équation sont

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, on a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Proposition Soient trois points du plans A, B, C deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. Alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi]$$

Démonstration

Soit $I(1,0)$. On a

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right) &\equiv \arg(z_C-z_A)-\arg(z_B-z_A)\ [2\pi]\\ &\equiv (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AC})-(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})\ [2\pi]\\ &\equiv (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\ [2\pi]\end{aligned}$$

◈

Proposition Soient A,B,C trois points du plan d'affixes respectives a,b,c. Alors ABC est équilatéral si, et seulement si,

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

Démonstration

On note $z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On a $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=0$, et $z\neq 1$, donc $z^2+z+1=0$.

On a que ABC est équilatéral si, et seulement si, C est l'image de B par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de centre A, dans le sens direct ou indirect. Dans le sens direct, cela équivaut à

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{2\pi}{3}\quad \textit{et}\quad AB=AC$$

donc à

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\frac{2\pi}{3}\quad \textit{et}\quad |c-a|=|b-a|$$

ce qui équivaut encore à

$$\frac{c-a}{b-a}=-z$$

et

$$\frac{c-a}{b-a}=-z\Leftrightarrow c-a=-bz+az\Leftrightarrow c+bz+a(-1-z)=0\Leftrightarrow c+bz+az^2=0$$

Dans le sens indirect, cela équivaut donc à

$$b+cz+az^2=0$$

Donc ABC est équilatéral si, et seulement si, l'une de ces deux conditions est vérifiée.

Or, on a

$$\begin{aligned}(c+bz+az^2)(b+cz+az^2) &= bc+z(c^2+b^2)+z^2(ac+bc+ab)+z^3(ab+ac)+a^2z^4\\ &= bc+z(c^2+b^2)+(1-z)(ac+bc+ab)+ab+ac+a^2z\\ &= z\Big((ab+bc+ac)-(a^2+b^2+c^2)\Big)\end{aligned}$$

Ainsi, comme $z\neq 0$, ABC est équilatéral si, et seulement si

$$ab+bc+ac=a^2+b^2+c^2$$

◈

Proposition Il n'existe aucun triangle équilatéral dont les trois sommets ont des coordonnées entières.

Démonstration

Supposons qu'un tel triangle ABC existe, et notons a,b,c les affixes respectives de A,B,C. Quitte à faire subir au triangle une translation par un vecteur $\overrightarrow{AO}$ (ce qui ne change pas le caractère entier des coordonnées), on peut supposer que $a=0$.

ABC étant équilatéral, en notant $z=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, comme $a=0$, on a nécessairement $c=bz$, ou $b=cz$.

❖ *Si $c = bz$, alors*

$$c = b\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}b + i\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

Or, ABC étant à coordonnées entières, b et c sont de parties réelles et imaginaires entières. Cela impliquerait que $\sqrt{3}$ est rationnel, ce qui n'est pas.

❖ *Si $b = cz$, on aboutit au même type de contradiction par irrationnalité de $\sqrt{3}$.*

◈

9.3.4 Autre

Proposition Si $N, M \in \mathbb{R}$ sont sommes de deux carrés, alors c'est également le cas de NM.

Démonstration

On écrit $N = a^2 + b^2$, $M = c^2 + d^2$, avec a, b, c, d réels. Alors on remarque que $N = |a + ib|^2$ et $M = |c + id|^2$. Ainsi

$$NM = |a + ib|^2|c + id|^2 = |(a + ib)(c + id)|^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

◈

Une autre application intéressante des nombres complexes est le calcul des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$$

En effet, on remarque que par les propriétés des parties réelles et imaginaires, ces sommes sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$$

qui est la somme des termes d'une suite géométrique de raison e^{ix}, de premier terme 1.
Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors $e^{ix} = 1$. Dans ce cas

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = n + 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = 0$$

On suppose maintenant que x est différent de 0 modulo 2π, c'est-à-dire que $e^{ix} \neq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} &= \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}x}\left(e^{i\frac{(n+1)}{2}x} - e^{-i\frac{(n+1)}{2}x}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)} \\
&= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}x} - e^{-i\frac{(n+1)}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{2i\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \mathsf{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)\\ &= \mathsf{Re}\left(e^{i\frac{nx}{2}}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2}\times\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ \sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

On montre de la même façon que

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

La première somme est utile notamment pour donner une expression explicite du noyau de Dirichlet :

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}e^{ikx} = 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$

On a pour $x\equiv 0\ [2\pi]$:

$$D_n(x) = 1+2(n+1-1) = 2n+1$$

et sinon :

$$\begin{aligned}D_n(x) &= 1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\\ &= -1+2\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)\\ &= -1+2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\ D_n(x) &= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Il est (avec d'autres noyaux) un outil indispensable en analyse de Fourier.

10 Utilisation des nombres complexes en géométrie

- **Niveau :** Terminale maths expertes
- **Pré-requis :** nombres complexes, bijection entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, transformations du plan, géométrie vectorielle, géométrie euclidienne

10.1 Nombres complexes : rappels

10.1.1 Formes algébrique et trigonométrique

Théorème (admis) Il existe un ensemble $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, contenant $\mathbb{R}$, tel que :

- L'addition et la multiplication s'étendent à $\mathbb{C}$ en gardant les mêmes propriétés (élément neutre, inverse, associativité, commutativité, distributivité).
- Il existe $i \in \mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = x + iy$, avec x, y réels.

Pour un nombre complexe z, l'écriture $z = x + iy$ s'appelle la forme algébrique de z. On note $x = \text{Re}(z)$ la partie réelle de z, et $y = \text{Im}(z)$ sa partie imaginaire.

Définition Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On appelle conjugué de z le nombre complexe :

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$$

Proposition Soient x, y, x', y' des réels. Alors

- $(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$
- $(x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Démonstration

- *On a*

$$\begin{aligned}(x + iy) + (x' + iy') &= (x + x') + (iy + iy') && \textit{par associativité et commutativité de la somme}\\ &= (x + x') + i(y + y') && \textit{par distributivité}\end{aligned}$$

❖ *On a*

$$\begin{aligned}(x+iy)(x'+iy') &= xx'+xiy'+iyx'+iyiy' \quad \textit{par distributivité}\\ &= xx'+ixy'+ix'y+i^2yy' \quad \textit{par associativité et commutativité du produit}\\ &= xx'+ixy'+ix'y-yy' \quad \textit{car } i^2=-1\\ &= xx'+i(xy'+x'y)-yy' \quad \textit{par distributivité}\\ &= (xx'-yy')+i(xy'+x'y) \quad \textit{par associativité et commutativité de la somme}\end{aligned}$$

◈

Remarque La forme algébrique est donc particulièrement adaptée à la somme de de nombres complexes.

Définition Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$. On appelle norme de z le réel positif

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Un argument de z est un réel θ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}$$

lorsqu'un tel réel existe.

Tout nombre complexe non nul admet une infinité d'arguments, tous égaux modulo 2π. Il existe alors un unique argument dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$, que l'on appelle argument principal de z, et que l'on note $\arg(z)$.

Pour un complexe z non nul, et θ un de ses arguments, on a donc

$$z = |z|(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$$

Définition Pour un nombre complexe z non nul, l'écriture

$$z = |z|\Big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\Big)$$

s'appelle la forme trigonométrique de z.

Proposition Soient z, z' des complexes non nuls. Alors

❖ $|zz'| = |z||z'|$

❖ $\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$

Démonstration *On écrit $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$.*

❖ *On a*

$$\begin{aligned}|zz'|^2 &= |(x+iy)(x'+iy')|^2\\ &= |(xx'-yy')+i(xy'+x'y)|^2\\ &= (xx'-yy')^2+(xy'+x'y)^2\\ &= x^2x'^2+y^2y'^2-2xx'yy'+x^2y'^2+x'^2y^2+2xy'x'y\\ &= x^2(x'^2+y'^2)+y^2(x'^2+y'^2)\\ &= (x^2+y^2)(x'^2+y'^2)\\ &= |z|^2|z'|^2\end{aligned}$$

Les quantités étant positives, on en déduit que $|zz'| = |z||z'|$.

❖ *Soient $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$. On a*

$$\begin{aligned} zz' &= |z|\Big(cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big) \times |z'|\Big(\cos(\theta') + i\sin(\theta')\Big) \\ &= |zz'|\Big(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))\Big) \\ &= |zz'|\Big(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\Big) \end{aligned}$$

Ainsi, $\theta + \theta'$ est un argument de zz', d'où le résultat.

◈

Remarque La forme trigonométrique est donc adaptée à la multiplication de nombres complexes.

Du fait des propriétés similaires de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\theta \mapsto \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ avec la fonction exponentielle, on note pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Pour un complexe z non nul d'argument θ, on a alors

$$z = |z|e^{i\theta}$$

On appelle cette écriture la forme exponentielle.

10.1.2 Plan complexe

On rappelle que $\mathbb{C}$ est en bijection avec $\mathbb{R}^2$ par $x + iy \mapsto (x, y)$. Cela permet de représenter $\mathbb{C}$ comme un plan euclidien, que l'on appelle alors plan complexe, ou plan d'Argand-Cauchy.

Dans ce plan, la forme algébrique est alors l'analogue des coordonnées cartésiennes, et la forme trigonométrique est l'analogue des coordonnées polaires.

Sur le même principe, on fait correspondre à chaque vecteur un unique complexe, par ses coordonnées cartésiennes.

Proposition Soient A et B deux points d'affixes complexes respectives z_A et z_B. Alors

❖ L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

❖ Le milieu de $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A+z_B}{2}$.

Démonstration *Il suffit d'utiliser les coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{AB}$ et du milieu de $[AB]$.* ◈

Proposition Soient trois points du plans A, B, C deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C. Alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \ [2\pi]$$

Démonstration *Soit $I(1, 0)$. On a*

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) &\equiv \arg(z_C - z_A) - arg(z_B - z_A) \ [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}) \ [2\pi] \\ &\equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ [2\pi] \end{aligned}$$

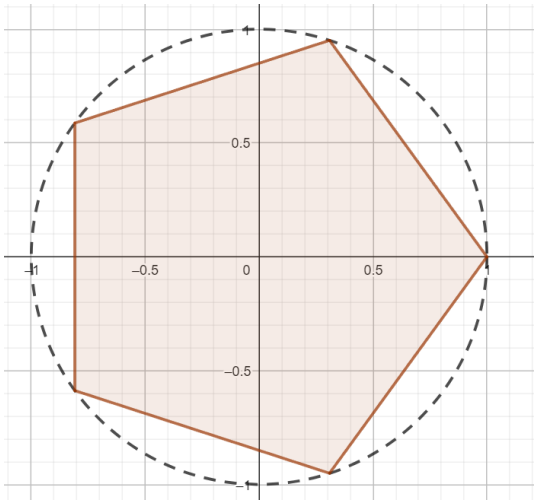
◈

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}, z^n = 1\} = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1\}$$

C'est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n points d'affixes les n éléments de U_n sont les sommets du polygone convexe régulier à n côtés centré en O et dont l'un des sommets est $(1, 0)$.



On peut utiliser les nombres complexes pour donner une construction à la règle et au compas du pentagone régulier. On va les utiliser pour donner une valeur à $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, ce qui va permettre de construire un des sommets du pentagone. On peut alors construire les autres par report de longueur.

On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, de sorte que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

c'est-à-dire

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

On remarque que $z^5 = 1$. Ainsi :

$$z^5 = 1 \Rightarrow z^5 - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

car $z \neq 1$. Comme $z \neq 0$, on a

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de

$$4X^2 + 2X - 1 = 0$$

Cette équation a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20 = 4 \times 5$. Ainsi, les solutions de cette équation sont

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, on a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

10.2 Transformations du plan

Les nombres complexes sont particulièrement utiles pour décrire les transformations du plan. En effet, une transformation du plan est une application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, donc par la correspondance bijective avec $\mathbb{C}$, on peut voir une transformation du plan comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Par la suite, pour un nombre complexe z on notera z' son image par l'une des transformations du plan considérées. Par abus de langage, on confondra nombre complexe et point image, vecteur du plan et affixe de ce vecteur, ainsi que angle et argument.

10.2.1 Translations

Proposition La translation de vecteur $u \in \mathbb{C}$ s'écrit :

$$z' = z + u$$

Démonstration *On remarque que pour $z \in \mathbb{C}$, en examinant les formes algébriques, $z' - z = u$ si, et seulement si, le point image de z' est le translaté du point image de z par la translation de vecteur image de u.* ◈

Proposition Soient $u, v \in \mathbb{C}$. La composée de la translation de vecteur u et de la translation de vecteur v (dans les deux sens) est la translation de vecteur $u + v$.

Démonstration *Soit $z \in \mathbb{C}$. On note z' son image par la translation de vecteur u. Alors $z' = z + u$. On note z'' l'image de z' par la translation de vecteur v. Alors*

$$z'' = z' + v = (z + u) + v = z + (u + v)$$

d'où le résultat.

◈

10.2.2 Homothéties

Proposition L'homothétie de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}$ s'écrit :

$$z' = k(z - \omega) + \omega$$

Démonstration *Par définition, l'homothétie de centre ω et de rapport k est la transformation qui au vecteur $z - \omega$ associe le vecteur $k(z - \omega)$, d'où*

$$z' - \omega = k(z - \omega) \Rightarrow z' = k(z - \omega) + \omega$$

◈

Proposition La composée des homothéties de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rapports $k, k' \in \mathbb{R}$ (dans les deux sens) est l'homothétie de centre ω et de rapport kk'.

Démonstration *Soit $z \in \mathbb{C}$. Son image z' par l'homothétie de centre ω et de rapport k est telle que*

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

L'image z'' de z' par l'homothétie de centre ω et de rapport k' est telle que

$$z'' - \omega = k'(z' - \omega) = k'(k(z - \omega)) = (kk')(z - \omega)$$

d'où le résultat. ◈

10.2.3 Rotations

Proposition La rotation de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ s'écrit

$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

Démonstration *Par définition, la rotation de centre ω et d'angle θ associe à $z - \omega$ le complexe obtenu en appliquant une rotation d'angle θ à ce vecteur, c'est-à-dire $e^{i\theta}(z - \omega)$, d'où*

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \Rightarrow z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

◈

Proposition La composée des rotations de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et d'angles $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ (dans les deux sens) est la rotation de centre ω et d'angle $\theta + \theta'$.

Démonstration *Soit $z \in \mathbb{C}$. Son image z' par la rotation de centre ω et d'angle θ est telle que*

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

L'image z'' de z' par la rotation de centre ω et d'angle θ' est telle que

$$z'' - \omega = e^{i\theta'}(z' - \omega) = e^{i\theta'}e^{i\theta}(z - \omega) = e^{i(\theta+\theta')}(z - \omega)$$

d'où le résultat. ◈

10.2.4 Similitudes directes

Définition On appelle similitude directe toute transformation du plan qui conserve les rapports de longueur et les angles orientés.

Proposition Une similitude directe multiplie les longueurs par un rapport $k > 0$, et oriente les vecteurs d'un angle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Démonstration *On note $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une similitude directe. Pour tous points A, B, C, D du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, on a*

$$\frac{AB}{CD} = \frac{f(A)f(B)}{f(C)f(D)}$$

Ainsi,

$$\frac{f(A)f(B)}{AB} = \frac{f(C)f(D)}{CD}$$

Si on note k ce réel, il est strictement positif et tel que

$$f(A)f(B) = k \cdot AB$$

ceci étant également vrai pour $A = B$.
On a également

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)}\right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{AB}\right) &= \left(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(C)f(D)}\right) + \left(\overrightarrow{f(C)f(D)}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{f(C)f(D)}, \overrightarrow{CD}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, l'angle $(\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{AB})$ est constant pour tous points A et B, d'où le résultat sur les angles. ◈

Dans ce cas, on dit que la similitude directe est de rapport k et d'angle α.

Proposition Une transformation du plan est une similitude directe si, et seulement si, elle s'écrit sous la forme $z' = az + b$, avec a, b des nombres complexes.
Dans ce cas, $k = |a|$ et $\alpha = \arg(a)$.

Démonstration

❖ *Supposons que la transformation s'écrit $z' = az + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Si $a = 1$, il s'agit d'une translation, donc d'une similitude directe. Sinon, on note $\omega = \frac{b}{1-a}$. Alors*

$$a\omega + b = a\frac{b}{1-a} + b = \frac{ab}{1-a} + \frac{b(1-a)}{1-a} = \frac{b}{1-a} = \omega$$

donc ω est un point fixe de f. On a alors

$$z' - \omega = az + b - (a\omega + b) = a(z - \omega)$$

En écrivant a sous forme exponentielle, il suit que f est la composée d'une homothétie et d'une rotation. On en déduit qu'elle conserve les rapports de longueurs et les angles orientés. Le rapport de la similitude est alors $|a|$ et son angle est $\arg(a)$.

❖ *On considère une similitude directe. On note O le point image de 0 et I celui de 1, et b, c les affixes de leurs images. Alors*

$$\frac{z' - b}{c - b} = \frac{z - 0}{1 - 0}$$

par conservation des rapports de longueur, donc

$$z' - b = z(c - b)$$

En notant $a = c - b$, on a alors

$$z' = az + b$$

◈

Remarque Une similitude directe de rapport $k > 0$ et d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ s'écrit donc

$$z' = ke^{i\alpha}z + b$$

Proposition La composée de similitudes directes de rapports $k, k' > 0$ et d'angles $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\alpha + \beta$.

Démonstration *Soit $z \in \mathbb{C}$. Son image z' par la similitude directe de rapport k et d'angle α est telle que*

$$z' = ke^{i\alpha}z + b$$

avec $b \in \mathbb{C}$.
L'image z'' de z' par la similitude directe de rapport k' et d'angle β est telle que

$$z'' = k'e^{i\beta}z' + c$$

avec $c \in \mathbb{C}$. Alors

$$z'' = kk'e^{i(\alpha+\beta)}z + bk'e^{i\beta} + c$$

d'où le résultat. ◈

10.3 Lieux géométriques

10.3.1 Droites

Proposition Soient A, B deux points d'affixes $a, b \in \mathbb{C}$. Alors la médiatrice de $[AB]$ a pour équation complexe

$$|z-a| = |z-b|$$

Démonstration *Il suffit d'utiliser la caractérisation des points de la médiatrice de $[AB]$ comme points équidistants de A et B.* ◈

Proposition L'équation complexe d'une droite est de la forme

$$\omega\overline{z} + \overline{\omega}z = k$$

avec $\omega \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration *Dans $\mathbb{R}^2$, on sait qu'une équation de droite est de la forme*

$$ax + by = c$$

avec a, b, c des réels. On fait correspondre chaque point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ au complexe $z = x+iy$. On remarque alors que

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{1}{2}(x+iy+x-iy) = x \quad \text{et} \quad \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{1}{2i}(x+iy-x+iy) = y$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} ax+by = c &\Leftrightarrow a\frac{z+\overline{z}}{2} + b\frac{z-\overline{z}}{2i} = c \\ &\Leftrightarrow a(z+\overline{z}) - ib(z-\overline{z}) = 2c \\ &\Leftrightarrow z(a-ib) + \overline{z}(a+ib) = 2c \end{aligned}$$

En notant $\omega = a+ib$ et $k = 2c$, on a bien le résultat voulu. ◈

10.3.2 Cercles et disques

Proposition Le cercle (respectivement le disque) de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ a pour équation complexe

$$|z-\omega| = r \quad \text{(respectivement, } |z-\omega| \leq r\text{)}$$

Démonstration *Il suffit d'utiliser la caractérisation d'un cercle et d'un disque par la distance avec le centre.* ◈

Proposition Le cercle de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ a pour équation complexe :

$$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z = r^2 - |\omega|^2$$

Démonstration *On utilise la caractérisation précédente :*

$$\begin{aligned} |z-\omega| = r &\Leftrightarrow |z-\omega|^2 = r^2 \quad \textit{car les quantités sont positives} \\ &\Leftrightarrow (z-\omega)\overline{(z-\omega)} = r^2 \\ &\Leftrightarrow (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z = r^2 - |\omega|^2 \end{aligned}$$

◈

10.4 Barycentres

Théorème Soient $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ des points du plans deux à deux distincts, et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels non nuls tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.
Alors il existe un unique point Ω tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\Omega M_i} = \overrightarrow{0}$$

Ce point est appelé barycentre des points $(M_i)_i$ associé aux poids $(\lambda_i)_i$, et on le note

$$\Omega = \text{Bar}((M_i)_i, (\lambda_i)_i)$$

Démonstration *Pour un point Ω, on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\Omega M_i} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\overrightarrow{\Omega M_1} + \overrightarrow{M_1 M_i}) = \overrightarrow{0} \quad \textit{par la relation de Chasles} \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{\Omega M_1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M_1 M_i} = \overrightarrow{0} \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{\Omega M_1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M_1 M_i} = \overrightarrow{0} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M_1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M_1 M_i} = \overrightarrow{0} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{M_1 \Omega} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{M_1 M_i}
\end{aligned}$$

Cela assure l'existence et l'unicité du barycentre. ◈

Proposition Soient $(M_i)_{1\leq i\leq n}$ des points deux à deux distincts d'affixes $(z_i)_{1\leq i\leq n}$, et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels non nuls de somme 1.
Alors l'affixe de $\Omega = \text{Bar}((M_i)_i, (\lambda_i)_i)$ est $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$.

Démonstration *Par définition du barycentre, on a*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (z_i - z) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i \\
&\Leftrightarrow z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i
\end{aligned}$$

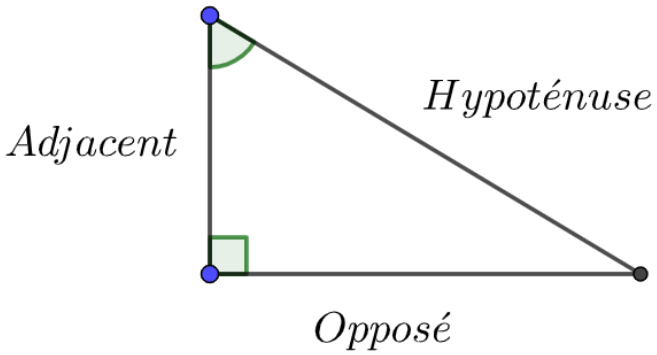
d'où le résultat. ◈

11 Trigonométrie

- **Niveau :** Troisième, Première spécialité, Terminale spécialité
- **Pré-requis :** théorème de Thalès, théorème de Pythagore, périmètre du cercle, droite réelle, repérage dans le plan, fonctions, continuité, dérivabilité

11.1 Trigonométrie dans le triangle

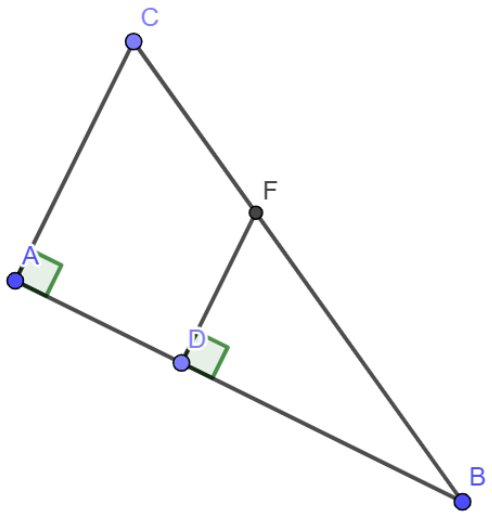
Définition On appelle hypoténuse d'un triangle rectangle le côté opposé à l'angle droit, ie le côté qui ne forme pas l'angle droit.
On appelle côté adjacent à un des angles aigus d'un triangle rectangle le côté qui forme cet angle avec l'hypoténuse. On appelle côté opposé à cet angle aigu le troisième côté du triangle, ie celui qui ne forme pas l'angle.



Proposition Soient ABC et DEF deux triangles rectangles respectivement en A et en D, et tels que $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$. Alors :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$$

Démonstration
Quitte à faire subir une isométrie au triangle DEF (ce qui conserve ses longueurs et ses angles), on peut supposer que $E = B$ et que $D \in [BA)$. Quitte à échanger ABC et DEF, on peut même supposer que $D \in [BA]$. Comme $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, on a alors $F \in [BC)$. De plus, ABC et DEF sont rectangles en A et D, donc (AC) et (DF) sont parallèles. Ainsi, F est du même côté de la droite (AC) que D, donc $F \in [CA]$.



Comme (AC) et (DF) sont parallèles, on dispose d'une configuration de Thalès. D'après le théorème de Thalès, on a alors :

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BA} = \frac{DF}{AC}$$

Ainsi, $AB \times BF = BC \times BD$, et :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BF} = \frac{DE}{EF}$$

car $B = E$.

De même, $BF \times AC = BC \times DF$, d'où :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{BF} = \frac{DF}{EF}$$

On en déduit alors que :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{\frac{DF}{EF}}{\frac{DE}{EF}} = \frac{DF}{DE}$$

◈

Remarque Ces rapports ne dépendent alors que de l'angle $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ que l'on considère, et pas des longueurs des triangles rectangles.

Définition Pour un angle α aigu donné, on définit alors ces rapports comme étant, respectivement, le cosinus, le sinus et la tangente de cet angle. On les note $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$.

Remarque Attention, ces définitions ne sont valables que pour des angles aigus. On verra plus loin comment définir le cosinus, le sinus et la tangente d'angles obtus.

Proposition Soit α un angle aigu. Alors

1. $0 < \sin(\alpha) < 1$ et $0 < \cos(\alpha) < 1$
2. $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
3. $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Démonstration

On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = \alpha$, de sorte que

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC} \quad \sin(\alpha) = \frac{AC}{BC} \quad \tan(\alpha) = \frac{AC}{AB}$$

1. *Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté, si bien que $0 < AB < BC$ et $0 < AC < BC$. On en déduit que $0 < \frac{AB}{BC} < 1$ et $0 < \frac{AC}{BC} < 1$, d'où le résultat.*

2. *On a*

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2+\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=\frac{AB^2+AC^2}{BC^2}$$

Or, comme ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2+AC^2=BC^2$, d'où

$$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=\frac{BC^2}{BC^2}=1$$

3. *On remarque que $\cos(\alpha)>0$. On a alors*

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}}=\frac{AC}{AB}=\tan(\alpha)$$

◈

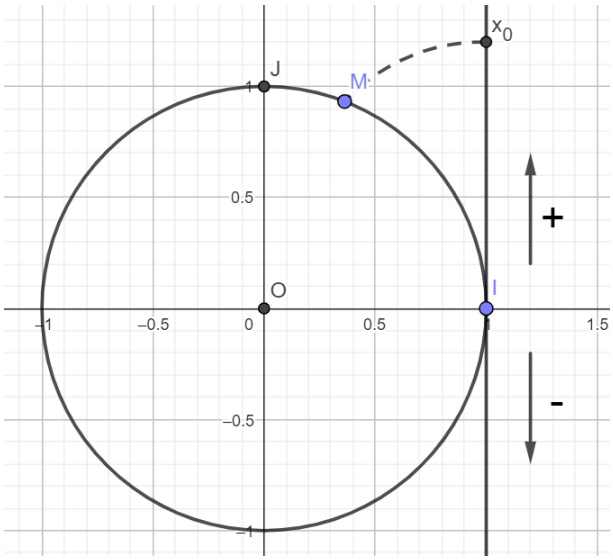
11.2 Trigonométrie dans le cercle

On se place dans un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

Définition On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.

Enroulement de la droite réelle : On trace la tangente à ce cercle au point I, que l'on identifie à la droite réelle, avec I l'origine et les points d'ordonnée positives correspondants aux réels positifs.

On enroule cette droite le long du cercle, en orientant les réels positifs dans le sens anti-horaire, appelé sens trigonométrique. Cela fait alors correspondre à chaque réel x_0 un point M du cercle trigonométrique, appelé point image de x_0.



Proposition Deux réels a et b ont le même point image si, et seulement si, il existe un entier k tel que $a=b+2k\pi$, ie si, et seulement si, a et b sont égaux modulo 2π.

Démonstration

On remarque qu'en enroulant la droite réelle sur le cercle trigonométrique, pour tout réel x, son point image M est tel que l'arc du cercle trigonométrique allant du point I au point M est de longueur $|x|$, à 2π près (en fonction du nombre de tours que l'on fait en enroulant la droite jusqu'à x, et dans quel sens). Ainsi, deux réels a et b ont le même point image si, et seulement si, en enroulant la droite réelle, la différence de tours à effectuer pour placer ces points images est un nombre entier de tours. Cela correspond donc à dire que a et b sont égaux modulo 2π.

◈

Définition On considère un angle α quelconque. Une mesure en radian de cet angle est un réel associé à un point M tel que $\alpha = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.

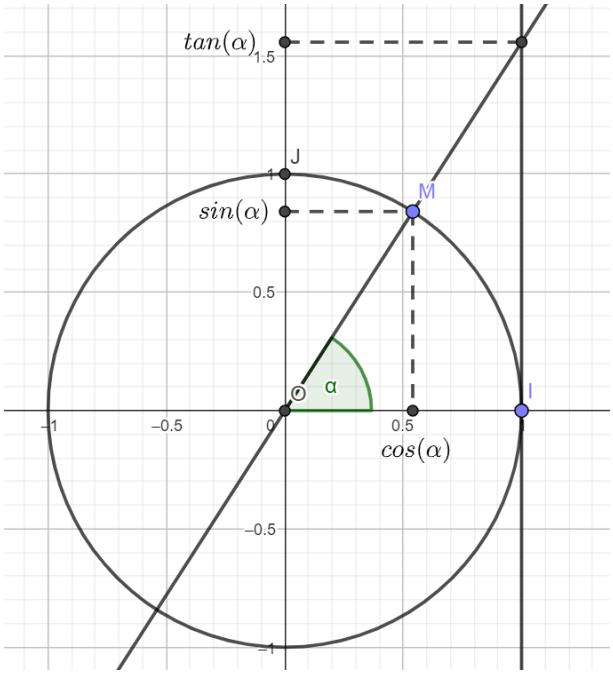
Remarque D'après la proposition précédente, deux mesures en radian d'un même angle sont égales modulo 2π. Tout angle possède donc une infinité de mesures en radian. Toutefois, cette proposition justifie la définition suivante.

Définition La mesure principale en radian d'un angle est l'unique mesure en radian de cet angle dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Remarque La mesure principale d'un angle α de point image M est donc, au signe près, la longueur de l'arc de cercle allant du point I au point M sur le cercle trigonométrique.

Définition Soit α un angle de point image M. On appelle alors cosinus et sinus de l'angle, et l'on note $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$, respectivement l'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

Définition Soit α un angle de point image M. On appelle tangente de cet angle, et on note $\tan(\alpha)$, l'ordonnée du point d'intersection de (OM) avec la tangente au cercle trigonométrique au point I, lorsqu'il existe.



Remarques

- ❖ C'est cette définition de la tangente d'un angle qui lui vaut ce nom.
- ❖ Lorsque l'angle mesure $\frac{\pi}{2}$ radian modulo π, il n'y a pas de point d'intersection. La tangente n'est alors pas définie.
- ❖ Si α est un angle aigu, on voit que les définitions précédentes coïncident avec celles données dans le triangle, puisque $OM = 1$.
- ❖ On remarque, en appliquant le théorème de Thalès dans cette configuration, que l'on a toujours, lorsque la tangente existe

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

On voit que les cas où la tangente n'existe pas correspondent à ceux où le cosinus s'annule.

11.3 Fonctions trigonométriques

Comme on vient de le voir, on peut associer à tout réel x des réels $\cos(x)$ et $\sin(x)$, et si x est différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π, un réel $\tan(x)$. On peut donc définir des fonctions rélles $\cos$ et $\sin$, définies sur $\mathbb{R}$, et une fonction réelle $\tan$ définie sur tout intervalle de la forme $\left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$, avec k entier.

11.3.1 Propriétés et formules

Proposition **1.** $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques, et $\tan$ est π-périodique, ie pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\cos(x+2k\pi)=\cos(x) \qquad \sin(x+2k\pi)=\sin(x) \qquad \tan(x+k\pi)=\tan(x)$$

à condition, pour la dernière égalité, que x soit différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

2. Pour tout réel x, on a $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$;.

3. Pour tout réel x, on a $\cos(x) \in [-1,1]$ et $\sin(x) \in [-1,1]$.

Démonstration

1. *On remarque que si la propriété est vraie pour $k=1$ et $k=-1$, alors elle l'est pour tout $k \in \mathbb{Z}$ par récurrence. On sait que deux mesures en radian du même angle diffèrent d'un multiple de 2π, ce qui justifie que les trois fonctions trigonométriques sont 2π-périodiques.*
On considère un réel x tel que $\tan(x)$ existe, et on considère M son point image. Alors, en suivant l'enroulement de la droite réelle, le point image M' de $x+\pi$ est le symétrique de M par rapport à O. Ainsi, les droites (OM) et (OM') sont identiques, ce qui justifie que $\tan(x+\pi)$ existe et que $\tan(x+\pi)=\tan(x)$.

2. *Pour tout réel x, son point image appartient au cercle trigonométrique. Ainsi*

$$(\cos(x)-0)^2+(\sin(x)-0)^2=1^2$$

d'où le résultat. De manière équivalente, il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle formé par O, M, et le projeté orthogonal de M sur (OI).

3. *Pour tout réel x, on a $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, avec $\cos^2(x) \geq 0$ et $\sin^2(x) \geq 0$. Ainsi, nécessairement $0 \leq \cos^2(x) \leq 1$ et $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$, d'où $\cos(x) \in [-1,1]$ et $\sin(x) \in [-1,1]$. Cela résulte également du fait que ce sont les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique, de centre O et de rayon 1.*

◈

Proposition $\cos$ est paire, et $\sin$ et $\tan$ sont impaires, ie pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(-x)=\cos(x) \qquad \sin(-x)=-\sin(x) \qquad \tan(-x)=-\tan(x)$$

lorsque $\tan(x)$ existe.

Démonstration

Soit x un réel. On remarque qu'en enroulant la droite réelle, les points images de x et de $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Comme $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos(-x)$ et $\sin(-x)$ sont leurs coordonnées, on en déduit les parités de $\cos$ et $\sin$.

Si $\tan(x)$ existe, on a vu que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. De plus, si x est différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π, comme $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont égaux modulo π, $-x$ est également différent de $\frac{\pi}{2}$ modulo π. Ainsi, $\tan(-x)$ existe et

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

◈

Proposition (Formules de décalage d'angle) Soit x un réel.

1. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et si $\tan(x)$ existe, $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$.

2. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$, $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et si $\tan(x)$ existe, $\tan(\pi + x) = \tan(\pi)$.

3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

4. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

Démonstration

1. *Les points images de x et $\pi - x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, d'où les résultats.*

2. *Les points images de x et $\pi + x$ sont symétriques par rapport à O, d'où les résultats.*

3. *Les points images de x et $\frac{\pi}{2} - x$ sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{IOJ}$, d'où les résultats.*

4. *Les points images de $\frac{\pi}{2} + x$ et $\frac{\pi}{2} - x$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, d'où les résultats.*

◈

Proposition (Valeurs usuelles) On a les valeurs suivantes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Remarque On peut ensuite utiliser les propriétés de symétrie des fonctions trigonométriques pour calculer les images de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, ainsi que celles de leurs opposés et des opposés des valeurs dans le tableau.

Démonstration

Pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, le point image de x appartient respectivement à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées, d'où le résultat.

Lorsque $x = \frac{\pi}{3}$, le triangle OIM est isocèle en O et un de ses angles mesure $60°$, donc il est équilatéral. Ainsi, sa hauteur issue de M est sa médiane issue de M, si bien que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Ensuite, on a

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

car le projeté orthogonal de M sur (OJ) appartient dans ce cas à $[OJ]$, d'où $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 0$.

Comme $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, les valeurs pour $\frac{\pi}{6}$ découlent de celles pour $\frac{\pi}{3}$ et des formules précédentes.

Comme $2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$*, on a, d'après les formules précédentes,* $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$*. Ainsi,*

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

car le projeté orthogonal du point image de $\frac{\pi}{4}$ *appartient à* $[OI]$*, d'où* $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \geq 0$*.*
Les valeurs pour $\tan$ *se déduisent du fait que* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *dès que* $\tan(x)$ *existe.*

◈

Proposition (Formules d'addition et de soustraction) Pour tous réels a et b, on a

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Démonstration

On considère les points A*,* B *et* C*, images de* a*,* $a+b$ *et* $a+\frac{\pi}{2}$ *respectivement. On a alors*

$$\overrightarrow{OA} = \cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}$$

et

$$\overrightarrow{OC} = \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{OI} + \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\overrightarrow{OJ} = -\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}$$

De plus, l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ *a pour mesure* b*, et le repère* $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right)$ *est orthonormé par hypothèse. Ainsi*

$$\overrightarrow{OB} = \cos(b)\overrightarrow{OA} + \sin(b)\overrightarrow{OC}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \cos(b)\left(\cos(a)\overrightarrow{OI} + \sin(a)\overrightarrow{OJ}\right) + \sin(b)\left(-\sin(a)\overrightarrow{OI} + \cos(a)\overrightarrow{OJ}\right)\\ &= \Big(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\Big)\overrightarrow{OI} + \Big(\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\Big)\overrightarrow{OJ}\end{aligned}$$

Par conséquent, par définition de B*, on a les formules d'addition.*
On en déduit les formules de soustraction en remarquant que $a-b = a+(-b)$*, et en utilisant les parités de* $\cos$ *et* $\sin$*.*

◈

Proposition (Formules de duplication) Pour tout $a \in \mathbb{R}$

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

Démonstration

Il suffit d'appliquer les formules d'addition avec $a = b$*, et d'utiliser la relation* $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$*.*

◈

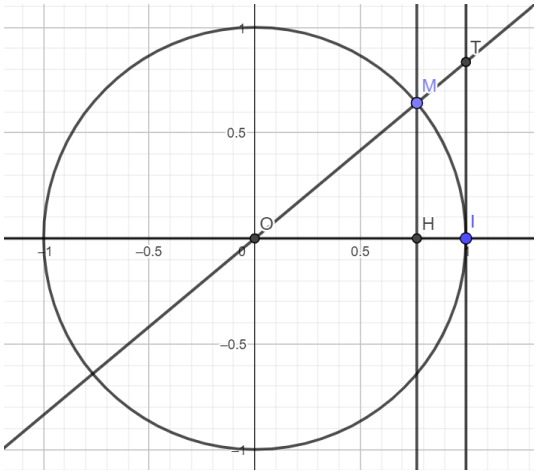
11.3.2 Dérivation, variations, courbes

Les propriétés de continuité et de dérivabilité des fonctions trigonométriques sont admises au lycée. Toutefois, on a va en donner ici les démonstrations. Pour cela, on a besoin du lemme suivant.

Lemme Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \leq x \leq \tan(x)$

Démonstration

Soit $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et soit M son point image. M se situe alors dans le premier quadrant. On note H le projeté orthogonal de M sur (OI), et T le point d'intersection de (OM) avec la tangente au cercle trigonométrique en I.



L'aire du triangle OIM est inférieure à l'aire du secteur angulaire OIM, qui est-elle même inférieure à l'aire du triangle OIT. L'aire du triangle OIM est

$$\frac{OI \times MH}{2} = \frac{\sin(x)}{2}$$

L'aire du secteur angulaire OIM est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$, donc elle vaut

$$\pi \times 1^2 \times \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$$

L'aire du triangle OIT est

$$\frac{OI \times OT}{2} = \frac{\tan(x)}{2}$$

Ainsi

$$\frac{\sin(x)}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\tan(x)}{2} \Rightarrow \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

◈

Proposition Les fonctions $\cos$, $\sin$ et $\tan$ sont continues sur leurs intervalles de définition respectifs.

Démonstration

Commençons par prouver que $\sin$ et $\cos$ sont continues en 0. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, d'après le lemme, $\sin(x) \leq x$. Comme $\sin$ est impaire, on a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $|\sin(x)| \leq |x|$. On en déduit que

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$$

Ainsi, $\sin$ est continue en 0. D'autre part, pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$, donc

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1 = \cos(0)$$

On en déduit que $\cos$ est continue en 0.

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

donc

$$\lim_{h \to 0} \sin(x+h) = \sin(x)$$

De même

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

donc

$$\lim_{h\to 0}\cos(x+h)=\sin(x)$$

Cela assure que $\cos$ *et* $\sin$ *sont continues sur* $\mathbb{R}$.

Sur son ensemble de définition, $\tan$ *est donc un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule. Elle y est donc également continue.*

◈

Proposition $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\cos'(x)=-\sin(x)\quad \sin'(x)=\cos(x)$$

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\tan$ est dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$, et

$$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$$

Démonstration

On commence par montrer que $\cos$ *et* $\sin$ *sont dérivables en* 0. *D'après le lemme, pour tout* $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $\sin(x)\leq x\leq\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. *Ainsi*

$$x\cos(x)\leq\sin(x)\leq x\Rightarrow\cos(x)\leq\frac{\sin(x)}{x}\leq 1$$

Comme les fonctions en jeu sont paires, cette égalité reste vraie pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. *Comme* $\lim_{x\to 0}\cos(x)=1$, *d'après le théorème des gendarmes*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

Ainsi, $\sin$ *est dérivable en* 0 *et* $\sin'(0)=1$. *Par la formule de duplication, pour tout* $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\cos(x)=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

d'où

$$\frac{\cos(x)-1}{x}=-2\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$

$\cos$ *est donc dérivable en* 0 *et* $\cos'(0)=0$.

Pour tous $x\in\mathbb{R}$ *et* $h\in\mathbb{R}^*$, *on a*

$$\sin(x+h)=\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)$$

donc

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

Avec les deux limites précédentes, on obtient que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=\cos(x)$$

ce qui montre que $\sin$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\sin'=\cos$. *On a également*

$$\cos(x+h)=\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)$$

donc

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=-\sin(x)$$

ce qui montre que $\cos$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et que* $\cos'=-\sin$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$\tan$ est donc un quotient de fonction dérivables et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$, ce qui la rend dérivable sur cet intervalle. En utilisant la formule de dérivation d'un quotient, on obtient que pour tout x dans cet intervalle

$$\tan'(x) = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

◈

Proposition $\cos$ est (strictement) positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ ($[0, \frac{\pi}{2}[$) et (strictement) négative sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ($]\frac{\pi}{2}, \pi]$).
$\sin$ est (strictement) négative sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ ($[-\frac{\pi}{2}, 0[$) et (strictement) positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ ($]0, \frac{\pi}{2}]$).
$\tan$ est (strictement) négative sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ ($]-\frac{\pi}{2}, 0[$) et (strictement) positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ ($]0, \frac{\pi}{2}[$).

Démonstration

Cela résulte de la position des points images sur le cercle trigonométrique des réels de ces intervalles.

◈

Remarque Les propriétés de périodicité de ces fonctions permettent alors de connaître leur signe sur leur ensemble de définition complet.

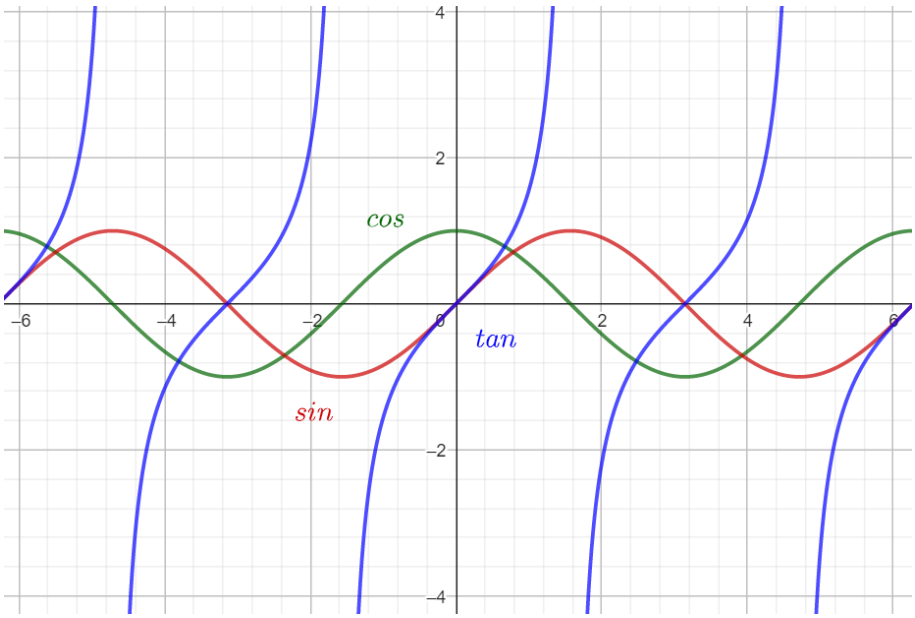
Proposition $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$.
$\sin$ est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
$\tan$ est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Démonstration

C'est une conséquence directe des propriétés de dérivabilité de ces fonctions et de leur signe.

◈

On donne les courbes représentatives des fonctions trigonométriques :



Proposition On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0$$

Démonstration
Il s'agit simplement des limites des taux d'accroissements de ces fonctions en 0*, qui valent donc* $\sin'(0) = \cos(0) = 1$*, et* $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$.

◈

11.4 Équations et fonctions réciproques

On s'intéresse aux équations faisant intervenir des fonctions trigonométriques.

Pour résoudre une équation du type $\cos(x) = \cos(y)$, on utilise le fait que deux angles ont le même cosinus si, et seulement si, ils sont égaux modulo 2π, ou opposés modulo 2π. Ainsi, $\cos(x) = \cos(y)$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $x = y + 2k\pi$, ou $x = -y + 2k\pi$.

Pour les équations du type $\sin(x) = \sin(y)$, on suit le même type de raisonnement. Deux angles ont le mêmes sinus si, et seulement si, ils sont égaux modulo 2π ou supplémentaires modulo 2π. Par conséquent, $\sin(x) = \sin(y)$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$.

Pour les équations du type $\tan(x) = \tan(y)$, on utilise que x et y ont la même tangente si, et seulement si, ils sont égaux modulo 2π ou si y est égal à $x + \pi$ modulo 2π.

Pour résoudre une équation du type $\cos(x) = \sin(y)$, on utilise une formule de décalage d'angle pour se ramener à un des cas précédents.

Proposition Les fonctions $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$, $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ et $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ sont bijectives.

Démonstration
$\cos$ *est continue et strictement décroissante sur* $[0, \pi]$*, et* $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi) = -1$*. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de* $[0, \pi]$ *dans* $[-1, 1]$.
$\sin$ *est continue et strictement croissante sur* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$*, et* $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$*. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *dans* $[-1, 1]$.
$\tan$ *est continue et strictement croissante sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*. De plus, pour tout* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2},\ x > -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2},\ x < \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$$

D'après le théorème de la bijection, $\tan$ *réalise donc une bijection de* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *dans* $\mathbb{R}$.

◈

Définition On appelle $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ les bijections réciproques respectives de ces trois fonctions.

Ces fonctions permettent, à l'aide d'une calculatrice, de résoudre les équations du type $\cos(x) = a$, $\sin(x) = a$ et $\tan(x) = a$. En effet, elles donnent une solution dans un certain intervalle (selon la fonction), et toutes les autres solutions sont alors égales modulo 2π (pour $\cos$ et $\sin$) ou modulo π (pour $\tan$).

12 Repérage dans le plan, dans l'espace, sur une sphère

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** nombre réel, droite réelle, projeté orthogonal, angles orientés, distance euclidienne, vecteurs du plan et de l'espace, théorème de Pythagore, produit scalaire, trigonométrie

12.1 Repérage sur une droite

Définition On dit que l'on gradue une droite lorsque l'on choisit un de ses points O comme origine, et un vecteur $\vec{i}$ directeur de cette droite. On obtient alors une droite graduée. On note alors I le point de la droite tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$. On dit alors que $\left(O, \overrightarrow{OI}\right) = \left(O, \vec{i}\right)$ est un repère cartésien. La longueur OI est prise comme unité de longueur.

On considère une droite graduée par un repère $\left(O, \overrightarrow{OI}\right)$.

Proposition (admise) À tout point A de la droite (OI) correspond un unique réel x tel que $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OI}$, appelé abscisse du point A. On note alors $A(x)$.

Proposition Soient A, B deux points de la droite (OI), d'abscisses respectives x_A et x_B. Alors $AB = |x_B - x_A|$

Démonstration *Par définition, on a* $\overrightarrow{OA} = x_A\overrightarrow{OI}$ *et* $\overrightarrow{OB} = x_B\overrightarrow{OI}$. *Par conséquent*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_B - x_A)\overrightarrow{OI}$$

Ainsi, $AB = |x_B - x_A|OI = |x_B - x_A|$. ◈

12.2 Repérage dans le plan

On se place cette fois dans un plan, que l'on pourra assimiler à $\mathbb{R}^2$.

12.2.1 Repère cartésien et coordonnées cartésiennes

Définition Un repère cartésien est la donnée d'un triplet $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, où O est un point quelconque, et $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont des vecteurs du plan non colinéaires.
O s'appelle l'origine du repère, (OI) s'appelle l'axe des abscisses et (OJ) l'axe des ordonnées.

Proposition (admise) À tout point M du plan correspond un unique couple (x, y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.
Les réels x et y sont alors appelés respectivement abscisse et ordonnée de M : ils forment les coordonnées cartésiennes de M. On note alors $M(x, y)$.

Définition Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. Les coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$.

Définition Un repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est dit orthogonal si les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont orthogonaux. Il est dit orthonormé, ou orthonormal, si de plus $OI = OJ$.

Proposition (admise) Soit $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ un repère orthogonal. Soit $M(x, y)$. Alors le projeté orthogonal de M sur (OI) (resp. (OJ)) a pour coordonnées $(x, 0)$ (resp. $(0, y)$).

12.2.2 Propriétés et applications

On considère dans cette partie le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

Proposition Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Alors
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Démonstration *On note H le point de coordonnées (x_B, y_A). Comme le repère est orthogonal, ABH est un triangle rectangle en H. Ainsi, d'après le théorème de Pythagore :*
$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$
D'autre part, comme A et H ont la même ordonnée, le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à l'axe des abscisses. Par conséquent, $AH = |x_B - x_A|OI$. De même, B et H ont la même abscisse, donc $BH = |y_B - y_A|OJ$. Le repère est orthonormé, donc $OI = OJ = 1$, et
$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
d'où le résultat. ◈

On rappelle que pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan leur produit scalaire peut être défini par
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right)$$

Proposition Pour $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on a
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy'$$

Démonstration *On a*
$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 \\ &= (x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) \\ &= x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2 \\ 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= 2xx' + 2yy' \end{aligned}$$
d'où le résultat. ◈

Proposition Une droite du plan a pour équation $ax+by+c=0$, avec a,b,c des réels tels que $(a,b)\neq(0,0)$. Réciproquement, toute équation de cette forme désigne une droite du plan.

Démonstration *On considère une droite du plan, un point $A(x_A,y_A)$ de cette droite, et un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ directeur de cette droite.*

On commence par remarquer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ puisque

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=\alpha\times(-\beta)+\beta\times\alpha=0$$

Ainsi, pour tout point $M(x,y)$ de la droite, $\overrightarrow{MA}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$, d'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{n}=0&\Leftrightarrow(x-x_A)\times(-\beta)+(y-y_A)\times\alpha=0\\&\Leftrightarrow-\beta x+\alpha y+\beta x_A-\alpha y_A=0\end{aligned}$$

ce qui est la forme souhaitée.

Réciproquement, on vérifie qu'une telle équation désigne une droite. Si $a=0$ ou $b=0$, c'est clair. On suppose maintenant a et b non nuls. On remarque que les coordonnées du point $A\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ vérifient $ax_A+by_A+c=0$.

Considérons un point $M(x,y)$ tel que $ax+by+c=0$. Alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\\&=a(x-x_A)+b(y-y_A)\\&=ax+by-(ax_A+by_A)\\&=-c-(-c)\\&=0\end{aligned}$$

Ainsi, M appartient à la droite orthogonale au vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ passant par A. D'après le premier point, celle-ci a bien pour équation $ax+by+c=0$, d'où le résultat. ◈

Proposition Soient $A(x_A,y_A)$ et D une droite d'équation $ax+by+c=0$. Alors la distance de A à D est

$$d(A,D)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Démonstration *On a vu que le vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est orthogonal à la droite D. Notons H le projeté orthogonal de A sur D. Soit $M(x,y)$ un point de D. On va calculer $\left|\overrightarrow{AM}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|$ de deux façons différentes.*

D'une part :

$$\left|\overrightarrow{AM}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|=|a(x-x_A)+b(y-y_A)|=|-ax_A-by_A-c|=|ax_A+by_A+c|$$

car $ax+by+c=0$. D'autre part, comme $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires :

$$\left|\overrightarrow{AM}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|=\left|\overrightarrow{AH}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right|=AH\times\left\|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\|=AH\times\sqrt{a^2+b^2}$$

Ainsi

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◈

Proposition Tout cercle du plan a pour équation une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$, avec a,b,c des réels.

Démonstration *On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(x_A,y_A)$ et de rayon $R>0$. Alors pour tout point $M(x,y)$ on a :*

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{C} &\Leftrightarrow AM=R \\ &\Leftrightarrow AM^2=R^2 \quad \textit{car les quantités sont positives} \\ &\Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x_Ax+{x_A}^2+y^2-2y_Ay+{y_A}^2=R^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2x_Ax-2y_Ay+{x_A}^2+{y_A}^2-R^2=0 \end{aligned}$$

ce qui est la forme souhaitée. ◈

Remarque Attention, la réciproque est fausse : une équation de cette forme ne désigne pas nécessairement un cercle. En effet, on vient de voir dans la preuve que les paramètres a,b,c ne doivent pas être quelconques.

12.2.3 Coordonnées polaires

Proposition Soit M de coordonnées (x,y) dans un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, distinct de l'origine O. Alors $r=OM=\sqrt{x^2+y^2}>0$, et l'angle orienté $\theta=\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$ vérifie

$$\cos(\theta)=\frac{x}{OM} \quad \text{et} \quad \sin(\theta)=\frac{y}{OM}$$

Démonstration *On a vu que $OM=\sqrt{x^2+y^2}$. Comme $(x,y)\neq(0,0)$, $OM>0$. Si l'on note H le projeté orthogonal de M sur (OI), alors H a pour coordonnées $(x,0)$. Ainsi, la longueur algébrique $\overline{OH}$ vaut x et la longueur algébrique $\overline{HM}$ vaut y. Par conséquent, dans le triangle OHM rectangle en H, on a*

$$\cos(\theta)=\frac{x}{OM} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta)=\frac{y}{OM}$$

◈

Définition Les réels (r,θ) ainsi définis sont les coordonnées polaires du point M.

Proposition Soient M et M' de coordonnées polaires respectives (r,θ) et (r',θ'). Alors

$$M=M' \Leftrightarrow r=r' \quad \text{et} \quad \theta\equiv\theta'(2\pi)$$

Démonstration *Le sens direct est clair. Réciproquement, supposons que $r=r'$ et $\theta\equiv\theta'(2\pi)$. En particulier, on a $OM=OM'$, $\cos(\theta)=\cos(\theta')$ et $\sin(\theta)=\sin(\theta')$. Ainsi*

$$x=OM\cos(\theta)=OM'\cos(\theta') \quad \textit{et} \quad y=OM\sin(\theta)=OM'\sin(\theta')$$

d'où $M=M'$. ◈

Remarque Ces deux systèmes de coordonnées sont les analogues directs des formes algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe, par la bijection canonique entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$.

12.3 Repérage dans l'espace

On se place à présent dans l'espace, que l'on peut assimiler à $\mathbb{R}^3$.

12.3.1 Coordonnées cartésiennes

Définition Un repère cartésien est la donnée d'un quadruplet $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$ avec O un point de l'espace quelconque, et $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}$ trois vecteurs de l'espace linéairement indépendants, c'est-à-dire de déterminant non nul.
O est appelé origine du repère, (OI) est l'axe des abscisses, (OJ) celui des ordonnées et (OK) celui des côtes.

Désormais, on munit l'espace d'un repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$.

Proposition (admise) À tout point M de l'espace correspond un unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}$.
x est alors l'abscisse de M, y son ordonnée et z sa côte : ce sont les coordonnées cartésiennes de M. On note alors $M(x, y, z)$.

Définition $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$ est dit orthogonal si les vecteurs $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}$ sont deux à deux orthogonaux. Si de plus, $OI = OJ = OK$, on dit que le repère est orthonormé, ou orthonormal.

Proposition (admise) Soit $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$ un repère orthogonal. Le projeté orthogonal de $M(x, y, z)$ sur (OI) (resp. (OJ) et (OK)) a pour coordonnées $(x, 0, 0)$ (resp. $(0, y, 0)$ et $(0, 0, z)$).

12.3.2 Propriétés et applications

On munit dans cette partie l'espace d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$.

Proposition Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Alors
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Démonstration *On note $H(x_A, y_A, z_B)$. Alors B et H sont dans un même plan d'équation $z = z_B$. Dans ce plan, que l'on peut assimiler à $\mathbb{R}^2$, on a par le théorème de Pythagore :*
$$BH^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$
D'autre part, A et H ont la même ordonnée et la même abscisse, donc $AH = |z_B - z_A|$. Comme le repère est orthogonal, le triangle ABH est rectangle en H, et on a par le théorème de Pythagore :
$$AB^2 = BH^2 + AH^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$$
d'où le résultat. ◈

Proposition Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. Alors
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration *On a*

$$\begin{aligned}2\vec{u}\cdot\vec{v} &= \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\\ &= (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2-(x^2+y^2+z^2)-(x'^2+y'^2+z'^2)\\ &= 2xx'+2yy'+2zz'\end{aligned}$$

d'où le résultat. ◈

Proposition Tout plan de l'espace admet une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec a,b,c,d des réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, et toute équation de cette forme désigne un plan de l'espace.

Démonstration *On considère un plan $\mathcal{P}$ de l'espace, et un point $A(x_A,y_A,z_A)$ de ce plan. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ un vecteur normal à ce plan. Pour tout $M(x,y,z)$ on a*

$$\begin{aligned}M\in\mathcal{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow \alpha(x-x_A)+\beta(y-y_A)+\gamma(z-z_A)=0\\ &\Leftrightarrow \alpha x+\beta y+\gamma z+(-\alpha x_A-\beta y_A-\gamma z_A)=0\end{aligned}$$

ce qui est de la forme souhaitée.

Réciproquement, on considère un triplet $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et un réel d, et on s'intéresse à l'équation $ax+by+cz+d=0$. Si $a=0$, ou $b=0$, ou $c=0$, on obtient une équation de droite à x, ou y, ou z fixé. L'ensemble des solutions est donc une réunion de droites parallèles, avec x ou y ou z variant dans $\mathbb{R}$ entier, donc il s'agit d'un plan.
Supposons maintenant que $a\neq0$, $b\neq0$ et $c\neq0$. On vérifie alors que $A\left(0,0,-\frac{d}{c}\right)$ est un point dont les coordonnées vérifient l'équation. Alors pour tout $M(x,y,z)$ tel que $ax+by+cz+d=0$, on a

$$a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0$$

Ainsi, $\overrightarrow{AM}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0$, donc M est dans le plan orthogonal à $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ passant par A. D'après le premier point, celui-ci a pour équation $ax+by+cz+d=0$, d'où le résultat. ◈

12.3.3 Coordonnées sphériques et repérage sur une sphère

Proposition Soit $M(x,y,z)$ distinct de $(0,0,0)$. On note H le projeté orthogonal de M sur le plan de repère $\left(O,\vec{OI},\vec{OJ}\right)$, c'est-à-dire $H(x,y,0)$. Alors $r=OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$, $\varphi=\left(\vec{OH},\vec{OM}\right)$ et $\theta=\left(\vec{OI},\vec{OH}\right)$ vérifient :

$$x=r\cos(\varphi)\cos(\theta)\quad y=z\cos(\varphi)\sin(\theta)\quad z=r\sin(\varphi)$$

Démonstration *On commence par remarquer que $OM^2=x^2+y^2+z^2>0$.*

On note (ρ,ψ) les coordonnées polaires de H dans le plan d'équation $z=0$. Alors $x=\rho\cos(\psi)$ et $y=\rho\sin(\psi)$. Par définition, $\psi=\theta$ et $\rho=OH$.

Comme H est le projeté orthogonal de M sur le plan de repère $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, le triangle OMH est rectangle en H. On en déduit que

$$OH = OM\cos(\varphi) \quad \textit{et} \quad MH = OM\sin(\varphi)$$

Ainsi,

$$x = \rho\cos(\psi) = r\cos(\varphi)\cos(\theta)$$

puis

$$y = \rho\sin(\psi) = r\cos(\varphi)\sin(\theta)$$

et

$$z = OM\sin(\varphi) = r\sin(\varphi)$$

◈

Définition On appelle r le rayon, θ la longitude et φ la latitude de M : ce sont ses coordonnées sphériques.

Remarque Sur Terre, que l'on modélise par une sphère, le rayon est constant. Ainsi, on peut repérer un point par ses deux autres coordonnées : la longitude et la latitude. On considère pour axe (OK) l'axe passant par les deux pôles, et on place l'origine au centre de la Terre.

Définition Sur Terre, on appelle méridien un demi-cercle d'extrémités les pôles Nord et Sud.
On appelle parallèle tout cercle obtenu par section de la sphère avec un plan normal à l'axe des pôles.

Remarque Comme pour les coordonnées polaires dans le plan, pour les coordonnées sphériques, on a unicité des coordonnées modulo 2π pour les angles.
Ainsi, sur Terre, on a unicité du couple (méridien, parallèle). Il suffit alors de choisir des origines pour ces deux "axes" de coordonnées. Pour les parallèles, on choisit l'équateur, qui est le cercle médian aux deux pôles. Pour les méridiens, on choisit le méridien de Greenwhich, qui est celui qui passe par l'Observatoire de Greenwich, quartier de Londres.

13 Droites et plans dans l'espace

- **Niveau :** lycée
- **Pré-requis :** repérage dans l'espace, théorème de Pythagore, géométrie vectorielle, produit scalaire, projeté orthogonal

Dans toute cette leçon, on se place dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$ de l'espace.

13.1 Définitions et premières caractérisations

13.1.1 Définitions

Définition On considère un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ est définie comme :

$$\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u}) = \{M \in \mathbb{R}^3,\ \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}\}$$

Proposition Deux droites $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}(B, \overrightarrow{u}')$ sont identiques si, et seulement si, $B \in \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}'$ sont colinéaires.

Démonstration *Supposons que $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u}) = \mathcal{D}(B, \overrightarrow{u}')$. On a alors $\overrightarrow{BB} = 0 \cdot \overrightarrow{u}'$, donc $B \in \mathcal{D}(B, \overrightarrow{u}')$ et $B \in \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$. De même, par symétrie, on a $A \in \mathcal{D}(B, \overrightarrow{u}')$. Il existe alors des réels t, t' tels que*

$$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{u} = t'\overrightarrow{u}'$$

ce qui assure que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont colinéaires.

Réciproquement, supposons que $B \in \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et que $\overrightarrow{u}' = \lambda\overrightarrow{u}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Il existe alors un réel α tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{u}$. Soit $M \in \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$. On a alors

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\alpha\overrightarrow{u} + t\overrightarrow{u} = (t-\alpha)\overrightarrow{u} = (t-\alpha)\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{u}'$$

d'où $M \in \mathcal{D}(B, \overrightarrow{u}')$, et $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u}) \subset \mathcal{D}(B, \overrightarrow{u}')$.
Soit $M' \in \mathcal{D}(B, \overrightarrow{u}')$. Il existe alors un réel t' tel que $\overrightarrow{BM'} = t'\overrightarrow{u}'$. Alors

$$\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM'} = \alpha\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{u}' = (\alpha + t'\lambda)\overrightarrow{u}$$

donc $M' \in \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}(B, \overrightarrow{u}') \subset \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$.
Finalement, on en déduit que $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u}) = \mathcal{D}(B, \overrightarrow{u}')$. ◈

Remarque En particulier, il n'y a pas unicité du couple $(A, \overrightarrow{u})$ pour décrire une droite de l'espace.

Définition On considère un point A et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ non nuls de l'espace, et non colinéaires. Le plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est défini comme :

$$\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \{M \in \mathbb{R}^3,\ \exists t, s \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}\}$$

Proposition On considère un plan $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Si B est un point de ce plan, $\overrightarrow{u}'$ un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}'$ un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{v}$, alors $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathcal{P}(B, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$.

Démonstration *Comme $B \in \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, il existe des réels α, β tels que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. Il existe également des réels λ, μ non nuls tels que $\overrightarrow{u}' = \lambda\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}' = \mu\overrightarrow{v}$.*
Soit $M \in \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Il existe alors deux réels t et s tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$. Alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\\ &= -(\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}\\ &= (t-\alpha)\overrightarrow{u} + (s-\beta)\overrightarrow{v}\\ &= (t-\alpha)\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{u}' + (s-\beta)\frac{1}{\mu}\overrightarrow{v}'\end{aligned}$$

d'où $M \in \mathcal{P}(B, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ et $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \subset \mathcal{P}(B, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$.
Soit maintenant $M' \in \mathcal{P}(B, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$. Il existe alors des réels t', s' tels que $\overrightarrow{BM'} = t'\overrightarrow{u}' + s'\overrightarrow{v}'$. Ainsi

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM'} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM'}\\ &= \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + t'\overrightarrow{u}' + s'\overrightarrow{v}'\\ &= \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + t'\lambda\overrightarrow{u} + s'\mu\overrightarrow{v}\\ &= (\alpha + t'\lambda)\overrightarrow{u} + (\beta + s'\mu)\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

d'où $M' \in \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et $\mathcal{P}(B, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}') \subset \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On en conclut que $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathcal{P}(B, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$. ◈

Remarque Il n'y a donc pas unicité du triplet $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ pour décrire un plan.

Remarque La réciproque de ce résultat est fausse : il est possible de deux plans soient identiques, bien que générés par des vecteurs non deux à deux colinéaires. En réalité, il faut pour cela qu'ils soient linéairement liés, notion non étudiée au lycée.

13.1.2 Représentation paramétrique

Proposition Soit $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ une droite de l'espace. On note $A(x_A, y_A, z_A)$, et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Alors pour tout point $M(x, y, z)$, on a

$$M \in \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases}x = x_A + ta\\ y = y_A + tb\\ z = z_A + tc\end{cases}$$

Démonstration *Soit $M(x,y,z)$. Par définition, $M \in \mathcal{D}(A,\vec{u})$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Du point de vue des coordonnées, cela se traduit par :*

$$\begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}$$

d'où le résultat. ◈

Remarque Réciproquement, tout système d'équation de cette forme désigne une droite de l'espace, passant par (x_A, y_A, z_A) et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

On appelle ce type de caractérisation une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}(A,\vec{u})$. Tout comme il n'y a pas unicité de ce type de description, il n'y a pas unicité d'une représentation paramétrique.

Proposition Soit $\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})$ un plan de l'espace. On note $A(x_A,y_A,z_A)$, $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Alors pour tout point $M(x,y,z)$, on a

$$M \in \mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v}) \Leftrightarrow \exists t,s \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = x_A + ta + s\alpha \\ y = y_A + tb + s\beta \\ z = z_A + tc + s\gamma \end{cases}$$

Démonstration *Soit $M(x,y,z)$. Par définition, $M \in \mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})$ si, et seulement si, il existe deux réels t et s tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$. Du point de vue des coordonnées, cela se traduit par :*

$$\begin{cases} x - x_A = ta + s\alpha \\ y - y_A = tb + s\beta \\ z - z_A = tc + s\gamma \end{cases}$$

d'où le résultat. ◈

Remarque Réciproquement, tout système d'équation de cette forme désigne un plan passant par A, dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

On appelle ce type de caractérisation une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})$. Tout comme il n'y a pas unicité de ce type de description, il n'y a pas unicté d'une représentation paramétrique.

13.2 Vecteur normal et équation cartésienne

Définition Un vecteur $\vec{n}$ non nul est dit normal à un plan, ou à une droite, si pour tous points M et N de ce plan, ou de cette droite, il est orthogonal à $\overrightarrow{MN}$.

Proposition Tout plan admet un vecteur normal.

Démonstration *On considère un plan $\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})$, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. On définit alors*

$$\vec{n}\begin{pmatrix} b\gamma - c\beta \\ c\alpha - a\gamma \\ a\beta - b\alpha \end{pmatrix}$$

On remarque alors que

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}=a(b\gamma-c\beta)+b(c\alpha-a\gamma)+c(a\beta-b\alpha)=\alpha(bc-cb)+\beta(ca-ac)+\gamma(ab-ba)=0$$

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}=\alpha(b\gamma-c\beta)+\beta(c\alpha-a\gamma)+\gamma(a\beta-b\alpha)=a(\beta\gamma-\gamma\beta)+b(\alpha\gamma-\gamma\alpha)+c(\beta\alpha-\alpha\beta)=0$$

Ainsi, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{n}$.

Soient $M,N\in\mathcal{P}(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Il existe alors des réels t,s,t',s' tels que

$$\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{u}+s\overrightarrow{v}$$
$$\overrightarrow{AN}=t'\overrightarrow{u}+s'\overrightarrow{v}$$

On a alors

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=(t'-t)\overrightarrow{u}+(s'-s)\overrightarrow{v}$$

On en déduit que

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{n}=(t'-t)\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{n}+(s'-s)\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}=0$$

$\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal à $\overrightarrow{MN}$. Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, $\overrightarrow{n}$ est non nul, et ainsi normal au plan $\mathcal{P}(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. ◈

Proposition Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace, et soit $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Alors il existe un réel d tel que pour tout $M(x,y,z)\in\mathcal{P}, ax+by+cz+d=0$.
Réciproquement, toute équation de cette forme désigne un plan.

Démonstration *On considère un point $A(x_A,y_A,z_A)$ de $\mathcal{P}$. Alors pour tout $M\in\mathcal{P}$, $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$, c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}=0\Rightarrow&\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0\\&\Rightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0\\&\Rightarrow ax+by+cz+d=0\quad\text{avec } d=-ax_A-by_A-cz_A\end{aligned}$$

Ainsi, tout point $M(x,y,z)$ de $\mathcal{P}$ vérifie $ax+by+cz+d=0$.

Réciproquement, soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace tel que $ax+by+cz+d=0$. Comme $\overrightarrow{n}$ est non nul, quitte à échanger les axes du repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK}\right)$, on peut supposer que $a\neq0$. Alors

$$ax=-by-cz-d\Rightarrow x=-\frac{b}{a}y-\frac{c}{a}z-\frac{d}{a}$$

Les coordonnées de M vérifient alors

$$\begin{cases}x=-\frac{d}{a}-\frac{b}{a}y-\frac{c}{a}z\\y=0+1\times y+0\times z\\z=0+0\times y+1\times z\end{cases}$$

ce qui est une représentation paramétrique de plan. L'équation $ax+by+cz+d=0$ est donc bien une équation de plan. ◈

Remarque Une telle équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$. On remarque alors que pour une telle équation $ax+by+cz+d=0$, le vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal au plan.
Il n'y a pas unicité d'un vecteur normal à un plan, puisque tout vecteur colinéaire à un vecteur normal est lui aussi normal. Il n'y a donc pas unicité d'une équation cartésienne de plan.

Proposition (admise) Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan. Il existe alors deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ normaux à $\mathcal{D}$ et non colinéaires. Dans ce cas, on a

$$\mathcal{D} = \{M \in \mathbb{R}^3,\ \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \text{ et } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}' = 0\}$$

Remarque Cette proposition repose principalement sur le fait qu'une droite de l'espace peut être vue comme une intersection de deux plans non parallèles.
En particulier, cela implique que l'on peut représenter une droite par un système de deux équations cartésiennes de plan :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

13.3 Positions relatives et intersections

13.3.1 Deux droites

Définition Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace. On dit qu'elles sont :

- coplanaires, si elles sont incluses dans un même plan.
- parallèles, si elles sont coplanaires et d'intersection vide.
- confondues, si $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
- sécantes, si elles sont coplanaires, non parallèles et non confondues.

Remarque Deux droites de l'espace coplanaires sont donc parallèles, ou confondues, ou sécantes.

Proposition Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou confondues si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Démonstration ($\Longrightarrow$) *Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, le résultat est trivial. Supposons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles. Il existe alors un plan $\mathcal{P}$ les contenant. Quitte à opérer un changement de variable, on peut supposer que ce plan est $\mathbb{R}^2$, auquel cas les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent des équations réduites :*

$$\mathcal{D} \ :\ y = ax + b$$
$$\mathcal{D}' \ :\ y = a'x + b'$$

avec a, b, a', b' réels. Dans ce cas, les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement. On remarque qu'un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ si, et seulement si, $ax+b = a'x+b'$, c'est-à-dire $x(a-a') = b'-b$. Si $a \neq a'$, un tel point M existe donc, ce qui contredit le parallélisme de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Par conséquent, $a = a'$, et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent des vecteurs directeurs colinéaires.

($\Longleftarrow$) *On considère deux points $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et un réel λ tels que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u})$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(B, \lambda\vec{u})$.*

- *Si $B \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.*
- *Supposons que $B \notin \mathcal{D}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $C \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Si l'on note (x,y,z) ses coordonnées, il existe alors des réels α, β tels que*

$$(x,y,z) = (x_A, y_A, z_A) + \alpha(a,b,c)$$
$$(x,y,z) = (x_B, y_B, z_B) + \beta\lambda(a,b,c)$$

On en déduit que

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_A, y_A, z_A) + (\alpha - \beta\lambda)(a, b, c)$$

et donc que $B \in \mathcal{D}$, ce qui n'est pas. Par conséquent, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$.

On considère le plan $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \vec{u}, \overrightarrow{AB})$. On a alors $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, et $B \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$. Ces droites sont donc coplanaires.

Au final, elles sont bien confondues, ou parallèles. ◈

Proposition Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes ont exactement un point d'intersection.

Démonstration *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes. Elles sont alors coplanaires et non parallèles, donc elles admettent un point d'intersection. Supposons qu'elles admettent au moins deux points d'intersection distincts $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. On considère un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$.*

On a alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \vec{u})$, donc il existe un réel λ tel que

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(a, b, c)$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \vec{u}$$

donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$.

Le même raisonnement montre que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$, et donc que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. Or, ces droites sont sécantes, donc non confondues. On en déduit qu'elles n'ont qu'un seul point d'intersection. ◈

Définition On dit que deux droites sont orthogonales lorsque leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

13.3.2 Deux plans

Définition Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace. On dit qu'ils sont :

- ❖ parallèles si ils sont d'intersection vide.
- ❖ confondus si $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.
- ❖ sécants sinon.

Proposition (admise) L'intersection de deux plans sécants est une droite de l'espace.

Proposition (admise) Deux plans sont parallèles ou confondus si, et seulement si, ils admettent un vecteur normal en commun.

Théorème (Théorème du toit) Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans sécants, et soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}'$ deux droites parallèles. Alors l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est une droite parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Démonstration *On note $\mathcal{D}''$ l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.*

Supposons par l'absurde que $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles. On note $\mathcal{P}''$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (qui existe car ces droites sont parallèles). Comme $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}$ sont coplanaires et non parallèles, elles admettent un point d'intersection I.

Celui-ci est alors un point de $\mathcal{D}''$, donc il est dans les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Il est également dans $\mathcal{D}$, donc il est dans le plan $\mathcal{P}''$. Ainsi, I appartient à l'intersection des plans $\mathcal{P}''$ et $\mathcal{P}'$, c'est-à-dire $\mathcal{D}'$. Dans ce cas, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un point en commun, ce qui contredit le fait qu'elles sont parallèles. ◈

Définition Deux plans sont orthogonaux si toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre.

Proposition (admise) Deux plans sont orthogonaux si, et seulement si, ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Démonstration ($\Longrightarrow$) *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans orthogonaux, et soient $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n}'$ un vecteur normal à $\mathcal{P}'$.*
Alors $\mathcal{P}$ contient une droite de vecteur directeur $\vec{n}$, et $\mathcal{P}'$ contient une droite de vecteur directeur $\vec{n}'$. Celles-ci sont par hypothèse orthogonales, donc $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ le sont.
Le sens réciproque est admis. ◈

13.3.3 Une droite et un plan

Définition Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ une droite et un plan.

- ❖ Si leur intersection est vide, on dit qu'ils sont parallèles.
- ❖ Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, on dit que $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.
- ❖ Sinon, on dit qu'ils sont sécants.

Proposition (admise) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ une droite et un plan. Alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ ou incluse dans $\mathcal{P}$ si, et seulement si, tout vecteur normal à $\mathcal{P}$ est normal à $\mathcal{D}$.

Proposition (admise) Si une droite et un plan sont sécants, alors ils admettent un unique point d'intersection.

Définition Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan.

Proposition Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ une droite et un plan. $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est normal à $\mathcal{P}$.

Démonstration ($\Longrightarrow$) *Supposons $\mathcal{D}$ orthogonale à $\mathcal{P}$, et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite incluse dans $\mathcal{P}$, $\vec{u}$ est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de ces droites, donc à tout vecteur dont les extrémités sont dans $\mathcal{P}$. Ainsi, $\vec{u}$ est normal à $\mathcal{P}$.*

($\Longleftarrow$) *Supposons que tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est normal à $\mathcal{P}$. Soit une droite $\mathcal{D}'$ incluse dans $\mathcal{P}$. Alors son vecteur directeur est orthogonal à tout vecteur normal à $\mathcal{P}$, donc à tout vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc orthogonales, d'où le résultat.* ◈

14 Transformations du plan. Frises et pavages

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** plan $\mathbb{R}^2$, géométrie vectorielle, triangles égaux, théorème de Thalès, nombres complexes

14.1 Transformations du plan

Définition On appelle transformation du plan toute bijection de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même.

Si l'on considère une transformation du plan, on notera habituellement A' l'image d'un point A par cette transformation, s'il n'y a pas d'ambiguïté.

14.1.1 Isométries du plan

Définition Une isométrie du plan est une transformation du plan qui conserve les longueurs, c'est-à-dire telle que pour tous points A et B, $A'B' = AB$.

Proposition Une isométrie du plan conserve les angles géométriques, c'est-à-dire que pour tous points A, B, C du plan

$$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$$

Démonstration *On considère trois points distincts A, B et C. On a alors $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ et $A'C' = AC$. Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont alors égaux, d'où $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.* ◈

Remarque Par conséquent, une isométrie du plan conserve les alignements, l'orthogonalité et le parallélisme : elle transforme une droite en une droite, deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires, et deux droites parallèles en deux droites parallèles.

Proposition (admise) On considère une isométrie du plan. Alors

- L'image d'une droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon R.

Proposition (admise) Une isométrie du plan conserve les aires.

Remarque On peut démontrer ce résultat pour les polygones. On commence par le démontrer pour les triangles : l'image d'un triangle est un triangle, dont les longueurs sont conservées, donc par la formule

de l'aire d'un triangle, il y a conservation de l'aire. Ensuite, pour un polygone quelconque, il suffit de le trianguler.
Pour les autres figures planes, on admet le résultat.

Définition On appelle identité la transformation du plan telle que pour tout point A, $A' = A$.

Proposition L'identité est une isométrie du plan.

Démonstration *On a clairement pour tous points A, B, $A'B' = AB$ puisque $A' = A$ et $B' = B$.* ◈

Définition On considère une droite $\mathcal{D}$, un point A et le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$. La symétrie axiale d'axe $\mathcal{D}$ est la transformation du plan qui transforme A en le point A' tel que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HA'}$.
On dit que A' est le symétrique de A par rapport à $\mathcal{D}$.

Proposition Une symétrie axiale est une isométrie.

Démonstration *Soient A, B deux points distincts, et H_A, H_B leur projetés orthogonaux sur la droite $\mathcal{D}$. On remarque alors que H_A et H_B sont leur propres symétriques par rapport à la droite $\mathcal{D}$.*

Puisque H_A est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, le triangle AH_AH_B est rectangle en H_A. Comme $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{HA'}$, H_A est également le projeté orthogonal de A' sur $\mathcal{D}$. Ainsi, le triangle $A'H_AH_B$ est rectangle en H_A. On a de plus $H_AH_B = H_AH_B$, et $AH_A = A'H_A$, donc les triangles AH_AH_B et $A'H_AH_B$ sont égaux, d'où $AH_B = A'H_B$.

De plus, on a $\widehat{AH_BH_A} = \widehat{A'H_BH_A}$, et $\widehat{BH_BH_A} = \widehat{B'H_BH_A}$, donc par soustraction, $\widehat{BH_BA} = \widehat{B'H_BA'}$. On a également $BH_B = B'H_B$ et $AH_B = A'H_B$, donc les triangles ABH_B et $A'B'H_B$ sont égaux. On en déduit que $AB = A'B'$, et donc que la symétrie d'axe $\mathcal{D}$ est une isométrie. ◈

Proposition Si A' est le symétrique de A par rapport à une droite $\mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ est la médiatrice de $[AA']$. De plus, $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points fixes de la symétrie d'axe $\mathcal{D}$.

Démonstration *On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.*
On a vu que dans ce cas, $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $[AA']$. De plus, $AH = A'H$, donc H est le milieu de $[AA']$ et appartient à $\mathcal{D}$, d'où le résultat.
On a

$$A \in \mathcal{D} \Leftrightarrow H = A \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow H = A' = A$$

Les points de fixes de la symétrie axiale d'axe de $\mathcal{D}$ sont donc exactement les points de $\mathcal{D}$. ◈

Définition On considère un point O. La symétrie centrale de centre O est la transformation qui à un point A associe le point A' tel que $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA'}$, c'est-à-dire tel que O soit le milieu de $[AA']$.

Proposition Toute symétrie centrale est une isométrie.

Démonstration *Soient A, B deux points distincts. Si $A = O$ ou $B = O$, on a trivialement $AO = BO$. Sinon, on remarque que les points A, O, A' et B, O, B' sont alignés dans cet ordre. Ainsi, les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{A'OB'}$ sont opposés par le sommet, et donc égaux.*
De plus, $AO = A'O$ et $BO = B'O$, donc les triangles ABO et $A'B'O$ sont égaux. Par conséquent, $A'B' = AB$, et la symétrie centrale de centre O est donc une isométrie. ◈

Proposition L'unique point fixe d'une symétrie centrale est son centre.

Démonstration *O est clairement un point fixe de la symétrie de centre O. De plus, pour un point A, on a*

$$A = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow A = O$$

d'où le résultat. ◈

Définition On considère un point O et un réel θ. La rotation de centre O et d'angle θ est la transformation qui à un point A associe le point A' tel que $OA = OA'$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = \theta$.

Remarque Si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, toute rotation d'angle θ est l'identité. Si $\theta \equiv \pi\ [2\pi]$, alors la rotation d'angle θ et de centre O est la symétrie de centre O.

Proposition Toute rotation est une isométrie.

Démonstration *Soient A, B deux points distincts. Si $A = O$, ou $B = O$, on a clairement $A'B' = AB$. Supposons A, B différents de O.*
On a alors $OA = OA'$, $OB = OB'$ et $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$, donc les triangles AOB et $A'OB'$ sont égaux. Par conséquent, $A'B' = AB$, et une rotation de centre O est une isométrie. ◈

Proposition L'unique point fixe d'une rotation distincte de l'identité est son centre.

Démonstration *On considère une rotation de centre O et d'angle θ différent de 0 modulo 2π. O est clairement un point fixe de cette rotation. Pour $A \neq O$, on a $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = \theta$, qui est distinct de 0 modulo 2π. Ainsi, $A \neq A'$.*
O est donc le seul point fixe de cette rotation. ◈

Définition On considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation qui à un point A associe le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u}$.

Remarque La translation de vecteur nul est l'identité.

Proposition Soient A et B deux points distincts, et A', B' leurs translatés par un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul. Alors $ABB'A'$ est un parallélogramme.

Démonstration *On a $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{BB'}$, donc les côtés opposés $[AA']$ et $[BB']$ du quadrilatère $ABB'A'$ sont parallèles et de même longueur. Par conséquent, $ABB'A'$ est un parallélogramme.* ◈

Proposition Toute translation est une isométrie.

Démonstration *On considère une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Si ce vecteur est nul, le résultat est trivial. Sinon, pour deux points A, B distincts, le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme. Par conséquent, $AB = A'B'$, et cette translation est une isométrie.* ◈

14.1.2 Homothéties

Définition On considère un point O et un réel k non nul. L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation qui à un point A associe le point A' tel que $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.

Remarque Une homothétie de rapport $k = 1$ est l'identité. L'homothétie de rapport $k = -1$ et de centre O est la symétrie de centre O.

Proposition Toute homothétie conserve les angles.

Démonstration *On considère trois points distincts A, B, C, et on considère une homothétie de centre O et de rapport k.*
On a alors $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. En particulier, $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = |k|$. Que k soit positif ou négatif, on peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès aux triangles AOB et $A'OB'$, ce qui donne que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. En appliquant maintenant le théorème dans le sens direct, on obtient que $\frac{A'B'}{AB} = |k|$.
En procédant de même, on obtient que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = |k|$$

Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont donc semblables, donc ont des angles identiques. Cela justifie que cette homothétie conserve les angles. ◈

Proposition (partiellement admise) Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$ et les aires par k^2.

Démonstration *On a démontré dans la preuve précédente que pour deux points A, B distincts, on a $A'B' = |k|AB$. Ainsi, les longueurs sont multipliées par $|k|$.*

Pour les aires, on peut montrer le résultat pour les polygones. Pour un triangle, on multiplie la base et la hauteur par $|k|$, donc l'aire est multipliée par $|k|^2 = k^2$. Pour un polygone quelconque, on le triangule, et on somme les aires des triangles.
Pour d'autres figures, on admet le résultat. ◈

Proposition (admise) On considère une homothétie de rapport k, deux points distincts A et B, et un réel $R > 0$. Alors :

- L'image de la droite (AB) est la droite $(A'B')$.
- L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$.
- L'image du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon $|k|R$.

14.1.3 Composition

Proposition La composée de deux isométries est une isométrie.

Démonstration *Soient deux points A, B distincts. On note A', B' leurs images par la première isométrie, et $A'', B,''$ les images de A' et B' par la seconde isométrie. Alors A'' et B'' sont les images de A et B par la composée des deux isométries, et l'on a $A''B'' = A'B' = AB$ car les deux transformations conservent les longueurs.* ◈

Proposition Soient O un point et α, β deux réels. Alors les rotations de centre O et d'angles α et β commutent, et leur composée est la rotation d'angle $\alpha + \beta$.

Proposition Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors les translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ commutent, et leur composée est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Proposition Soient O un point et k, k' deux réels. Alors les homothéties de centre O et de rapports k et k' commutent, et leur composée est l'homothétie de rapport kk'.

Remarque On peut démontrer ces trois résultats en utilisant les définitions vectorielles données précédemment. On va voir un peu plus loin que cela est bien plus aisé avec les écritures complexes de ces transformations.

14.2 Frises et pavages

14.2.1 Frises

Définition On appelle frise toute figure obtenue en appliquant successivement une translation à une même figure, appelée motif de base de la frise.

Remarque Le motif de base d'une frise peut être obtenu à partir d'un autre motif et de transformations du plan. Si ce second motif ne peut pas être lui-même obtenu à partir d'un troisième motif, on dit qu'il est élémentaire.

14.2.2 Pavages du plan

Définition On appelle pavage du plan toute partition de $\mathbb{R}^2$ à l'aide d'un ou de plusieurs figures répétées, appelées motifs de base.
Autrement dit, un pavage du plan est une façon de recouvrir $\mathbb{R}^2$ par une, ou plusieurs figures, sans trou ni chevauchement.

Définition On dit qu'un pavage du plan est périodique lorsqu'il est stable par au moins deux translations de vecteurs non colinéaires.

Proposition Il existe exactement trois polygones convexes réguliers qui pavent le plan de manière périodique : le triangle équilatéral, la carré et l'hexagone régulier.

Démonstration *Les angles d'un triangle équilatéral mesurent $60°$ chacun, donc on peut en assembler 6 autour d'un sommet, sans qu'ils se superposent ou laissent de place libre. Cela fournit alors un pavage du plan. Pour le carré et l'hexagone régulier, ces angles sont respectivement de $90°$ et $120°$, donc on peut également paver le plan avec ces polygones réguliers.*

Les angles intérieurs d'un pentagone régulier mesurent $108°$. On a $5 \times 108° = 340°$ et $6 \times 108° = 448°$, donc on ne peut pas agencer des pentagones réguliers autour d'un même sommet sans qu'ils se superposent ou ne laissent de place libre. On ne peut donc pas paver le plan avec des pentagones réguliers.

Pour un polygone régulier à $n \geq 7$ cotés, les angles intérieurs ont une mesure strictement comprise entre $120°$ et $180°$. Or, on a $3 \times 120° = 360° = 2 \times 180°$, donc aucun multiple de cette mesure ne donne $360°$. On ne peut donc pas paver le plan avec ce type de polygone régulier. ◈

14.3 Écriture complexe

Comme $\mathbb{R}^2$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, toute transformation du plan peut être vue comme une bijection de $\mathbb{C}$ dans lui-même. Ce type de représentation est particulièrement utile pour étudier la composition de plusieurs transformations.

Par abus de langage, on confondra point de $\mathbb{R}^2$ et nombre complexe. Pour un nombre complexe z, on notera alors z' son image par une transformation donnée.

Proposition La symétrie de centre ω est telle que
$$z' = 2\omega - z$$

Démonstration *Comme* $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{MO}$, *on a* $z' - \omega = \omega - z$, *d'où* $z' = 2\omega - z$. ◈

Proposition La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, d'affixe z_u est telle que
$$z' = z + z_u$$

Démonstration *On a* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$, *d'où* $z' - z = z_u$ *et* $z' = z + z_u$. ◈

Proposition La rotation d'angle ω et d'angle θ est telle que
$$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

Démonstration *On a* $\left(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}\right) = \theta$, *donc* $(z' - \omega) = e^{i\theta}(z - \omega)$, *d'où* $z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$. ◈

Proposition L'homothétie de centre ω et de rapport k est telle que
$$z' = k(z - \omega) + \omega$$

Démonstration *On a* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, *donc* $z' - \omega = k(z - \omega)$, *d'où* $z' = k(z - \omega) + \omega$. ◈

Désormais démontrons les résultats énoncés plus tôt sur la composition de ces transformations.

❖ Soient O un point d'affixe ω et α, β deux réels. Les rotations de centre O et d'angles α et β s'écrivent respectivement $z \mapsto e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$ et $z \mapsto e^{i\beta}(z - \omega) + \omega$ Soit $z \in \mathbb{C}$. On note z' son image par la première rotation et z'' l'image de z' par la seconde. Alors, on a $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$, puis
$$z'' - \omega = e^{i\beta}(z' - \omega) = e^{i\beta}e^{i\alpha}(z - \omega) = e^{i(\beta+\alpha)}(z - \omega)$$
Ainsi, la composée des deux rotations est la rotation d'angle $\beta + \alpha$. Par commutativité de l'addition, ces deux rotations commutent.

❖ Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes z_u et z_v. Pour $z \in \mathbb{C}$, son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est $z' = z + z_u$. L'image de z' par la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ est alors $z'' = z' + z_v = z + (z_u + z_v)$, qui est l'image de z par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. En particulier, ces deux translations commutent.

❖ Soient O un point d'affixe ω et k, k' deux réels. L'image z' d'un complexe z par la première homothétie vérifie $z' - \omega = k(z - \omega)$. L'image z'' de z' par la seconde homothétie vérifie $z'' - \omega = k'(z' - \omega)$. Par conséquent $z'' = k'(z' - \omega) + \omega = (k'k)(z - \omega) + \omega$ donc la composée de ces deux homothéties est l'homothétie de centre O de rapport kk'. La multiplication est commutative, donc ces deux homothéties commutent.

15 Relations métriques et angulaires dans le triangle

- **Niveau :** cycle 4, Seconde générale
- **Pré-requis :** triangles : nature et droites remarquables, vecteurs du plan, produit scalaire

15.1 Relations métriques

15.1.1 Longueurs

Proposition (Inégalité triangulaire) Soient A, B et C trois points du plans. Alors :

$$AC \leq AB + BC$$

Remarque On peut démontrer cette inégalité à l'aide des nombres complexes, en interprétant les longueurs comme des modules. Une preuve purement géométrique existe, mais elle nécessite une propriété supplémentaire sur les triangles : les longueurs des côtés d'un triangle sont ordonnées dans le même ordre que les angles opposés à ces côtés. Cette propriété n'est pas étudiée au cycle 4.

Proposition Soient A, B et C trois points du plan. Alors :

$$AC = AB + BC \Leftrightarrow B \in [AC]$$

Remarque Encore une fois, la preuve se fait à partir de l'inégalité triangulaire sur les complexes.

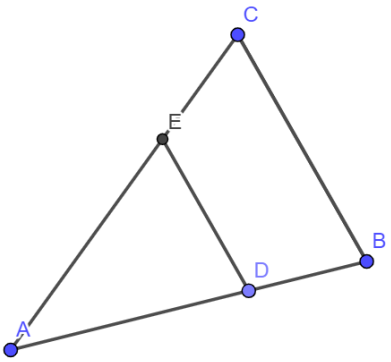
Remarque Ces deux propositions donnent un critère de constructibilité d'un triangle ABC à partir de ces longueurs : celui-ci est constructible si, et seulement si, sa plus grande longueure est strictement supérieure à la somme des deux autres. Si il y a égalité, le triangle est aplati.

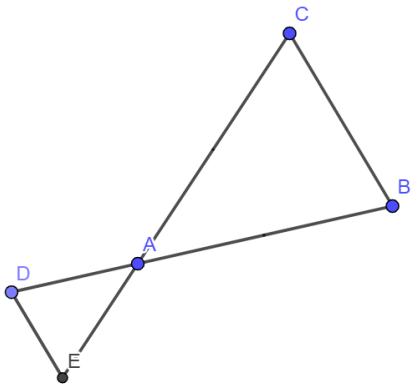
Théorème (Théorème de Thalès) Soient A, B, C, D et E cinq points du plan tels que :

- A, D, B sont alignés
- A, E, C sont alignés
- (BC) est parallèle à (DE)

Alors : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

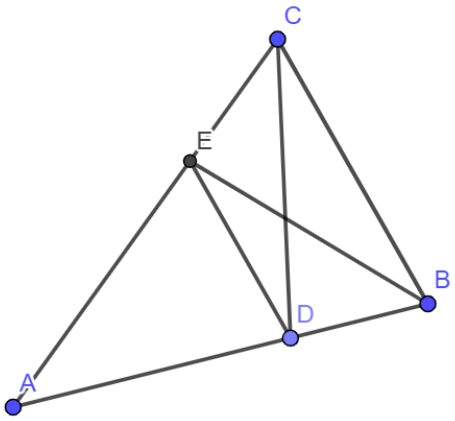
Le théorème s'applique à deux configurations, dites configurations de Thalès : la première est souvent appelée celle des "triangles emboités", et la seconde celle du "papillon".





Démonstration

On commence par remarquer que les deux configurations sont équivalentes : il suffit d'appliquer une symétrie centrale de centre A à l'un des deux triangles. On étudiera donc uniquement la première configuration.



On trace les segments $[CD]$ et $[BE]$. Comme (BC) et (DE) sont parallèles, les triangles BCE et BCD, de base commune $[BC]$, ont la même hauteur. Ainsi, ils ont même aire. De plus,

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABE) + \mathcal{A}(BCE) = \mathcal{A}(ADC) + \mathcal{A}(BCD)$$

donc ABE et ADC ont même aire.

Les triangles ABE et ABC ont même hauteur, car $E \in [AC]$. Si on note cette hauteur h, alors

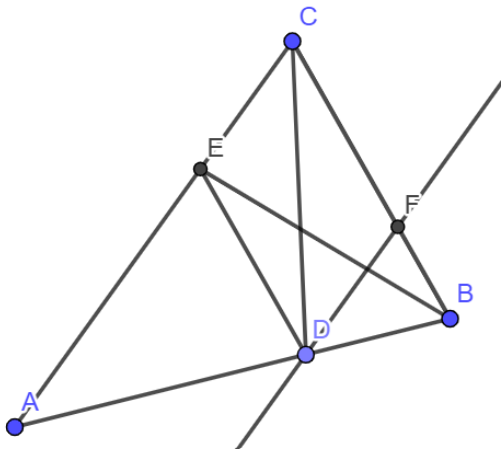
$$\frac{\mathcal{A}(ABE)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{\frac{AE\times h}{2}}{\frac{AC\times h}{2}} = \frac{AE}{AC}$$

De même,

$$\frac{\mathcal{A}(ADC)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{AD}{AB}$$

Or, comme $\mathcal{A}(ABE) = \mathcal{A}(ADC)$, alors $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$, ce qui prouve une première partie de l'égalité.

Pour la deuxième égalité, on trace la parallèle à (AC) passant par D. Elle coupe $[CB]$ en F.



On peut alors appliquer ce que l'on vient de démontrer aux cinq points A, B, C, D et F, ce qui donne :

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BF}{BC}$$

De plus, comme (DE) est parallèle à (BC) et (DF) est parallèle à (AC), $DECF$ est un parallélogramme. Ainsi, $ED = CF$ et $EC = DF$. On a alors :

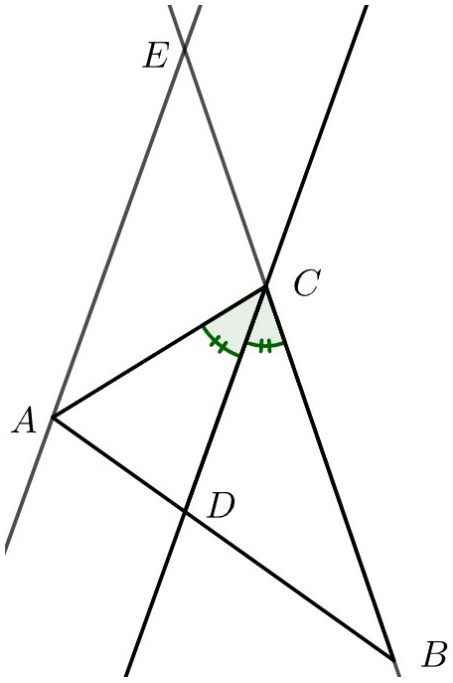
$$\begin{aligned}\frac{DE}{BC} &= \frac{BC - FB}{BC} \\ &= 1 - \frac{FB}{BC} \\ &= 1 - \frac{BD}{AB} \\ &= \frac{AB - BD}{AB} \\ &= \frac{AD}{AB}\end{aligned}$$

ce qui prouve la seconde égalité.

◈

Exercice Soit ABC un triangle, et soit D le point d'intersection de $[AB]$ avec la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ACB}$. Exprimer AD et BD en fonction des longueurs du triangle ABC.

On trace la parallèle à la bissectrice (CD) de l'angle $\widehat{ACB}$ passant par A : elle coupe (BC) en E.



Par le théorème de Thalès, on a donc $\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BE}$. Or, les droites (AE) et (CD) sont parallèles, donc les angles correspondants $\widehat{BCD}$ et $\widehat{AEB}$ sont égaux. Il en est de même des angles alternes-internes $\widehat{EAC}$ et $\widehat{BCD}$. Le triangle ACE est donc isocèle en C, d'où $AC = CE$. On en déduit que

$$\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BE} = \frac{BC}{BC + CE} = \frac{BC}{BC + AC}$$

puis que $BD = \frac{AB \times BC}{BC + AC}$.

Le même raisonnement en traçant la parallèle à (CD) passant par B permet de montrer que $AD = \frac{AB \times AC}{BC + AC}$. En particulier, cela montre que les longueurs AD et BD sont proportionnelles aux longueurs des côtés $[AC]$ et $[BC]$, qui leur sont adjacents.

Théorème (Réciproque du théorème de Thalès) Soient A, B, C, D et E cinq points du plan tels que :

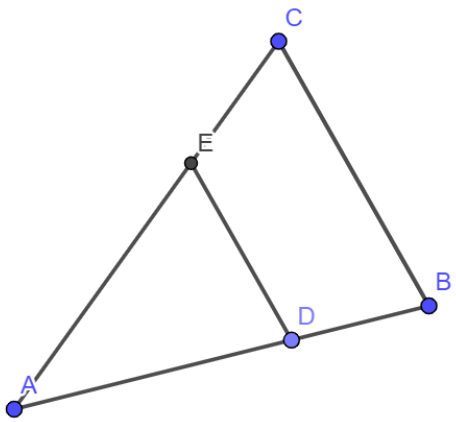
- A, D et B sont alignés
- A, E et C sont alignés dans le même ordre que A, D et B
- $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Alors les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

L'hypothèse sur l'ordre dans lequel sont alignés les points restreint la réciproque aux deux configurations de Thalès vues précédemment.

Démonstration

Tout comme pour le théorème, les deux configurations sont équivalentes. On ne démontrera donc la réciproque que pour la première configuration.



On trace la parallèle à (BC) passant par D. Elle coupe $[AC]$ en F. Alors, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AC}$$

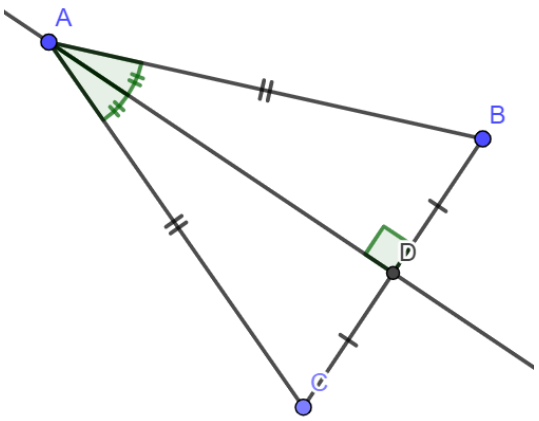
Or, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, donc $AF = AE$. F est alors un point de $[AC]$ tel que $AF = AE$. Comme $E \in [AC]$, nécessairement $E = F$. Par conséquent, $(DE) = (DF)$, et (DF) est parallèle à (BC).

◈

Proposition ABC est isocèle en A si, et seulement si, sa hauteur issue de A, sa médiane issue de A, la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$, ainsi que la médiatrice de $[BC]$ sont confondues.

Démonstration

Supposons que ABC est isocèle en A, ie que $AB = AC$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est l'axe de symétrie du couple de droites (AB) et (AC). Comme de plus $AB = AC$, avec B et C de part et d'autre de cette bissectrice, ces deux points sont symétriques par rapport à cette bissectrice. Il suit que le point d'intersection qu'elle forme avec $[BC]$ est le milieu de $[BC]$, ce qui fait de cette droite la médiane issue de A. De plus, par symétrie, (BC) est perpendiculaire à cette droite, ce qui en fait la hauteur issue de A et la médiatrice de $[BC]$.

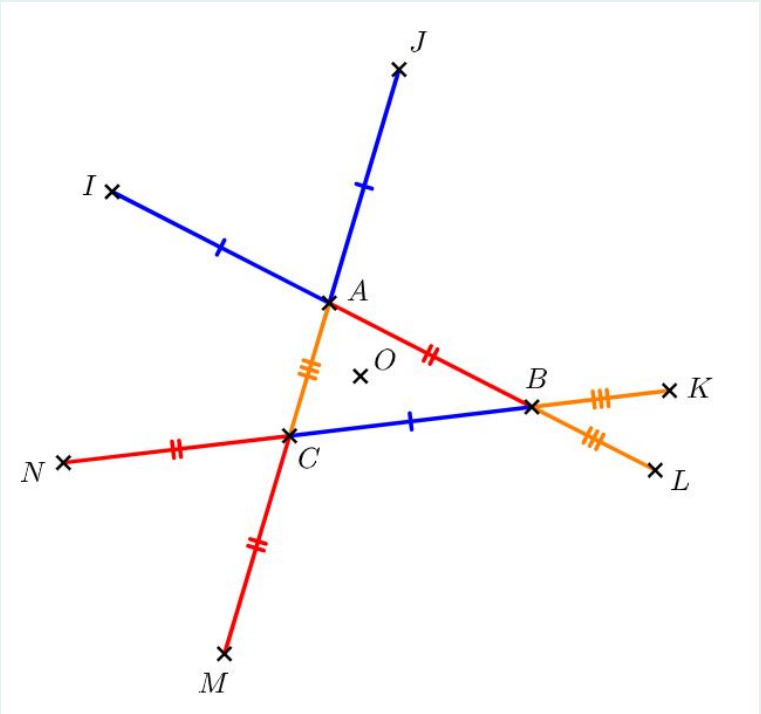


Réciproquement, si toutes ces droites sont confondues, alors B et C sont symétriques par rapport à cette même droite. Comme A appartient à cette droite, il est son propre symétrique. Ainsi, $[AB]$ et $[AC]$ sont symétriques, d'où $AB = AC$.

◈

Exercice (Cercle de Conway) On considère la figure suivante, dans laquelle O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, et les points I, A, B, L, les points N, C, B, K et les points M, C, A, J sont alignés.

Démontrer que les points I, J, K, L, M et N sont situés sur un même cercle de centre O.



Le point O est le point de concourance des bissectrices intérieures de ABC. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est aussi celle de l'angle $\widehat{IAJ}$.

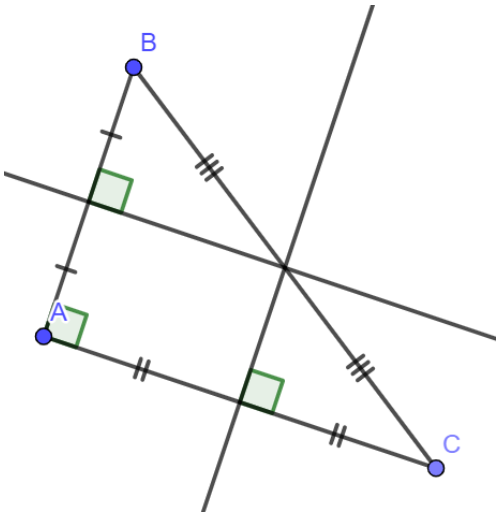
Les triangles AIJ et AML sont isocèles en A, donc cette bissectrice est également la médiatrice des segments $[IJ]$ et $[ML]$. Puisque O est sur cette médiatrice, on a $IO = JO$ et $MO = OL$.

Le même raisonnement sur les autres bissectrices permet de montrer que $IO = JO = KO = LO = MO = NO$, d'où le résultat.

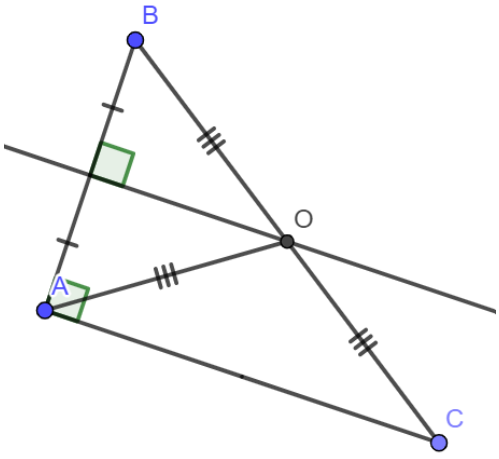
Proposition Un triangle est rectangle si, et seulement si, le centre de son cercle circonscrit est le milieu d'un de ses côtés.

Démonstration

Soit ABC un triangle rectangle en A. Comme l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, la médiatrice de $[AB]$ est parallèle à (AC), et la médiatrice de $[AC]$ est parallèle à (AB). Alors, d'après le théorème de Thalès, ces deux médiatrices coupent l'hypoténuse $[BC]$ en son milieu, qui est alors le centre du cercle circonscrit à ABC.



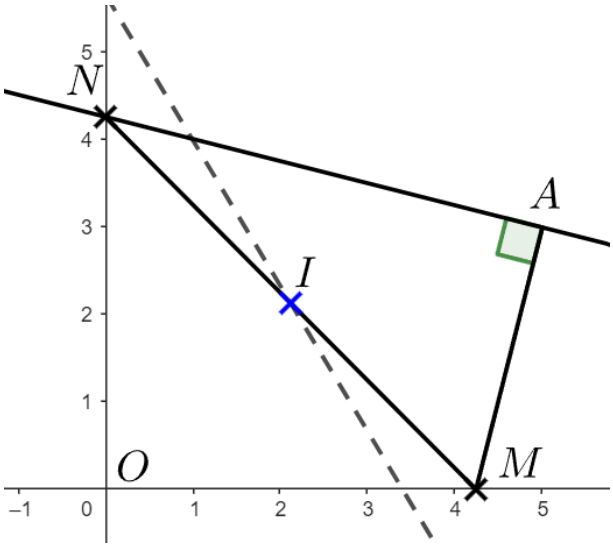
Réciproquement, supposons que le centre O du cercle circonscrit à ABC soit le milieu d'un de ses côtés, disons $[BC]$. Ainsi, $OA = OB$, donc le triangle AOB est isocèle en O. On en déduit que la hauteur issue de O dans AOB est la médiatrice de $[AB]$. Elle passe donc par le milieu de $[BC]$ et le milieu de $[AB]$. Par la réciproque du théorème de Thalès, elle est donc parallèle à (AC). Or, il s'agit de la médiatrice de $[AB]$, donc elle est perpendiculaire à (AB). Par conséquent, (AB) et (AC) sont perpendiculaires, ce qui fait de ABC un triangle rectangle en A.



◈

Exercice On considère un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, et un point A du premier quadrant. Pour tout point $M \in (OI)$, on trace la perpendiculaire à (MA) passant par A : elle coupe (OJ) en N. Déterminer le lieu du milieu I de $[MN]$, lorsque M parcourt (OI).

En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, on peut conjecturer que le lieu recherché est la médiatrice de $[OA]$.



Analyse : On considère un tel point I. Le triangle ANM est rectangle en A, donc le cercle circonscrit à ce triangle est celui de diamètre $[MN]$. De même, le triangle OMN est rectangle en O donc admet le même cercle pour cercle circonscrit. On en déduit que $OI = IA$, et donc que I est sur la médiatrice de $[OA]$.

Synthèse : Soit I un point de la médiatrice de $[OA]$. On construit le cercle de centre I et de rayon $OI = IA$: il coupe (OI) en M et (OJ) en N. Ce cercle passe par O, M et N : c'est donc le cercle circonscrit au triangle OMN. Ce triangle est rectangle en O, donc le centre de ce cercle est le milieu de $[MN]$. Ainsi, I est le milieu de $[MN]$.

Le lieu de ces points I est donc bien la médiatrice de $[OA]$.

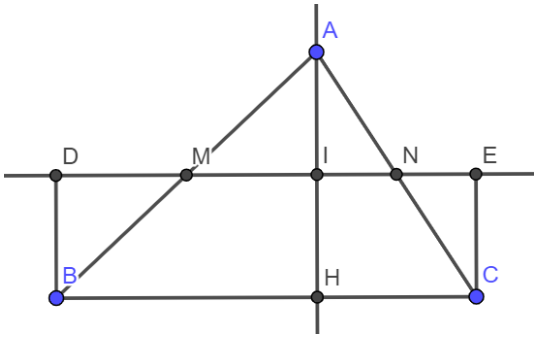
15.1.2 Aires

Proposition On considère un triangle et une hauteur de ce triangle. On appelle base le côté du triangle perpendiculaire à cette hauteur. Alors l'aire du triangle est la moitié du produit des longueurs de cette hauteur de de cette base (en tant que segments). On écrit :

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$$

Démonstration

On considère un triangle ABC, avec $\widehat{BAC}$ le plus grand angle de ce triangle. On trace la hauteur issue de A : elle coupe $[BC]$ en H (car $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont nécessairement aigus). On place I milieu de $[AH]$, et on trace la médiatrice de $[AH]$. On note M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[AC]$. On place ensuite D symétrique de I par rapport à M, et E symétrique de I par rapport à N. Par le théorème de Thalès, M et N sont sur la médiatrice de $[AH]$.



Comme M est le milieu de $[AB]$, A est le symétrique de B par rapport à M. Ainsi, les triangles AMI et BMD sont symétriques par rapport à M, et ont donc la même aire. De même les triangles ANI et CNE sont symétriques par rapport à N, et ont la même aire. Comme D, M, I, N et E sont alignés, le triangle ABC et la quadrilatère $DECB$ ont donc la même aire, par découpage.
Or, AMI et BMD sont symétriques, et $\widehat{AIM}$ est droit, donc $\widehat{MDB}$ est droit également. De même, comme $\widehat{AIN}$ est droit et ANI et CNE sont symétriques, $\widehat{CEN}$ est droit. Puisque (DE) et (BC) sont toutes deux perpendiculaires à (AH), elles sont parallèles. $DEBC$ est donc un rectangle. Ainsi :

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(DEBC) = BC \times BD = BC \times HI = BC \times \frac{AH}{2}$$

◈

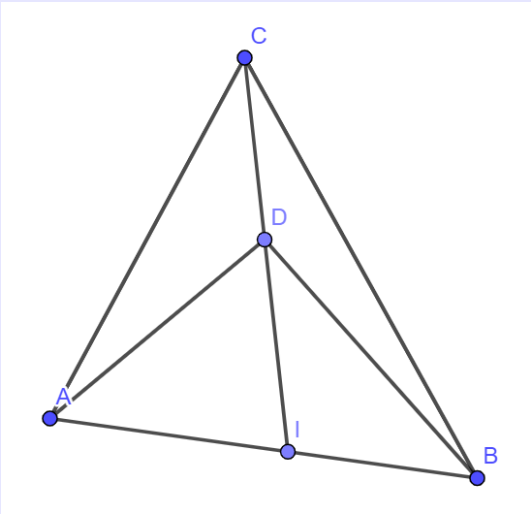
Proposition Soient ABC et ABD deux triangles tels que D soit un point de la parallèle à (AB) passant par C. Alors ABC et ABD ont même aire.

Démonstration
Si l'on considère $[AB]$ comme base commune à ABC et ABD, comme D est sur la parallèle à (AB) passant par C, ces deux triangles ont la même hauteur. Ils ont même hauteur et même base, donc même aire.

◈

Théorème (Théorème du chevron) Soit ABC un triangle, I un point de $[AB]$ distinct de A et B, et D un point de $[CI]$. Alors :

$$\frac{\mathcal{A}(ADC)}{\mathcal{A}(BDC)} = \frac{\mathcal{A}(AID)}{\mathcal{A}(BID)} = \frac{AI}{BI}$$



Démonstration

Comme $I \in [AB]$, les triangles AID et BID ont la même hauteur h, en considérant $[AI]$ et $[BI]$ comme leurs bases. Ainsi :

$$\frac{\mathcal{A}(AID)}{\mathcal{A}(BID)} = \frac{\frac{AI \times h}{2}}{\frac{BI \times h}{2}} = \frac{AI}{BI}$$

On peut appliquer le même raisonnement aux triangles AIC et BIC, ce qui donne :

$$\frac{\mathcal{A}(AIC)}{\mathcal{A}(BIC)} = \frac{AI}{BI}$$

On a :

$$\frac{\mathcal{A}(AIC)}{\mathcal{A}(BIC)} = \frac{\mathcal{A}(ADC) + \mathcal{A}(AID)}{\mathcal{A}(BDC) + \mathcal{A}(BID)}$$

donc

$$\mathcal{A}(AIC) \times \Big(\mathcal{A}(BDC) + \mathcal{A}(BID)\Big) = \mathcal{A}(BIC) \times \Big(\mathcal{A}(ADC) + \mathcal{A}(AID)\Big)$$

et

$$\mathcal{A}(AIC) \times \mathcal{A}(BDC) + \mathcal{A}(AIC) \times \mathcal{A}(BID) = \mathcal{A}(BIC) \times \mathcal{A}(ADC) + \mathcal{A}(BIC) \times \mathcal{A}(AID)$$

Or, $\frac{\mathcal{A}(AIC)}{\mathcal{A}(BIC)} = \frac{AI}{BI} = \frac{\mathcal{A}(AID)}{\mathcal{A}(BID)}$, donc $\mathcal{A}(AIC) \times \mathcal{A}(BID) = \mathcal{A}(BIC) \times \mathcal{A}(AID)$. Ainsi :

$$\mathcal{A}(AIC) \times \mathcal{A}(BDC) = \mathcal{A}(BIC) \times \mathcal{A}(ADC)$$

d'où

$$\frac{\mathcal{A}(AIC)}{\mathcal{A}(BIC)} = \frac{\mathcal{A}(ADC)}{\mathcal{A}(BDC)} = \frac{AI}{BI}$$

◈

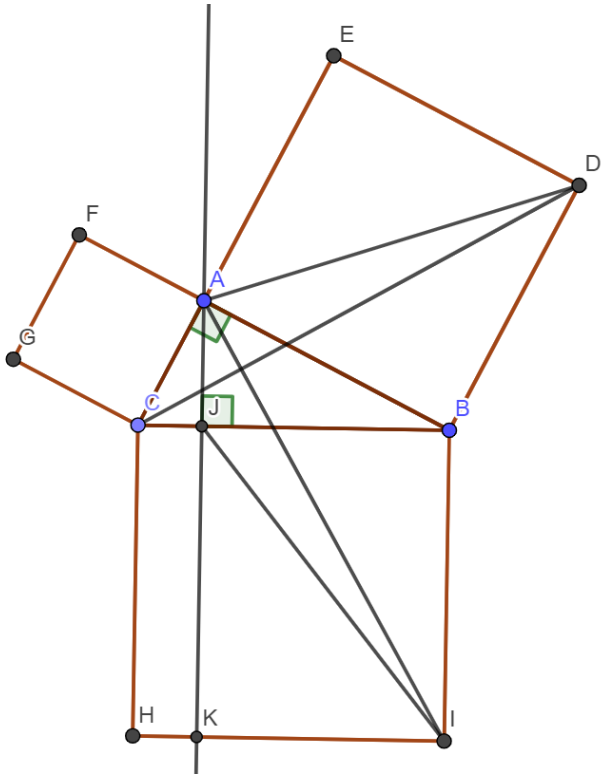
Remarque En appliquant ce théorème avec I le milieu de $[AB]$ et D l'une des extrémités de $[CI]$, on obtient le résultat suivant : une médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire.

Théorème (Théorème de Pythagore) Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors :

$$AC^2 + AB^2 = BC^2$$

Démonstration

On trace des carrés $ABDE$, $ACGF$ et $BCHI$ à l'extérieur du triangle ABC. Les quantitités AB^2, AC^2 et BC^2 sont alors les aires respectives de ces carrés.



On considère les triangles BCD et ABI. Par construction, on a $AB = BD$, $BC = BI$, et

$$\widehat{DBC} = \widehat{ABC} + \widehat{DBA} = \widehat{ABC} + \widehat{CBI} = \widehat{ABI}$$

Ainsi, les triangles BCD et ABI sont égaux. Ils ont donc même aire.
Les triangles ABI et JBI ont même base BI et même hauteur JI, donc ont même aire. De même, les triangles BCD et ABD ont même base BD et même hauteur AB, dont ont même aire. On en déduit que ABD et JBI ont même aire, puis que $ABDE$ et $JBIK$ ont également même aire.
Avec le même raisonnement à partir des triangles BCG et ACH, on montre que $ACGF$ et $JCHK$ ont même aire. Par conséquent :

$$\mathcal{A}(BCHI) = \mathcal{A}(JBIK) + \mathcal{A}(JCHK) = \mathcal{A}(ABDE) + \mathcal{A}(ACGF)$$

d'où

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

◈

Exercice Exprimer l'aire d'un triangle équilatéral de côté a en fonction de a.

Toute hauteur d'un triangle équilatéral est la médiatrice du côté opposé, donc elle forme deux triangles rectangles égaux. En appliquant le théorème de Pythagore dans l'un de ces triangles, on obtient que la hauteur h et le côté a sont reliés par :

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 = h^2 \Leftrightarrow h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On en déduit que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times a \times h = a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Théorème (Réciproque du théorème de Pythagore) Soit ABC un triangle tel que $BC^2 = AC^2 + AB^2$. Alors ABC est rectangle en A.

Démonstration
On a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= BA^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + AC^2 \end{aligned}$$

Comme $BC^2 = AC^2 + AB^2$, alors $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Puisque ABC est un triangle, les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls, et par conséquent orthogonaux, ce qui permet de conclure que ABC est rectangle en A.

◈

Remarque On peut en réalité démontrer le sens direct du théorème avec le même raisonnement, ce qui donne une preuve plus courte que celle donnée plus haut.

Théorème (Théorème de la médiane) Soit ABC un triangle. On note I le milieu de $[AB]$. Alors

$$AC^2 + BC^2 = 2AI^2 + 2IC^2$$

Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\right) + \left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}\right) \\ &= AI^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2 + BI^2 + 2\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{IC} + IC^2 \\ &= 2AI^2 + 2IC^2 + 2\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}\right) \cdot \overrightarrow{IC} \quad \textit{car } I \textit{ est le milieu de } [AB] \\ &= 2AI^2 + 2IC^2 \quad \textit{car } \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

◈

Exercice On considère deux points A et B distincts tels que $AB = 2$. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 20$.

Soit M un point du plan. Notons I le milieu de $[AB]$. Alors par le théorème de la médiane, on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2IA^2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 = 20 &\Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = 20 \\ &\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 = 10 \\ &\Leftrightarrow MI^2 + 1^2 = 10 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow MI = 3 \end{aligned}$$

car $MI \geq 0$. Ainsi, le lieu des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$ est le cercle de centre I et de rayon 3.

15.2 Relations angulaires

Proposition Soit ABC un triangle. Alors, ABC est isocèle en A si, et seulement si, $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$.

Démonstration

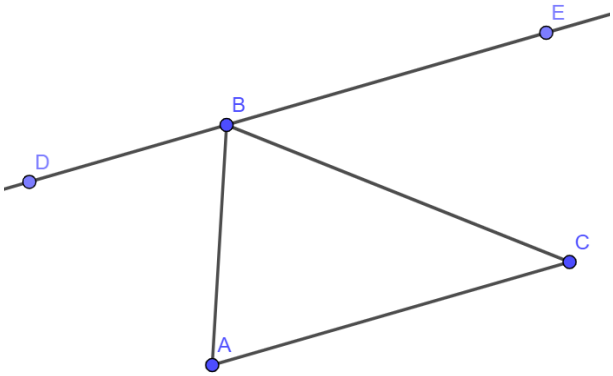
Si ABC est isocèle en A, alors B et C sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[BC]$, et A est son propre symétrique car il appartient à cette médiatrice, donc $\widehat{ABC} = \widehat{BCA}$. Réciproquement, si cette égalité est vraie, alors, comme B et C sont symétriques par rapport à cette médiatrice, les demi-droites $[BA)$ et $[CA)$ sont également symétriques. Elles se coupent en A, ce qui implique que A appartient à la médiatrice de $[BC]$, et donc que $AB = AC$.

◈

Proposition Dans un triangle, la somme des angles vaut 180°.

Démonstration

On considère un triangle ABC, et l'on trace la parallèle à (AC) passant par B. On place alors sur cette parallèle deux points D et E de part et d'autre de B.



Les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{BAC}$ sont alternes-internes et les droites (AC) et (DB) sont parallèles, donc ces angles sont égaux. De même, on a $\widehat{EBC} = \widehat{ACB}$. On a alors :

$$\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = \widehat{DBA} + \widehat{EBC} + \widehat{CBA} = 180°$$

car B appartient à $[BE]$.

◈

Proposition Dans un triangle rectangle, les angles non droits sont complémentaires.

Démonstration

Il suffit d'appliquer la proposition précédente : la somme des angles d'un triangle rectangle vaut 180°, donc la somme des deux angles non droits vaut 90°. Ces angles sont donc complémentaires.

◈

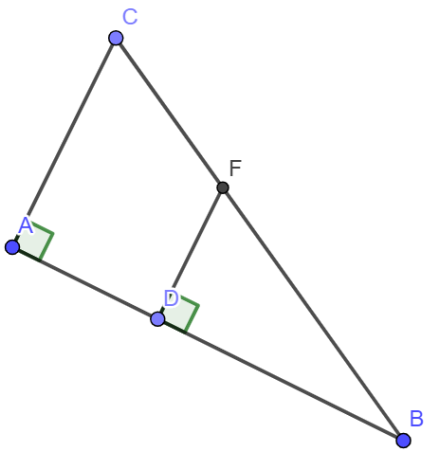
15.3 Relations entre angles et longueurs

Proposition Soient ABC et DEF deux triangles rectangles respectivement en A et en D, et tels que $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$. Alors :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$$

Démonstration

Quitte à faire subir une isométrie au triangle DEF (ce qui conserve ses longueurs et ses angles), on peut supposer que $E = B$ et que $D \in [BA)$. Quitte à échanger ABC et DEF, on peut supposer que $D \in [BA]$. Comme $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, on a $F \in [BC)$. De plus, ABC et DEF sont rectangles en A et D, donc (AC) et (DF) sont parallèles. Ainsi, F est du même côté de la droite (AC) que D, donc $F \in [CA]$.



Comme (AC) et (DF) sont parallèles, on dispose d'une configuration de Thalès. D'après le théorème de Thalès, on a alors :

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BD}{BA} = \frac{DF}{AC}$$

Ainsi, $AB \times BF = BC \times BD$, et :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BF} = \frac{DE}{EF}$$

car $B = E$.

De même, $BF \times AC = BC \times DF$, d'où :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{BF} = \frac{DF}{EF}$$

On en déduit alors que :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\frac{AC}{BC}}{\frac{AB}{BC}} = \frac{\frac{DF}{EF}}{\frac{DE}{EF}} = \frac{DF}{DE}$$

◈

Remarque Ces rapports ne dépendent alors que de l'angle $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ que l'on considère, et pas des longueurs des triangles rectangles.

Définition Pour un angle α aigu donné, on définit alors ces rapports comme étant, respectivement, le cosinus, le sinus et la tangente de cet angle. On les note $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$.

Remarque On retient souvent ces rapports sous la forme suivante :

$$\text{cosinus} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{sinus} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{tangente} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

Définition Si α est un angle obtus, on définit alors les rapports trigonométriques par :

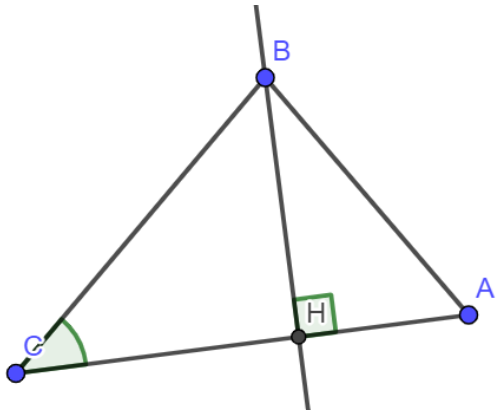
$$\cos(\alpha) = -\cos(180° - \alpha) \quad \sin(\alpha) = \sin(180° - \alpha) \quad \tan(\alpha) = -\tan(180° - \alpha)$$

Théorème (Théorème d'Al-Kashi) Soit ABC un triangle. Alors

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\left(\widehat{ACB}\right)$$

Démonstration

On distingue selon si l'angle $\widehat{ACB}$ est aigu ou obtus. Commençons par le cas où il est aigu. On trace la hauteur issue de B dans ABC. Comme $\widehat{ACB}$ est aigu, elle coupe $[CA]$ en H.



D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 \quad \text{et} \quad AB^2 = AH^2 + BH^2$$

D'autre part, comme $H \in [CA]$, on a :

$$AC^2 = (AH + HC)^2 = AH^2 + 2AH \cdot CH + CH^2$$

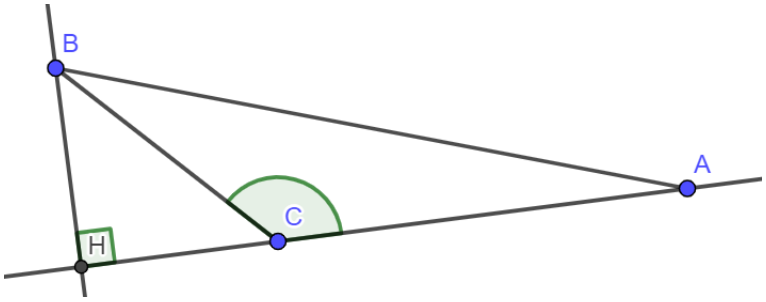
Ainsi

$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= AH^2 + BH^2 + 2CH^2 + 2AH \cdot CH \\ &= AB^2 + 2CH^2 + 2(AC - CH) \cdot CH \quad \text{car } H \in [AC] \\ &= AB^2 + 2CH^2 + 2AC \cdot CH - 2CH^2 \\ &= AB^2 + 2AC \cdot CH \end{aligned}$$

Or, comme $\widehat{ACB}$ *est aigu, on a* $CH = BC\cos\left(\widehat{ACB}\right)$*, d'où*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\left(\widehat{ACB}\right)$$

On considère maintenant le cas où $\widehat{ACB}$ *est obtus.*



On définit alors H *le pied de la hauteur issue de* B*. Celui-ci appartient alors à* $[AC)$*, mais pas à* $[AC]$*. D'après le théorème de Pythagore, on a alors :*

$$BC^2 = CH^2 + BH^2 \quad \text{et} \quad AB^2 = AH^2 + BH^2$$

D'autre part, comme $H \in [CA)$ *et* $H \notin [AC]$*, on a*

$$AC^2 = (AH - CH)^2 = AH^2 - 2AH \cdot CH + CH^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= AH^2 + BH^2 + 2CH^2 - 2AH \cdot CH \\ &= AB^2 + 2CH^2 - 2(AC + CH) \cdot CH \quad \text{car } C \in [AH] \\ &= AB^2 + 2CH^2 - 2AC \cdot CH - 2CH^2 \\ &= AB^2 - 2AC \cdot CH \end{aligned}$$

Comme $\widehat{ACB}$ *est obtus, on a*

$$\cos\left(\widehat{ACB}\right) = -\cos\left(180° - \widehat{ACB}\right) = -\cos\left(\widehat{BCH}\right)$$

Par conséquent

$$CH = BC\cos\left(\widehat{BCH}\right) = -BC\cos\left(\widehat{ACB}\right)$$

d'où

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos\left(\widehat{ACB}\right)$$

◈

Exercice Soit ABC un triangle. On note a, b et c les longueurs de ses côtés, et $p = \frac{a+b+c}{2}$ son demi-périmètre. Démontrer la formule de Héron :

$$\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

On note $\alpha = \widehat{BAC}$. La hauteur issue de B du triangle est donc égale à $AB\sin(\alpha)$. L'aire de ABC est donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{2} \times AB\sin(\alpha) \times AC \\
&= \frac{bc}{2}\sqrt{1-\cos^2(\alpha)} \\
&= \frac{2bc}{4}\sqrt{\Big(1-\cos(\alpha)\Big)\Big(1+\cos(\alpha)\Big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{2bc\Big(1-\cos(\alpha)\Big) \times 2bc\Big(1+\cos(\alpha)\Big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\Big(2bc-2bc\cos(\alpha)\Big)\Big(2bc+2bc\cos(\alpha)\Big)}
\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème d'Al-Kashi, on a

$$2bc\cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2$$

Il suit alors que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(ABC) &= \frac{1}{4}\sqrt{\Big(2bc-b^2-c^2+a^2\Big)\Big(2bc+b^2+c^2-a^2\Big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\Big(a^2-(b-c)^2\Big)\Big((b+c)^2-a^2\Big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c+a)(b+c-a)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2p-2b)(2p-2c)2p(2p-2a)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

16 Solides de l'espace : représentations et calculs de volumes

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** figures planes usuelles, intégrales

16.1 Solides de l'espace et représentations

Dans toute cette leçon, on se placera dans l'espace euclidien usuel de dimension 3, que l'on assimilera à $\mathbb{R}^3$.

16.1.1 Solide et volume

Définition On appelle solide de l'espace toute partie connexe fermée et bornée de l'espace.

Définition Un polyèdre est un solide délimité par un nombre fini de faces polygonales.
Ces polygones sont alors appelés les faces du polyèdre, leurs côtés sont appelés arêtes du polyèdre et leurs sommets sont appelés sommets du polyèdre.

Définition Le volume d'un solide de l'espace est une grandeur associée à ce solide représentant la "taille" de l'intérieur de ce solide.

16.1.2 Perspective cavalière

Les solides de l'espace sont par définition des objets de dimension 3, donc il est impossible de les représenter entièrement et fidèlement dans le plan. Néanmoins, certains modes de représentations existent, dont la perspective cavalière.

La perspective cavalière d'un solide est sa projection sur un plan donné. Souvent, pour un polyèdre donné, ce plan est parallèle à l'une des faces de ce polyèdre. Dans ce cas, la projection n'est que rarement une projection orthogonale.

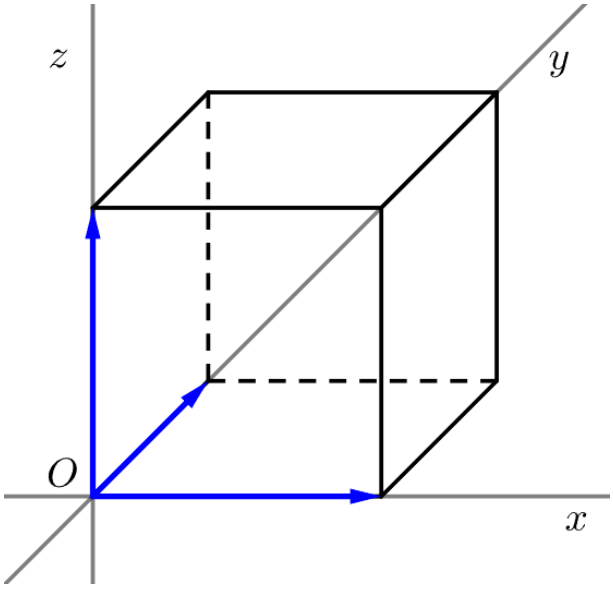
Proposition (admise) La perspective cavalière conserve la parallélisme, les alignements, les relations d'incidence, et les milieux.

Formellement, la perspective cavalière transforme un repère orthonormé (O, Ox, Oy, Oz) de l'espace en un repère orthonormé (O, Ox, Oz) du plan, auquel on ajoute un axe Oy formant un angle α avec l'axe Ox, et avec un coefficient de réduction $0 < k < 1$, comparé aux deux autres axes.

Dans ce cas, la perspective cavalière est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ suivante :

$$(x, y, z) \mapsto \Big(x + k\cos(\alpha)y, z + k\sin(\alpha)y\Big)$$

Voici un exemple de cube en perspective cavalière, avec $\alpha = 45°$ et $k = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.



16.1.3 Patron

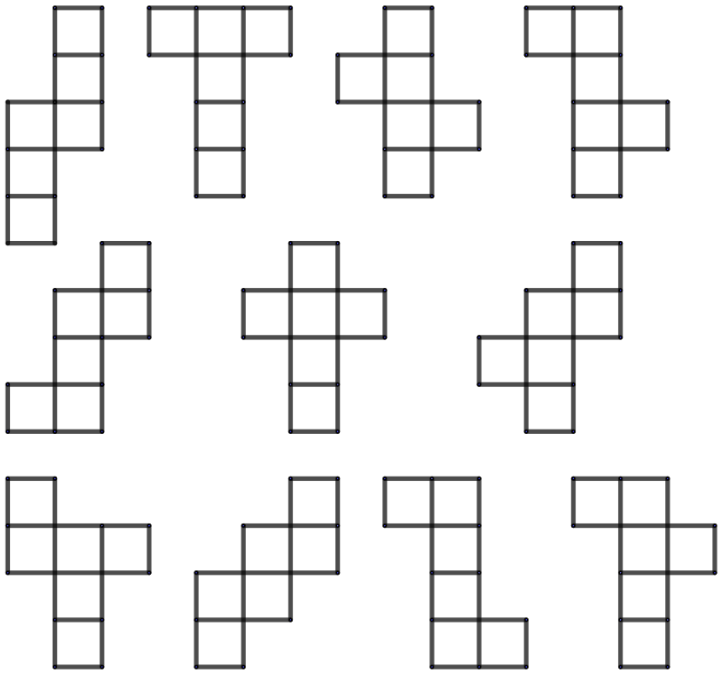
La perspective cavalière ne conserve pas les longueurs. On peut pour cela utiliser des patrons.

Définition Un patron d'un solide est une figure plane qui une fois repliée, forme le solide en question.

De cette façon, le patron d'un solide fait apparaître chaque face de celui-ci en vraie grandeur. Cependant, un patron ne permet pas de visualiser un solide aussi facilement que la perspective cavalière.

N'importe quel polyèdre admet un patron, et même plusieurs. La sphère est un solide qui n'admet pas de patron : c'est une conséquence du *theorema egregium* ("théorème remarquable") énoncé par Gauss.

Voici par exemple les 11 patrons possibles pour un cube :

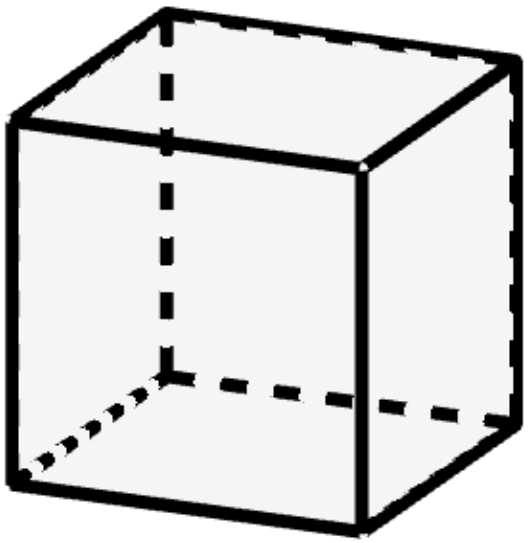


16.2 Solides usuels

16.2.1 Cube

Définition Un cube est un polyèdre qui compte 6 faces carrées identiques. Il compte 12 arêtes et 8 sommets.

Un cube est uniquement déterminé par la longueur de son côté, à isométrie près.



Proposition Le volume d'un cube de côté c est c^3.

Démonstration *On admet que le volume d'un cube de côté 1 est 1. Si c est entier, alors le cube contient c^3 cubes de côté 1, d'où le résultat.*
Supposons c rationnel, qui s'écrit $c = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors en prenant q^3 de ces cubes, on peut former un cube de côté p. Celui-ci a pour volume p^3, donc le volume d'un cube de côté c est $\frac{p^3}{q^3} = c^3$.

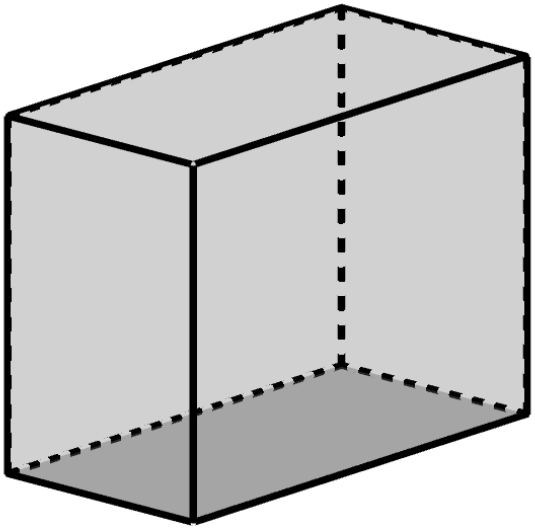
Dans le cas général $c \in \mathbb{R}$, on utilise un argument de densité. On considère une suite $(c_n)_n$ de rationnels qui converge vers c, ce qui existe car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le volume d'un cube de côté c_n est ${c_n}^3$, car ce côté est rationnel. Comme $(c_n)_n$ converge vers c, $({c_n}^3)_n$ converge vers c^3, ce qui permet de justifier que le volume du cube de côté c est c^3. ◈

On a illustré plus haut les 11 patrons du cube possibles.

16.2.2 Pavé droit

Définition Un pavé droit, ou parallélépipède rectangle, est un polyèdre à 6 faces rectangulaires. Il compte 12 arêtes et 8 sommets.

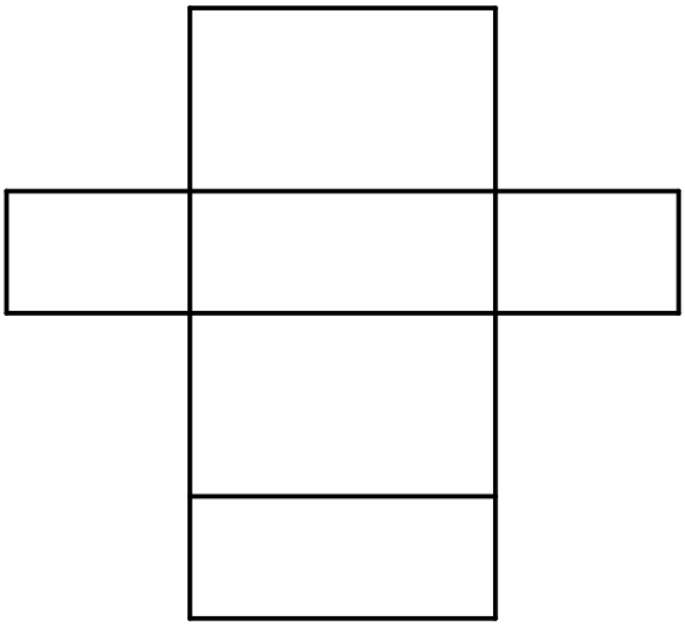
Les faces opposées d'un pavé droit sont identiques. Un pavé droit est uniquement déterminé par ses 3 dimensions : sa longueur, sa largeur et sa hauteur.



Proposition Le volume d'un pavé droit de longueur L, de largeur l et de hauteur h est $L \times l \times h$.

Démonstration *La preuve est en tout point analogue à celle du cube.* ◈

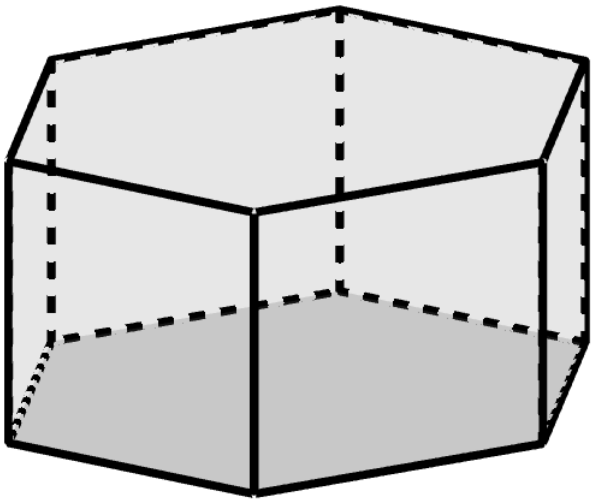
Voici un exemple de patron de pavé droit.



16.2.3 Prisme droit et cylindre de révolution

Définition Un prisme droit est un polyèdre composé de deux faces polygonales identiques parallèles, appelées bases, et de faces latérales rectangulaires joignant ces deux bases.
Si la base d'un prisme droit compte n côtés, alors le prisme compte $n+2$ faces, $3n$ arêtes et $2n$ sommets.

Un prisme droit est uniquement déterminé par sa base, et par sa hauteur, qui est la distance entre ses deux bases.



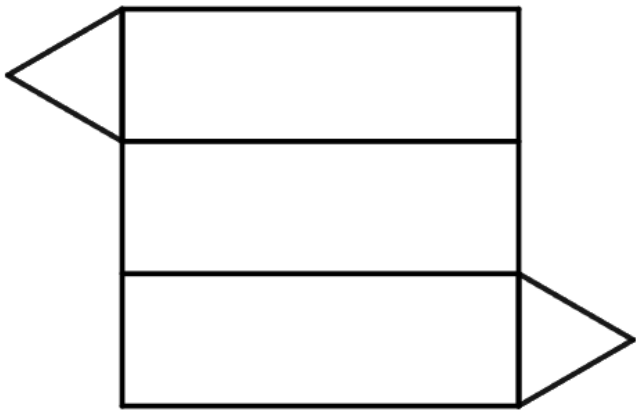
Proposition Le volume d'un prisme droit de hauteur h et dont la base a pour aire b est $b \times h$.

Démonstration *On munit l'espace d'un repère orthonormé dont l'axe Oz est parallèle à une hauteur du prisme droit, et tel que l'origine soit le centre d'une base du prisme.*
Alors toute section du prisme par un plan normal à l'axe Oz est soit identique à la base du prisme, soit vide. On en déduit que le volume du prisme est :

$$V = \int_0^h b dz = b \times h$$

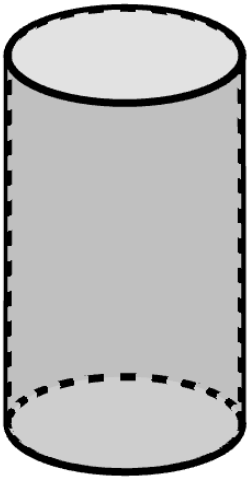
◈

Voici un exemple de patron d'un prisme droit à base triangulaire équilatérale.



Définition Un cylindre de révolution est le solide obtenu en faisant tourner (dans l'espace) un rectangle autour d'un de ses côtés. Ce côté est alors une hauteur du cylindre, qui comporte alors deux bases circulaires identiques et parallèles.

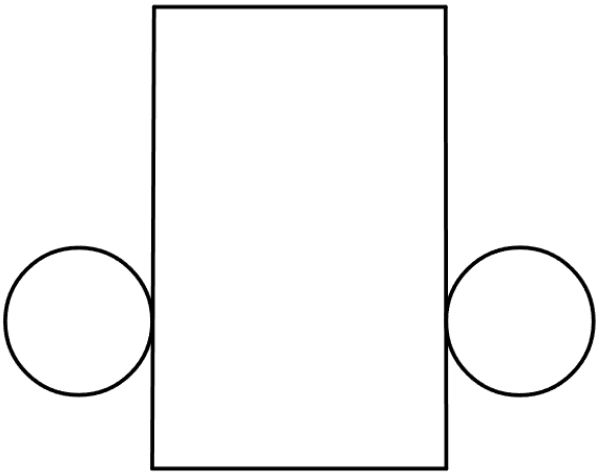
Un cylindre de révolution est uniquement déterminé par le rayon de sa base et sa hauteur, à isométrie près.



Proposition Le volume d'un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h est $\pi \times r^2 \times h$.

Démonstration *La preuve est analogue à celle du prisme droit, avec* $b = \pi \times r^2$. ◈

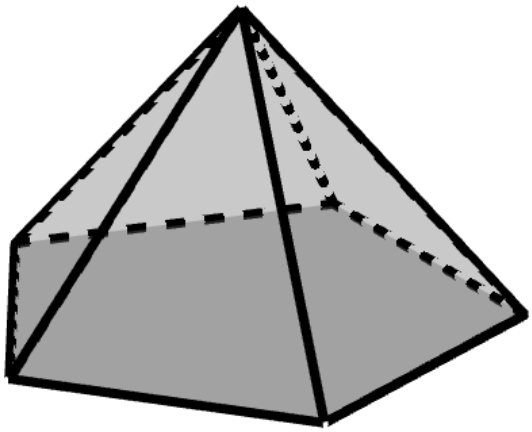
Voici un exemple de patron de cylindre de révolution.



16.2.4 Pyramide et cône de révolution

Définition Une pyramide est un polyèdre constitué d'une face polygonale à n côtés, appelée base, et de n face triangulaires concourantes en un point, appelé sommet principal. Elle compte alors $n+1$ faces, $2n$ arêtes et $n+1$ sommets.

Une pyramide est uniquement déterminée par sa base et sa hauteur, qui est la distance entre sa base et son sommet principal, à isométrie près.



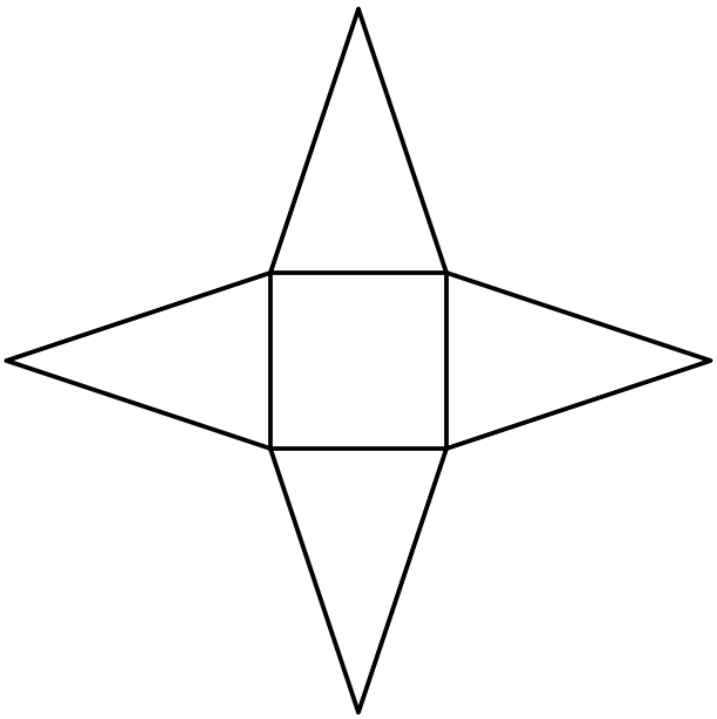
Proposition Le volume d'un pyramide de hauteur h et dont la base a pour aire b est $\frac{b\times h}{3}$.

Démonstration *On munit l'espace d'un repère orthonormé tel que l'axe (Oz) soit parallèle à la hauteur de la pyramide, et tel que l'origine soit son sommet principal.*
Alors toute section de cette pyramide par le plan normal à l'axe (Oz) de côte z donne l'image par une homothétie de rapport $0 \leq \frac{z}{h} \leq 1$ de la base de la pyramide, ou est vide. Celle-ci a alors pour aire $b\frac{z^2}{h^2}$.
On en déduit que le volume de la pyramide est :

$$V = \int_0^h b\frac{z^2}{h^2}dz = \frac{b}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{b\times h}{3}$$

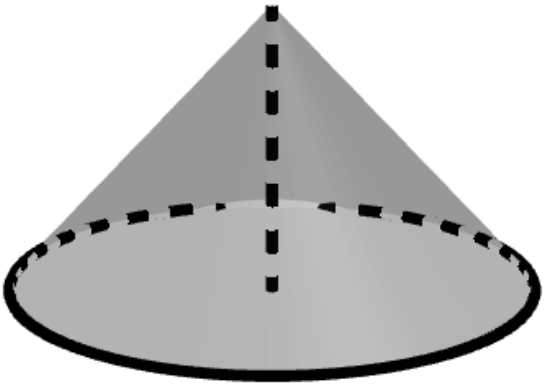
◈

Voici un exemple de patron d'une pyramide à base carrée.



Définition Un cône de révolution est le solide obtenu en faisant tourner (dans l'espace) un triangle rectangle autour d'une de ses cathètes. Il est composé d'une face circulaire, appelée base du cône, et d'une face latérale courbée. Celle-ci comporte un sommet, appelé sommet principal.

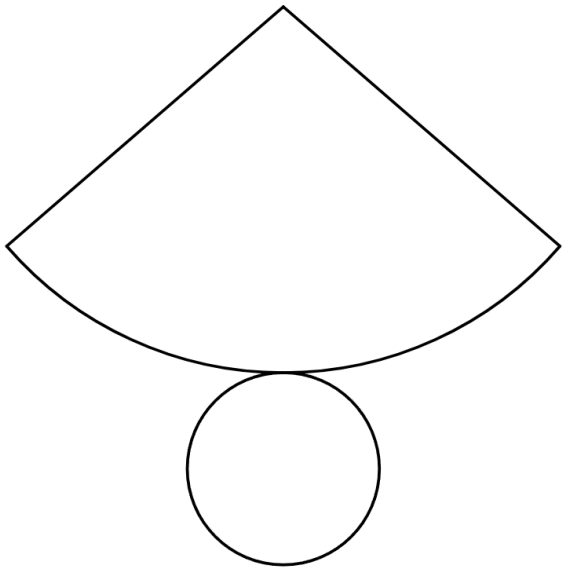
Un cône de révolution est uniquement déterminé par le rayon de sa base et sa hauteur, qui est la distance entre sa base et son sommet principal.



Proposition Le volume d'un cône de révolution de rayon r et de hauteur h est $\frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$.

Démonstration *La preuve est analogue à celle pour la pyramide, avec* $b = \pi \times r^2$. ◈

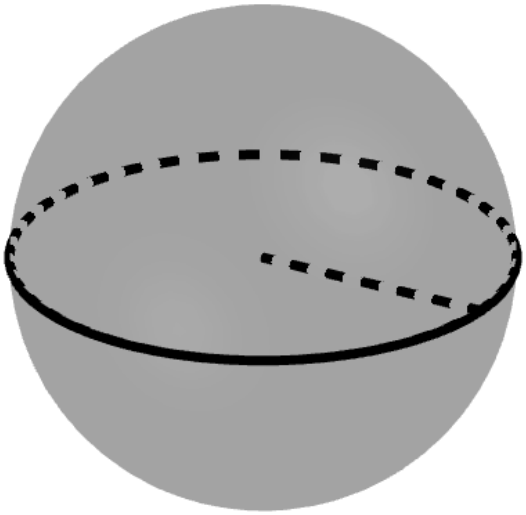
Voici un exemple de patron de cône de révolution.



16.2.5 Sphère et boule

Définition Une boule (respectivement une sphère) est le solide obtenu en faisant tourner un disque (respectivement un cercle) autour d'un de ses diamètres. Le rayon du disque (ou du cercle) est alors appelé rayon de la boule (ou de la sphère).

Une sphère ou une boule est uniquement déterminée par son rayon, à isométrie près.



La boule (respectivement la sphère) de centre O et de rayon $r > 0$ est alors l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leq r$ (respectivement $OM = r$).

Proposition Le volume d'une boule de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Démonstration *On munit l'espace d'un repère orthonormé d'origine le centre O de la boule. Alors toute section de cette boule par un plan normal à l'axe Oz de côte $-r \leq z \leq r$ donne un cercle. Par le théorème de Pythagore, celui-ci a pour rayon $\sqrt{r^2 - z^2}$, et donc pour aire $\pi(r^2 - z^2)$. Le volume de la boule est donc :*

$$V = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - z^2)dz = \pi r^2 \times 2r - \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \pi r^3 \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

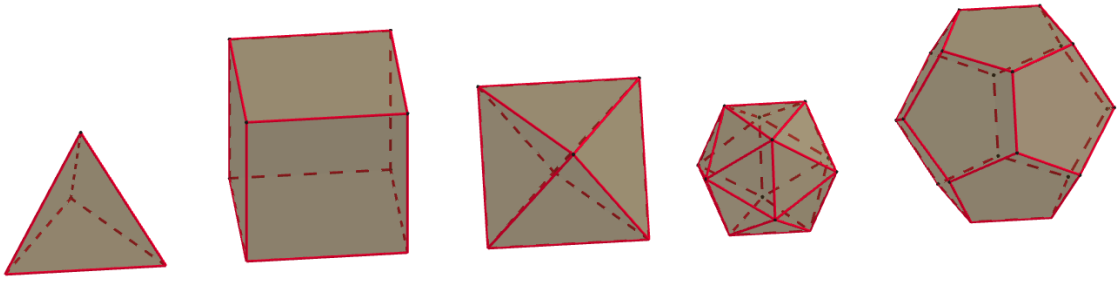
◈

La sphère n'admet pas de patron. C'est une conséquence du *theorema egregium* de Gauss, qui implique que la courbure de Gauss d'une surface est invariante par les déformations que l'on peut faire subir à un patron. Or, celle-ci est nulle pour une surface plane, alors qu'elle ne l'est pas pour la sphère, d'où l'impossibilité de lui construire un patron.

16.3 Solides de Platon

Définition Un solide de Platon est un polyèdre convexe dont toutes les faces sont identiques et régulières, et tel qu'à chacun de ses sommets concourent le même nombre de faces.

Proposition (admise) Il existe 5 solides de Platon : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre régulier, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier.



17 Périmètres, aires, volumes

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** géométrie euclidienne, cercles et polygones, solides, intégrales, transformations du plan et de l'espace

17.1 Périmètre

17.1.1 Définitions, propriétés, mesure

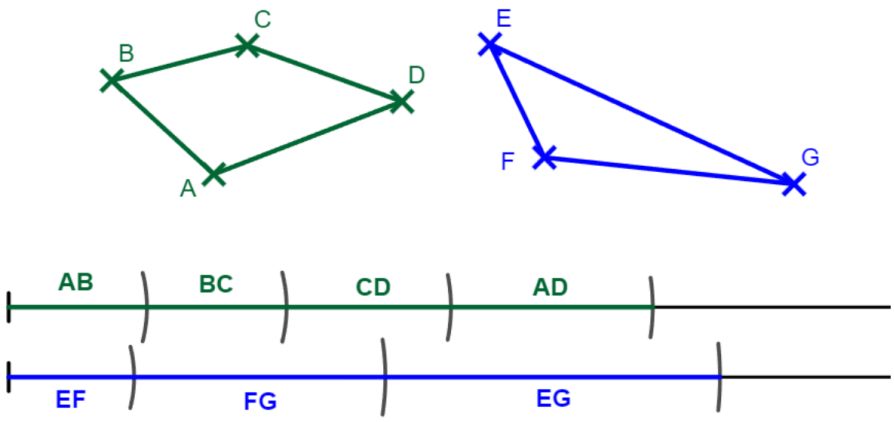
Définition Le périmètre d'une figure plane (bornée) est la longueur de son contour (lorsque cette longueur est finie).

Remarque Certaines figures planes, même bornées, ont un contour de longueur infinie. C'est par exemple le cas du flocon de von Koch.
Toutefois, nous n'étudierons ici que des figures planes dont le contour est de longueur finie.

Proposition Le périmètre d'un polygone est la somme des longueurs de ses côtés.

Démonstration *C'est un résultat trivial au vu de la définition du périmètre.* ◈

Remarque Il est possible de comparer les périmètres de différents polygones sans les calculer. Pour cela, on reporte les longueurs des côtés de chaque polygone sur une demi-droite, puis on compare les segments obtenus.



Ici par exemple, le périmètre de EFG est supérieur à celui de $ABCD$.

Pour mesurer des longueurs (et donc des périmètres), les unités usuelles sont le mètre, ses multiples et ses sous-multiples. Le rapport multiplicatif entre ces unités est toujours 10.

On peut donc utiliser un tableau semblable au tableau de numération pour effectuer des conversions.

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

17.1.2 Polygones usuels et cercles

Proposition
- ❖ Le périmètre d'un carré ou d'un losange de côté c est $4 \times c$.
- ❖ Le périmètre d'un rectangle de longueur L et de largeur l est $2 \times (L + l) = 2 \times L + 2 \times l$.
- ❖ Le périmètre d'un triangle équilatéral de côté c est $3 \times c$.
- ❖ Le périmètre d'un polygone régulier à n côtés de longueur c est $n \times c$.

Démonstration *Trivial.* ◈

Proposition (admise) Le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre. On note π le coefficient de proportionnalité correspondant.
Le périmètre d'un cercle de rayon r est donc $2 \times \pi \times r$.

Démonstration *On considère deux cercles : $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $r > 0$, et $\mathcal{C}'$ de centre O' et de rayon $r' > 0$.*
Quitte à appliquer une translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$ à $\mathcal{C}'$, ce qui ne change pas son périmètre car une translation est une isométrie, on peut supposer que $O = O'$.

Soit $M \in \mathcal{C}$. On note M' l'image par l'homothétie de centre O de rapport $\frac{r'}{r} > 0$ du point M. On a alors $\overrightarrow{OM'} = \frac{r'}{r}\overrightarrow{OM}$, et $OM = r$, donc $OM' = \frac{r'}{r} \times r = r'$, d'où $M' \in \mathcal{C}'$. Réciproquement, le même raisonnement montre que tout point de $\mathcal{C}'$ est l'image par cette homothétie d'un point de $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par cette homothétie.

Cela justifie que tous les cercles sont semblables. En conséquence, pour deux cercles de périmètres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, le rapport $\frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}}$ est le rapport de similitude entre ces deux cercles, ie le rapport de leur diamètres $\frac{d'}{d}$. On en déduit que $\frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} = \frac{d'}{d}$, et donc que $\frac{\mathcal{P}'}{d'} = \frac{\mathcal{P}}{d}$. Ce rapport est donc constant pour tous les cercles, d'où l'existence du nombre π. ◈

17.1.3 Arcs paramétrés

Pour aller un peu plus loin, on va examiner comment calculer la longueur de certaines courbes de $\mathbb{R}^2$. On ne détaillera pas l'étude des arcs paramétrés.

Définition On appelle arc paramétré de $\mathbb{R}^2$ la donnée d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, non trivial, et d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}^2$.
Pour $t \in I$, on notera $f(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, avec $x, y : I \to \mathbb{R}$. On appelle support de cet arc paramétré l'ensemble

$$f(I) = \{f(t) \in \mathbb{R}^2,\ t \in I\}$$

Proposition (admise) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ un arc paramétré. Si les fonctions x, y sont de classe C^1 sur $[a,b]$, c'est-à-dire dérivables et de dérivées continues, alors la longueur du support de f est

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

Donnons deux exemples que l'on connaît déjà :

❖ On considère $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définies pour $t \in [0, 2\pi]$ par

$$f(t) = \Big(r\cos(t), r\sin(t)\Big)$$

où $r > 0$. Le support de f est alors le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon r.
Les fonctions x et y sont alors bien de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$, et on a

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} r\sqrt{\cos(t)^2 + \sin(t)^2}dt \\ &= r\int_0^{2\pi} dt \\ L &= 2\pi r \end{aligned}$$

On retrouve bien le périmètre du cercle.

❖ On considère deux points distincts $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ du plan, et $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, telle que pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(t) = \Big(tx_B + (1-t)x_A, ty_B + (1-t)y_A\Big)$$

Le support de f est alors le segment $[AB]$, avec $f(0) = A$ et $f(1) = B$.
Les fonctions x et y sont alors bien de classe C^1 sur $[0,1]$, et on a

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}dt \\ L &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{aligned}$$

On retrouve bien la longueur AB.

17.2 Aires

17.2.1 Découpage et recollement, mesure

Définition L'aire d'une figure plane (bornée) est une grandeur qui représente la "taille" de l'intérieur de cette figure.

Remarque La définition formelle de l'aire d'une figure plane est particulièrement épineuse. Voici l'idée de la construction de cette grandeur pour des figures planes assez "régulières".

On commence par définir l'aire d'un carré de côté 1 comme étant égale à 1. Par addition, on en déduit l'aire d'un carré de côté entier. Pour un côté rationnel $\frac{p}{q}$, on considère q^2 de ces carrés, qui forment alors un carré de côté p, donc d'aire p^2. Pour un côté réel, on utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Cela permet alors de définir l'aire de toute figure que l'on peut découper en carrés, par addition. Pour des figures planes assez "lisses", on peut alors approcher l'aire de cette figure par défaut et par excès, à l'aide de figures composées de carrés de côtés de plus en plus petits. Ce procédé est alors similaire à la méthode des rectangles pour l'intégrale de Riemann.

Proposition (admise) Si une figure plane F se décompose comme l'union disjointe de deux figures planes F_1 et F_2, alors l'aire de F est la somme des aires de F_1 et F_2.
Cela s'étend naturellement à un nombre quelconque fini de figures.

Une conséquence immédiate de ce résultat est le suivant.

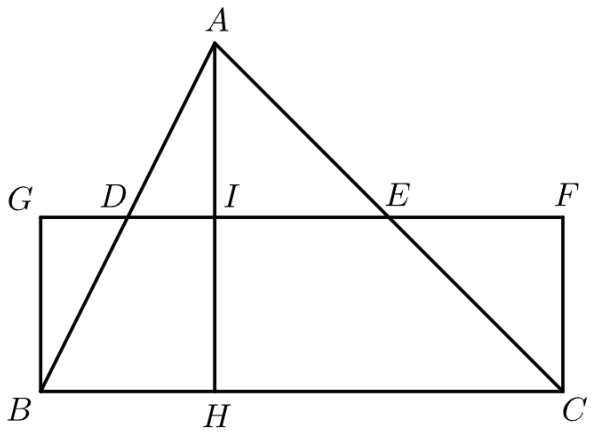
Proposition On considère deux figures planes F et F'. Supposons que l'on peut décomposer F et F' comme des unions disjointes $F = F_1 \cup \ldots, \cup F_n$ et $F' = F'_1 \cup \ldots \cup F'_n$, de sorte que pour tout $1 \leq i \leq n$, F_i et F'_i soient isométriques. Alors F et F' ont même aire.

Cette proposition permet de retrouver l'aire de nombreuses figures planes à partir de celle d'un rectangle.

Lorsqu'il existe un tel découpage pour deux figures, on dit qu'elles sont congrues par découpage (cette relation est une relation d'équivalence, d'où ce vocabulaire). Une question naturelle est de savoir quelles sont les figures planes qui sont congrues entre elles, et lesquelles ne le sont pas.
Faisons un apparté pour discuter de cette question.

La proposition précédente fait de l'égalité des aires une condition nécessaire. Il s'agit en réalité également d'une condition suffisante pour les polygones : c'est ce qu'énonce le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien. Donnons en une démonstration.

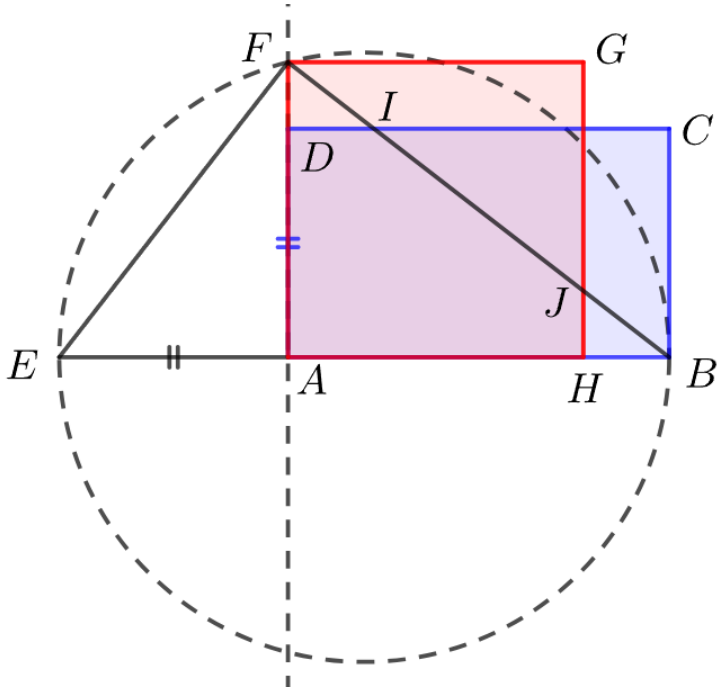
On considère deux polygones de même aire. On va montrer qu'ils sont tous deux congrus par découpage à un carré de même aire, donc au même carré. Pour cela, on commence par trianguler ces polygones. On transforme par découpage chaque triangle en un rectangle de la façon suivante.



On considère un triangle ABC tel que $[BC]$ soit son plus grand côté, et l'on trace sa hauteur issue de A. Elle coupe alors $[BC]$ en H. On trace la perpendiculaire à (AH) passant par le milieu I de $[AH]$. Par le théorème de la droite des milieux, elle coupe $[AB]$ en son milieu D et $[AC]$ en son milieu E. En appliquant des symétrie centrales aux triangles AID et AIE, on obtient un rectangle $BCFG$ de même aire que ABC.

On transforme ensuite par découpage chaque rectangle en un carré. Commençons par construire un carré de même aire qu'un rectangle donné.

On considère un rectangle $ABCD$. On prolonge (AB) et on y place E tel que $AE = AD$, avec E en dehors du rectangle. On trace le cercle de diamètre $[EB]$, puis la perpendiculaire à (AB) passant par A : elle coupe ce cercle en F, du même côté que le point D. On construit ensuite le carré $AFGH$.



Montrons que $ABCD$ et $AFGH$ ont même aire. On note $h = AF$, $a = AD$ et $b = AB$. On montre facilement que $\widehat{AEF} = \widehat{AFB}$ et $\widehat{AFE} = \widehat{ABF}$, en utilisant que les triangles BFE, AEF et AFB sont rectangles. Les triangles AFE et AFB sont alors semblables, donc $\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AF}$, d'où $\frac{h}{a} = \frac{b}{h}$, et $h^2 = ab$. $ABCD$ et $AFGH$ ont donc même aire.

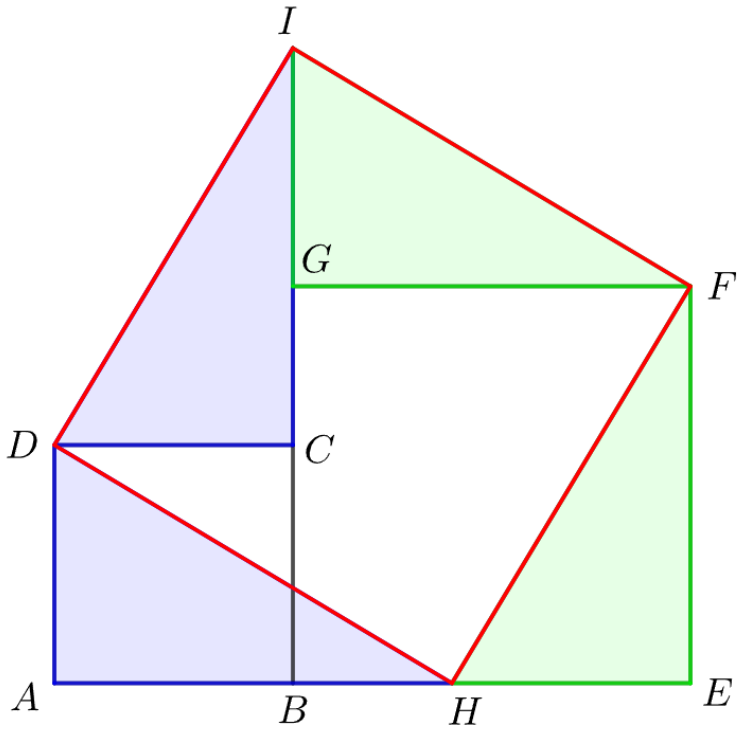
On place I et J à l'intersection de $[BF]$ avec $[CD]$ et $[GH]$ respectivement. Si le rectangle $ABCD$ est trop "long" pour que ces points apparaissent, il suffit de le transformer par découpage en un rectangle de longueur divisée par 2 et de largeur doublée.

Les triangles FDI et JHB sont semblables, ainsi que FGJ et ICB, car ils ont les mêmes angles. De plus, les triangles FDI et ICB sont aussi semblables par le théorème de Thalès, et il en est de même de JHB et FGJ. On a $DI + IC = DC = AB = AH + HB$ avec $\frac{DI}{IC} = \frac{HB}{AH}$, ie $DI = \frac{IC \cdot HB}{AH}$. Ainsi

$$\frac{IC \cdot HB}{AH} + IC = AH + HB \Rightarrow IC\left(\frac{AH + HB}{AH}\right) = AH + HB \Rightarrow \frac{IC}{AH} = 1 \Rightarrow IC = AH$$

Ainsi, $IC = AH = FG$, donc les triangles FGJ et ICB sont égaux. On a alors également $DI = DC - CI = AB - AH = HB$, donc les triangles FDI et JHB sont aussi égaux.

De cette façon, on transforme chaque rectangle en un carré de même aire. On a alors partagé le polygone initial en un nombre fini de carrés. On peut maintenant assembler deux à deux ces carrés pour former un nouveau carré, en suivant le découpage suivant.



On considère deux carrés parmi ceux que l'on a obtenu, et on les juxtapose pour former les carrés $ABCD$ et $BEFG$. On suppose que $BE > AB$, et on place $H \in [BE]$ tel que $HE = AB$, puis on trace les triangles rectangles ADH et HFE.

On a $AD = HE$ et $AH = AE - HE = AE - AB = BE = EF$, donc les triangles rectangles ADH et HFE sont égaux. On a donc $DH = HF$. De plus, on a $\widehat{AHD} = \widehat{HFE}$ et $\widehat{ADH} = \widehat{FHE}$, donc $\widehat{DHF} = 180° - \widehat{AHD} - \widehat{FHE} = 90°$.

En appliquant des rotations d'angle $90°$ aux triangles ADH autour de D, et FHE autour de F, on obtient alors un carré $DHFI$ puisque $DA = DC$, $EF = FG$, et $\widehat{DAH} = \widehat{DCG} = \widehat{FEH} = 90°$. Celui-ci est donc congru par découpage à la figure composée des deux carrés juxtaposés.

Remarque Ce raisonnement démontre d'ailleurs que $DH^2 = AD^2 + AH^2$, ce qui est l'égalité de Pythagore !

On a donc justifié que tout polygone est congru par découpage à un carré de même aire. Pour deux polygones, il suffit alors de les transformer en carrés de cette façon, puis de "superposer" les découpages, pour obtenir un découpage permettant de passer d'un polygone à l'autre. Cela montre donc le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien.

Remarque On peut chercher à généraliser ce résultat de deux façons :

- Ce théorème est faux pour les figures planes en général. Par exemple, un cercle et un carré de même aire ne sont pas congrus par découpage. C'est le fameux problème de la quadrature du cercle, qui est impossible (à la règle et au compas), ce qui est une conséquence de la transcendance du nombre π.
- Le problème se pose aussi pour les solides : deux polyèdres de même volumes sont-ils congrus par découpage ? C'est le sujet du troisième problème de Hilbert, énoncé par David Hilbert lors du deuxième congrès international des mathématiques en 1900. La réponse est apportée par Max Dehn quelques années plus tard, qui démontre par l'algèbre qu'un cube et un tétraèdre régulier de même

volume ne sont pas congrus par découpage. Il construit pour cela une condition nécessaire d'égalité d'un certain invariant, dit invariant de Dehn. Il a ensuite été démontré en 1965 que cette condition est également suffisante.

Une conséquence de ce théorème est que l'on peut calculer l'aire de nombreux polygones usuels en utilisant celle du rectangle, en procédant à un découpage.

17.2.2 Polygones usuels et disque

Proposition **1.** L'aire d'un carré de côté c est c^2.

2. L'aire d'un rectangle de longueur L et de largeur l est $L \times l$.

3. L'aire d'un triangle de base b et de hauteur h est $\frac{b \times h}{2}$.

4. L'aire d'un parallélogramme de base b et de hauteur h est $b \times h$.

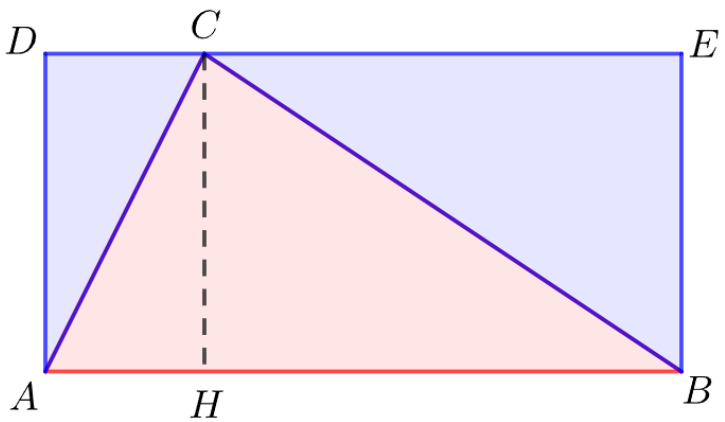
5. L'aire d'un trapèze de hauteur h et dont les deux côtés parallèles ont pour longueur a et b est $\frac{(a+b) \times h}{2}$.

Démonstration

1. *On admet que l'aire d'un carré de côté 1 est 1.*
Si c est entier, en partageant chaque côté du carré en c segments de longueur 1, on peut partager le carré en c^2 carrés de côté 1. L'aire du carré de côté c est donc $c^2 \times 1 = c^2$.
Si c est un rationnel qui s'écrit $c = \frac{p}{q}$, alors en prenant q^2 copies du carré de côté c, on peut former un carré de côté p. Celui-ci a pour aire p^2, car p est entier, donc l'aire du carré de côté c est $\frac{p^2}{q^2}$, donc c^2.
Dans le cas général $c \in \mathbb{R}$, on utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Il existe une suite (c_n) de rationnels qui converge vers c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'aire d'un carré de côté c_n est ${c_n}^2$, qui converge vers c^2, d'où le résultat.

2. *Pour un rectangle, on procède de la même façon que pour un carré : on commence par des dimensions entières, puis rationnelles, puis on passe au cas réel par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.*

3. *On considère un triangle ABC, de sorte que $[AB]$ soit son plus grand côté.*

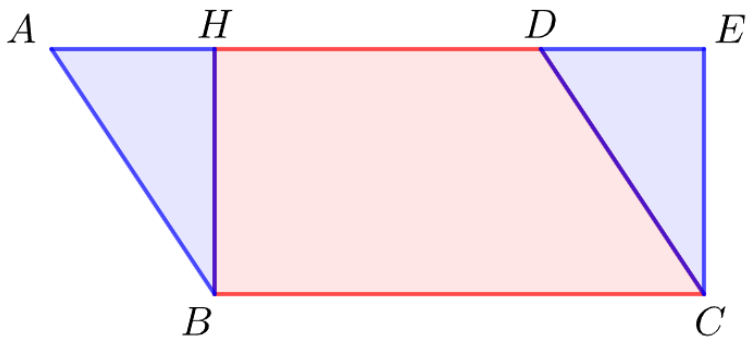


On appelle H le projeté orthogonal de C sur (AB), qui appartient donc à $[AB]$ (car comme $[AB]$ est le plus grand côté, les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont nécessairement aigus, puisque $\widehat{ACB}$ est le plus grand angle). On place alors D et E de sorte que $ABED$ soit un rectangle de longueur AB et de largeur HC.

On a $AD = CH$, et les triangles AHC et ADC ont des angles deux à deux égaux (des angles droits, et les autres sont alternes-internes). Ces triangles sont donc égaux, et il en est de même de CHB et CEB. On en déduit que l'aire du rectangle $ABED$ est le double de l'aire du triangle ABC, d'où

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{\mathcal{A}(ABED)}{2} = \frac{AB \times CH}{2}$$

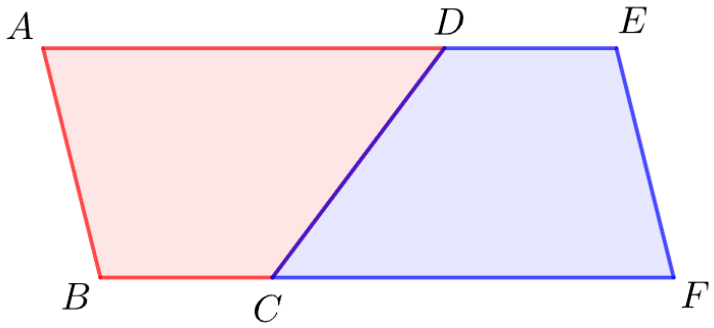
4. *On considère un parallélogramme $ABCD$, tel que $BC > AB$, et on appelle H le projeté orthogonal de B sur (AD). Comme $BC > AB$, H est sur $[AD]$. On place ensuite E de sorte que $BHEC$ soit un rectangle.*



On a $AB = DC$, $HB = EC$, et $\widehat{HAB} = \widehat{EDC}$ (car ils sont correspondants et (AB) est parallèle à (DC)). Les triangles AHB et DEC sont donc égaux. Ainsi

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(HBCE) = BC \times HB$$

5. *On considère un trapèze $ABCD$ tel que (AD) soit parallèle à (BC). On considère une copie de ce trapèze, à laquelle on fait subir une symétrie centrale de centre le milieu de $[DC]$. On appelle E l'image de B et F celle de A.*



Comme les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont parallèles, et puisque l'on fait une symétrie centrale par rapport au milieu de $[DC]$, on a $D \in [AE]$ et $C \in [BF]$. De plus, (AE) est parallèle à (BF), et par symétrie centrale (AB) est parallèle à (EF). Le quadrilatère $ABFE$ est donc un parallélogramme composé de deux copies du trapèze initial.
Ce parallélogramme a pour base la somme des longueurs des côtés parallèles du trapèze, et pour hauteur celle du trapèze, d'où le résultat.

◈

Proposition (admise) L'aire d'un disque de rayon r est πr^2.

Démonstration *On munit le plan d'un repère orthonormé d'origine le centre O du disque. Pour tout $-r \leq t \leq r$, on considère le segment obtenu par intersection du disque et de la droite d'équation $y = t$. Cette droite coupe le cercle en deux points M et M' de même ordonnée t. L'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ vérifie alors $t = r\sin(\alpha)$, donc $\alpha = \arcsin\left(\frac{t}{r}\right)$. Ainsi, M a pour abscisse $r\cos(\alpha)$ et M' a pour abscisse $-r\cos(\alpha)$.*

Le segment $[MM']$ a donc pour longueur $2r\cos(\alpha)$:

$$MM' = 2r\cos\left(\arcsin\left(\frac{t}{r}\right)\right)$$

On en déduit que l'aire du disque est donné par l'intégrale

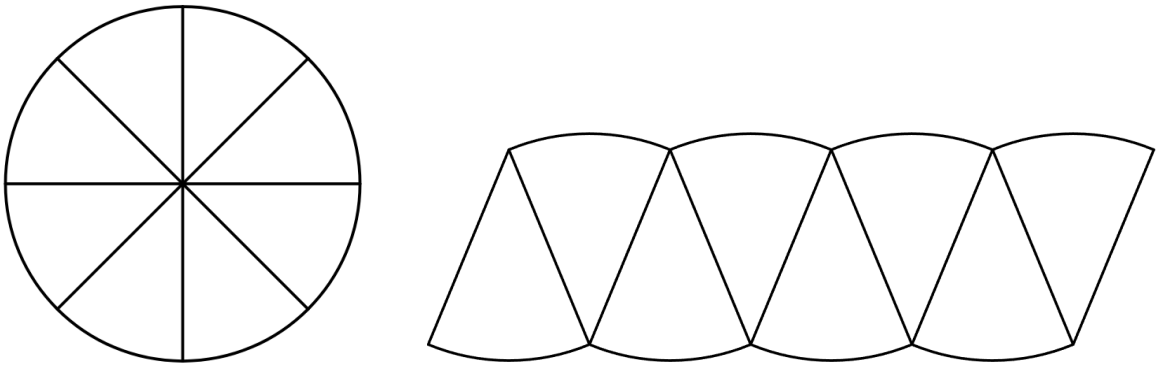
$$\mathcal{A} = \int_{-r}^{r} 2r\cos\left(\arcsin\left(\frac{t}{r}\right)\right) dt$$

On effectue maintenant le changement de variable $s = \arcsin\left(\frac{t}{r}\right)$, $t = r\sin(s)$. On a alors $dt = r\cos(s)ds$ et

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r\cos(s)\cdot r\cos(s)ds \\
&= r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2(s)ds \\
&= r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2s))ds \\
&= r^2\left[s + \frac{\sin(2s)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= r^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(\pi)}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(-\pi)}{2}\right) \\
&= \pi r^2
\end{aligned}$$

◈

Remarque On peut aborder cette formule d'une autre façon, à partir du périmètre du cercle.
On partage le disque en $2n$ parts égales en traçant des rayons, puis l'on réarrange ces parts de façon à en placer n "tournées vers le haut" et n "tournées vers le bas", et on les assemble.

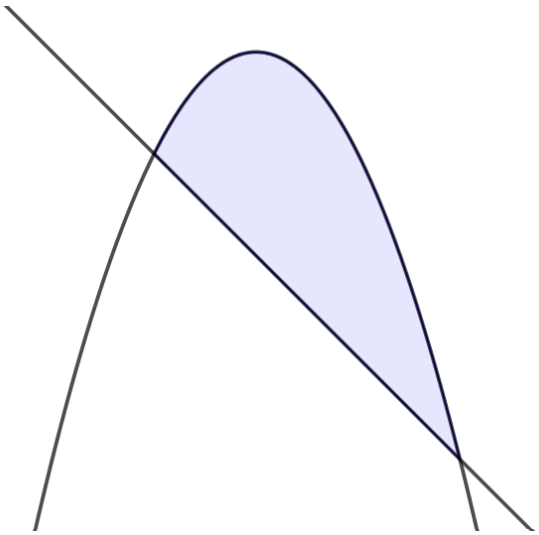


Lorsque l'on augmente n, la figure de droite se "rapproche" d'un rectangle de largeur r et longueur la moitié du périmètre du cercle, donc πr, d'où le résultat.
Cette preuve manque de rigueur, dans le sens où bien que la figure de droite se "rapproche" d'un rectangle, rien n'assure que son aire converge vers celle d'un rectangle.

17.2.3 Intégrales

Pour des figures planes non polygonales, on peut se servir du calcul intégral pour calculer des aires. En effet, l'intégrale d'une fonction sur un segment donné représente l'aire d'un certain domaine géométrique. Donnons deux exemples.

- On considère le cercle trigonométrique. Alors le premier quadrant de ce cercle est l'ensemble des points de la forme $\Big(\cos(t), \sin(t)\Big)$, avec $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Or, pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, on a
$$\sin(t) = \sqrt{1 - \cos(t)^2}$$
et $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est bien définie et continue sur $[0, 1]$. Ainsi, l'aire de ce quart de disque est donnée par l'intégrale :
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$
qui vaut alors $\frac{\pi}{4}$.
Au lycée, on ne dispose pas des outils pour calculer explicitement cette intégrale, ce qui peut se faire par le changement de variable $x = \cos(t)$, ce qui donne :
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos(t)^2} \cdot (-\sin(t))dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2x))dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi)}{2} - 0 + \frac{\sin(0)}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$
- Un second exemple est celui de la quadrature d'une parabole, autrement dit le calcul de l'aire du domaine situé entre une parabole et une droite.



C'est un problème traité par Archimède et Pascal notamment, par des méthodes géométriques. Le calcul intégral permet de répondre à la question facilement.

On choisit comme origine du repère le sommet de la parabole, et définit l'axe Oy comme l'axe de symétrie de la parabole. On complète ensuite le repère orthonormé, de façon que la parabole soit la courbe représentative de $x \mapsto -x^2$. On suppose que la droite coupe la parabole en deux points de coordonnées $(a, -a^2)$ et $(b, -b^2)$. Alors celle-ci a pour équation

$$y = \frac{-b^2 - (-a^2)}{b-a}(x-a) - a^2 \Leftrightarrow y = -(a+b)(x-a) - a^2$$

L'aire du domaine est alors donné par l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b \Big(-x^2 + (a+b)(x-a) + a^2 \Big) dx \\
&= \int_a^b \Big(-x^2 + (a+b)x - ab \Big) dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + (a+b)\frac{x^2}{2} - abx \right]_a^b \\
&= -\frac{b^3}{3} + (a+b)\frac{b^2}{2} - ab^2 + \frac{a^3}{3} - (a+b)\frac{a^2}{2} + a^2 b \\
&= \frac{1}{6}\Big(-2b^2 + 3ab^2 + 3b^3 - 6ab^2 + 2a^3 - 3a^3 - 3a^2 b + 6a^2 b \Big) \\
&= \frac{1}{6}\Big(b^3 - a^3 - 3ab^2 + 3a^2 b \Big) \\
\boxed{I &= \frac{(b-a)^3}{6}}
\end{aligned}$$

17.3 Volumes

17.3.1 Définitions, propriétés, mesure

Définition Le volume d'un solide (borné) est une grandeur qui représente la "taille" de son intérieur.

Remarque La définition formelle du volume est similaire à celle de l'aire d'un figure plane.

Proposition (admise) Si un solide S se décompose comme une union disjointe $S_1 \cup S_2$ de deux solides, alors le volume du solide S est la somme des volumes des solides S_1 et S_2.
Cela s'étend naturellement à un nombre quelconque de solides.

Cette proposition permet de procéder par découpage pour calculer des volumes.

Remarque Comme on l'a vu en parlant du troisième problème de Hilbert, ce type de découpage, même entre polyèdres, n'est pas toujours possible. Pour pallier cela, on fait appel au calcul intégral.

17.3.2 Solides usuels

Proposition

1. Le volume d'un cube de côté c est c^3.
2. Le volume d'un pavé droit de longueur L, de largeur l et de hauteur h est $L \times l \times h$.
3. Le volume d'un prisme droit de hauteur h et dont la base a pour aire b est $b \times h$.
4. Le volume d'un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h est $\pi r^2 h$.
5. Le volume d'un pyramide de hauteur h et dont la base a pour aire b est $\frac{b \times h}{3}$.
6. Le volume d'un cône de révolution de rayon r et de hauteur h est $\frac{\pi r^2 h}{3}$.
7. Le volume d'une boule de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Démonstration

1. *On admet que le volume d'un cube de côté 1 est 1. Si c est entier, alors le cube contient c^3 cubes de côté 1, d'où le résultat.*
Supposons c rationnel, qui s'écrit $c = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors en prenant q^3 de ces cubes, on peut former un cube de côté p. Celui-ci a pour volume p^3, donc le volume d'un cube de côté c est $\frac{p^3}{q^3} = c^3$.

Dans le cas général $c \in \mathbb{R}$, on utilise un argument de densité. On considère une suite $(c_n)_n$ de rationnels qui converge vers c, ce qui existe car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le volume d'un cube de côté c_n est ${c_n}^3$, car ce côté est rationnel. Comme $(c_n)_n$ converge vers c, $({c_n}^3)_n$ converge vers c^3, ce qui permet de justifier que le volume du cube de côté c est c^3.

2. *La preuve est en tout point analogue à celle du cube.*

3. *On munit l'espace d'un repère orthonormé dont l'axe Oz est parallèle à une hauteur du prisme droit, et tel que l'origine soit le centre d'une base du prisme.*
Alors toute section du prisme par un plan normal à l'axe Oz est soit identique à la base du prisme, soit vide. On en déduit que le volume du prisme est :

$$V = \int_0^h b dz = b \times h$$

4. *La preuve est analogue à celle du prisme droit, avec $b = \pi \times r^2$.*

5. *On munit l'espace d'un repère orthonormé tel que l'axe (Oz) soit parallèle à la hauteur de la pyramide, et tel que l'origine soit son sommet principal.*
Alors toute section de cette pyramide par le plan normal à l'axe (Oz) de côte z donne l'image par une homothétie de rapport $0 \leq \frac{z}{h} \leq 1$ de la base de la pyramide, ou est vide. Celle-ci a alors pour aire $b\frac{z^2}{h^2}$. On en déduit que le volume de la pyramide est :

$$V = \int_0^h b\frac{z^2}{h^2} dz = \frac{b}{h^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^h = \frac{b \times h}{3}$$

6. *La preuve est analogue à celle pour la pyramide, avec $b = \pi \times r^2$.*

7. *On munit l'espace d'un repère orthonormé d'origine le centre O de la boule. Alors toute section de cette boule par un plan normal à l'axe Oz de côte $-r \leq z \leq r$ donne un cercle. Par le théorème de Pythagore, celui-ci a pour rayon $\sqrt{r^2 - z^2}$, et donc pour aire $\pi(r^2 - z^2)$. Le volume de la boule est donc :*

$$V = \int_{-r}^r \pi(r^2 - z^2) dz = \pi r^2 \times 2r - \pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-r}^r = \pi r^3\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

◈

18 Exemples de résolution de problèmes de géométrie plane à l'aide de vecteurs

❖ **Niveau :** lycée

❖ **Pré-requis :** vecteurs du plan, produit scalaire, équations de droites, géométrie euclidienne du cycle 4

18.1 Problèmes d'alignement et de parallélisme

Commençons par rappeler quelques résultats sur les vecteurs et l'alignement, le parallélisme.

Proposition ❖ Soient A, B, C trois points distincts du plan. Alors A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

❖ Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan. Alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

❖ Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

Démonstration

❖ *Si A, B, C sont alignés, alors en munissant la droite (AB) du repère gradué $(A, \overrightarrow{AB})$, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Ces vecteurs sont donc colinéaires.*
Réciproquement, s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, alors $C \in (AB)$, donc A, B, C sont alignés.

❖ *Il suffit de faire subir aux points C et D une translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$, ce qui n'influe ni sur le parallélisme ni sur la colinéarité. On se ramène ainsi au cas du point précédent.*

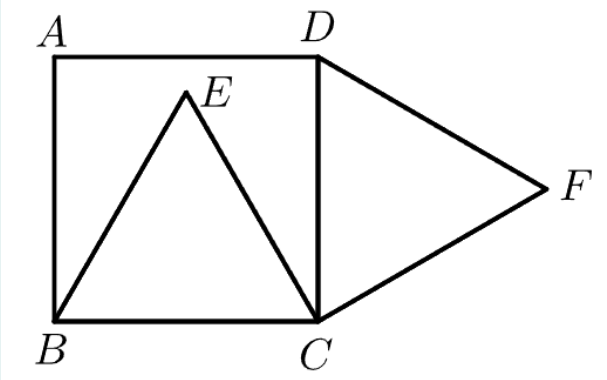
❖ *On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de ces deux vecteurs dans un repère orthonormé, de sorte que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$. Alors $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$. Ainsi*

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x\lambda y - \lambda xy = 0$$

Réciproquement, supposons que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$, c'est-à-dire que $xy' = x'y$. Si $x' = 0$, alors $x = 0$ ou $y' = 0$. Comme $\overrightarrow{v}$ est non nul, nécessairement $x = 0$. Dans ce cas, on a $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}$, donc ces vecteurs sont colinéaires. De même, si $y' = 0$ ces deux vecteurs sont colinéaires.
Si x' et y' sont non nuls, alors on a $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda$, donc $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$, et ces vecteurs sont colinéaires.

◈

Exercice On considère la figure suivante, dans laquelle $ABCD$ est un carré, BCE et CDF sont des triangles équilatéraux. Démontrer que les points A, E et F sont alignés.



On se place dans le repère orthonormé $\left(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$. Dans ce repère, on a les coorodnnées suivantes : $A(0,1)$, $B(0,0)$, $C(1,0)$, $D(1,1)$. Par le théorème de Pythagore, la hauteur d'un des triangles équilatéraux de la figure est $\sqrt{1^2 - \frac{1^2}{2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, on a les coordonnées $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On en déduit que

$$\det\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \times \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 0$$

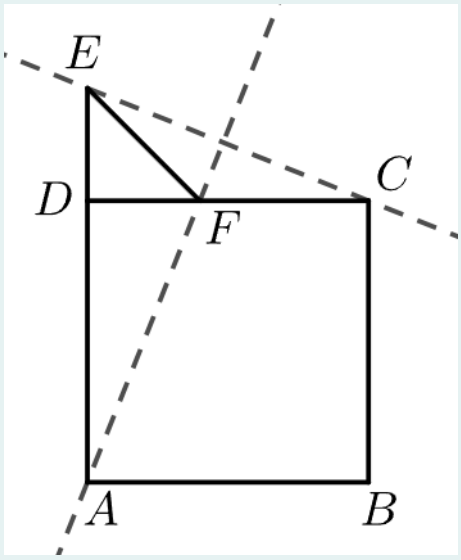
Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires, et les points A, E et F sont alignés.

18.2 Problèmes d'orthogonalité

Proposition Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan. Alors les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Démonstration *On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$. Comme $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$, ce produit scalaire est nul si, et seulement, le cosinus est nul, donc si, et seulement si, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est droit.* ◈

Exercice On considère la figure suivante, dans laquelle $ABCD$ est un carré, et $ED = DF$. Montrer que les droites (AF) et (EC) sont perpendiculaires.



Par la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$. On a alors

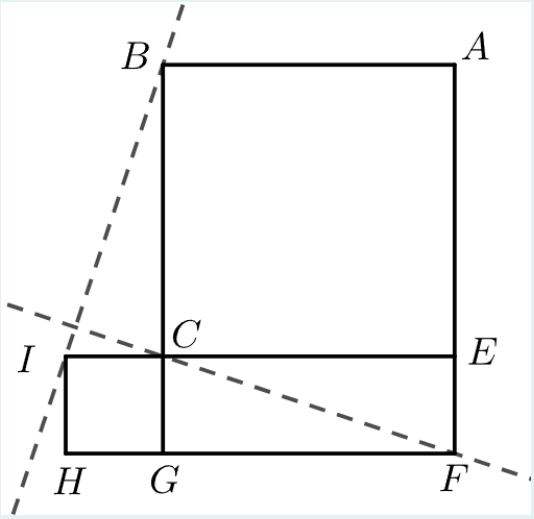
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EC} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}\right) \cdot \left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= -AD \times ED + DF \times DC \quad \text{car les angles en } D \text{ sont droits, } D \in [AE] \text{ et } F \in [DC] \\ &= 0 \quad \text{car } AD = DC \text{ et } ED = DF\end{aligned}$$

Ainsi, les droites (AF) et (EC) sont perpendiculaires.

Remarque On peut démontrer ce résultat autrement : en utilisant un repère orthonormé, ou en remarquant que le triangle EDC est l'image par la rotation d'angle $90°$ de sens anti-horaire de centre D du triangle AFD.

Une variante de cet exercice est le suivant :

Exercice On considère la figure suivante dans laquelle $ABCE$ et $IHGC$ sont des carrés, et $CEFG$ est un rectangle. Démontrer que les droites (FC) et (IB) sont perpendiculaires.



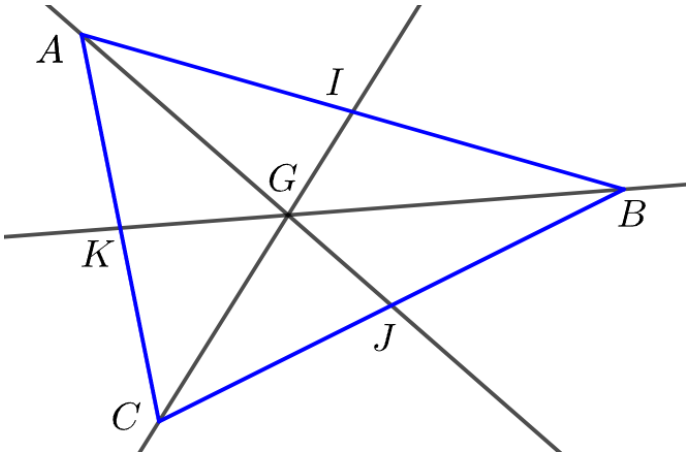
18.3 Problèmes de lieu

On appelle problème de lieu tout problème de géométrie visant à déterminer un ensemble de points vérifiant une certaine propriété.

Exercice (Concourance des médianes) Démontrer que les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G, que celui-ci se situe aux 2 tiers de chaque médiane, et qu'il vérifie :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

On considère un triangle ABC, et on note I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.



On introduit le point G tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$. Montrons maintenant que ce point vérifie l'égalité $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{JA}\\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{JG} + 2\overrightarrow{GA}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

car comme J est le milieu de $[BC]$, on a $\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{0}$.

Cette équivalence appliquée aux points B et C montre également que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$. Ainsi, ce point G appartient aux trois médianes, ce qui prouve leur concourance. On a au passage démontré les autres résultats demandés.

Exercice Soient trois points A, B et C distincts. Montrer que pour tout point M, on a

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$

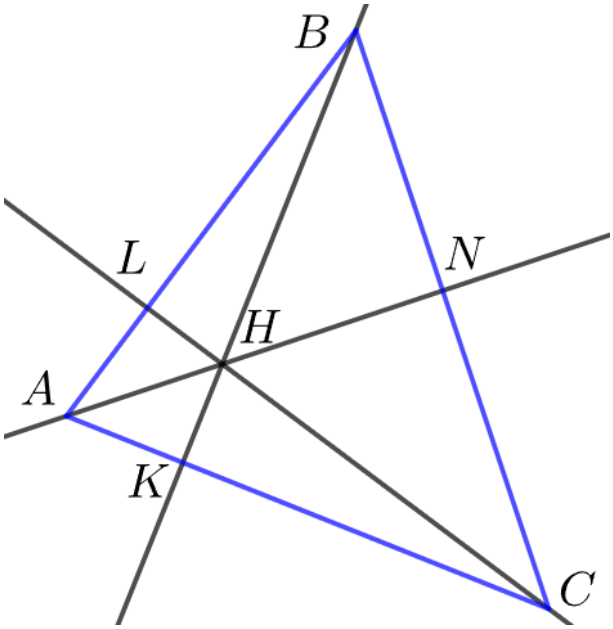
En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Soit M un point du plan. En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{0} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

ce qui prouve le premier point.

On considère maintenant un triangle ABC et ses trois hauteurs. Si les hauteurs issues de A et B sont parallèles, alors il en est de même des côtés $[BC]$ et $[AC]$ du triangle, ce qui n'est pas. Ces deux hauteurs admettent donc un point d'intersection H.



On remarque que comme $(AH) \perp (BC)$, on a $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$. De même, $(BH) \perp (AC)$, donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$. En appliquant l'égalité précédente à $M = H$, on obtient alors que $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. Ainsi, H appartient à la hauteur issue de C, ce qui prouve le concourance des trois hauteurs.

Exercice On considère deux points A et B distincts tels que $AB = 2$. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = 20$.

Soit M un point du plan. Notons I le milieu de $[AB]$. Alors

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MB} \\
&= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) \\
&= 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IB} \\
&= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + IA^2 + IB^2 \\
&= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{0} + IA^2 + IB^2 \\
&= 2MI^2 + 2IA^2
\end{aligned}$$

car I est le milieu de $[AB]$.

On en déduit que

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 = 20 &\Leftrightarrow 2MI^2 + IA^2 + IB^2 = 20 \\
&\Leftrightarrow MI^2 + IA^2 = 10 \\
&\Leftrightarrow MI^2 + 1^2 = 10 \\
&\Leftrightarrow MI^2 = 9 \\
&\Leftrightarrow MI = 3
\end{aligned}$$

car $MI \geq 0$. Ainsi, le lieu des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 20$ est le cercle de centre I et de rayon 3.

18.4 Droites du plan

Une des applications des vecteurs est la caractérisation des droites du plan par des équations cartésiennes.

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et passant par un point $A(x_A, y_A)$. On a alors pour tout point $M(x, y)$ du plan :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ sont colinéaires} \\
&\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & a \\ y - y_A & b \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_A)b - (y - y_A)a = 0 \\
&\Leftrightarrow bx - ay + (ay_A - bx_A) = 0
\end{aligned}$$

ce qui est bien la forme souhaitée pour une équation cartésienne de droite.

On peut également arriver à ce résultat en utilisant un vecteur normal. On considère une droite $\mathcal{D}$ passant par un point $A(x_A, y_A)$ et dont $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ est un vecteur normal. Pour tout point $M(x, y)$ du plan, on a alors :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ sont orthogonaux} \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_A)\alpha + (y - y_A)\beta = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha x + \beta y + (-\alpha x_A - \beta y_A) = 0
\end{aligned}$$

ce qui est encore une fois de la forme souhaitée.

On peut également se servir des vecteurs pour caractériser une droite par une représentation paramétrique. Pour une droite $\mathcal{D}$ passant par un point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, un point $M(x, y)$ du plan appartient à $\mathcal{D}$ si, et seulement si, il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire

$$x - x_A = ta \quad \text{et} \quad y - y_A = tb$$

ce qui se réécrit

$$x = x_A + ta \quad \text{et} \quad y = y_A + tb$$

Exercice On considère une droite $\mathcal{D}$ du plan d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec a, b, c trois réels. Démontrer que pour tout point $A(x_A, y_A)$ du plan n'appartenant pas à $\mathcal{D}$, la distance de A à $\mathcal{D}$ est donnée par

$$d(\mathcal{D}, A) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

On appelle $H(x_H, y_H)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. On a $ax_H + by_H + c = 0$, et pour tout point $M(x, y)$ de $\mathcal{D}$:

$$\overrightarrow{HM} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = (x - x_H)a + (y - y_H)b = ax + yb - (ax_H + by_H) = -c - (-c) = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{D}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. D'une part, on a

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n} = (x_H - x_A)a + (y_H - y_A)b = ax_H + by_H - ax_A - by_A = -(ax_A + by_A + c)$$

et d'autre part

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}=AH\cdot\|n\|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{n}\right)=AH\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{n}\right)$$

Comme $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires, on a $\left|\cos\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{n}\right)\right|=1$, donc

$$\left|\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}\right|=AH\sqrt{a^2+b^2}$$

Par conséquent, la distance entre A et $\mathcal{D}$ est

$$d(\mathcal{D},A)=AH=\frac{\left|\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{n}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Exercice Soient trois points distincts du plan $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$. Déterminer, en fonction des coordonnées de ces trois points, une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

On va exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes. D'une part, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=AB\cdot AC\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\\&=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\cdot\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}=(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)$$

On en déduit que

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\cdot\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}}$$

puis que

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\arccos\left(\frac{(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\cdot\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}}\right)$$

19 Produit scalaire dans le plan

- **Niveau :** Première spécialité, Terminale spécialité
- **Pré-requis :** vecteurs du plan, repères du plan, projeté orthogonal, trigonométrie, angles orientés

19.1 Trois expressions du produit scalaire

Définition Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ comme le réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

.

Proposition Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Démonstration

Si $\vec{u} = \vec{0}$, on a $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, donc la proposition est vraie.

On suppose $\vec{u}$ non nul. On note α l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$. On se place dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$, avec $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$. Alors dans ce repère, on a les coordonnées :

$$\vec{u} = \left(\|\vec{u}\|, 0\right) \quad \vec{v} = \left(\|\vec{v}\|\cos(\alpha), \|\vec{v}\|\sin(\alpha)\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 &= \left(\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|\cos(\alpha)\right)^2 + \left(\|\vec{v}\|\sin(\alpha)\right)^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \\
&= \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\alpha) + \|\vec{v}\|^2\cos^2(\alpha) + \|\vec{v}\|^2\sin^2(\alpha) - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \\
&= 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\left(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) - 1\right) \\
&= 2\vec{u}\cdot\vec{v}
\end{aligned}$$

d'où $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

◈

Proposition Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Si dans un repère orthonormé les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration
Dans ce repère orthonormé, on a :

$$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)=2(xx'+yy')$$

d'où $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'$.

◈

19.2 Propriétés

19.2.1 Propriétés algébriques

Proposition Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan colinéaires. Alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|u\|\times\|v\|$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orientés dans le même sens, et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-\|u\|\times\|v\|$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires.

Démonstration
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orientés dans le même sens, alors $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=0$, d'où le résultat. S'ils sont de sens contraires, alors $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\pi$, d'où le résultat.

◈

Propriétés Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan, et λ, μ deux réels. Alors :

1. Le produit scalaire est symétrique : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
2. Le produit scalaire est bilinéaire : $(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\lambda\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\mu\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}$, et $\overrightarrow{u}\cdot(\lambda\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{w})=\lambda\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$
3. Le produit scalaire est positif : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}\geq 0$
4. Le produit scalaire est défini : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=0\Rightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$

Démonstration
On se place dans un repère orthonormé, dans lequel $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$.

1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=xx'+yy'=x'x+y'y=\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
2. *Comme le produit scalaire est symétrique, il suffit de vérifier la première égalité. Le vecteur* $\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix}\lambda x+\mu x'\\\lambda y+\mu y'\end{pmatrix}$. *Ainsi :*
$$\begin{aligned}\left(\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v}\right)\cdot\overrightarrow{w}&=(\lambda x+\mu x')x''+(\lambda y+\mu y')y''\\&=\lambda(xx''+yy'')+\mu(x'x''+y'y'')\\&=\lambda\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\mu\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}\end{aligned}$$
3. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=x^2+y^2=\|u\|^2\geq 0$
4. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\|u\|^2=0\Rightarrow\|u\|=0\Rightarrow\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$

◈

Remarque Au passage, on remarque que $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\|u\|^2$. On note d'ailleurs parfois $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}^2$.

Propriétés Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors :

1. $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)^2=\overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$
2. $\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)^2=\overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$
3. $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2$

Démonstration
Il suffit d'utiliser les propriétés de bilinéarité et de symétrie du produit scalaire.

◈

Remarque On notera l'analogie avec les identités remarquables pour les réels. Ces formules sur le produit scalaire sont d'ailleurs également qualifiées d'identités remarquables.

19.2.2 Orthogonalité

Définition On dit que deux vecteurs du plan $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont orthogonaux lorsque l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est droit (modulo π).

Proposition Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, non nuls. Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Démonstration
On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 &\Leftrightarrow \|u\| \times \|v\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \quad \textit{car comme } \overrightarrow{u} \textit{ et } \overrightarrow{v} \textit{ sont non nuls, } \|u\| > 0 \textit{ et } \|v\| > 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \frac{\pi}{2} \ (\pi) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \textit{ et } \overrightarrow{v} \textit{ sont orthogonaux}\end{aligned}$$

◈

Proposition Soient A, B, C trois points du plan et H le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Démonstration *On a*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \quad \textit{par la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \textit{par bilinéarité} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \textit{car par définition de } H, \ \overrightarrow{HB} \textit{ et } \overrightarrow{AC} \textit{ sont orthogonaux}\end{aligned}$$

◈

19.3 Applications

19.3.1 Relations dans un triangle

Théorème (Théorème d'Al-Kashi) Soit ABC un triangle. Alors :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$$

Démonstration *On a*

$$\begin{aligned}
AB^2 &= \|AB\|^2 \\
&= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \quad \textit{par la relation de Chasles} \\
&= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \quad \textit{par bilinéarité} \\
&= AC^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} \quad \textit{par symétrie} \\
&= AC^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} \quad \textit{par bilinéarité, car } \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

$$\boxed{AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \times \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)}$$

◈

Remarques

❖ Ce théorème est une généralisation du théorème de Pythagore. En effet, dans le cas où ABC est rectangle en C, on a $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right) = 0$.

❖ Historiquement, ce théorème a été découvert bien avant l'invention du produit scalaire : l'oeuvre d'Al-Kashi date de 1428 (bien que ce résultat fasse partie des Elements d'Euclide), alors que l'invention du produit scalaire date du XIXème siècle. C'est d'ailleurs en partie ce théorème qui pousse à l'étude du terme $AC \times BC \times \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$, et qui amène à l'interprétation du produit scalaire comme un "défaut d'orthogonalité" entre deux vecteurs.

Théorème (Théorème de la médiane) Soient ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$. Alors :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
AB^2 + AC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 \\
&= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 \\
&= AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + AI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} \\
&= 2AI^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC} \quad \textit{car } IB = IC \\
&= 2AI^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) \quad \textit{par bilinéarité} \\
&= 2AI^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{0} \quad \textit{car } \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IC}
\end{aligned}$$

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2} \quad \textit{par bilinéarité}$$

◈

Remarque Un corollaire de ce résultat est l'identité du parallélogramme : si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$. Il suffit de partager le parallélogramme en deux triangles par une de ses diagonales, puis d'appliquer le théorème de la médiane dans ces deux triangles.

19.3.2 Lieux géométriques

Proposition L'équation cartésienne d'une droite du plan est de la forme $ax + by = c$, où a, b et c sont des réels.

Démonstration

On se place dans un repère orthonormé du plan. On considère une droite $\mathcal{D}$ du plan, un point $A(x_A, y_A)$ de cette droite et un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ directeur de cette droite. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$ est alors orthogonal à $\vec{u}$, puisque :

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = \alpha\times(-\beta)+\beta\times\alpha = 0$$

Pour tout point $M(x,y)$ de $\mathcal{D}$, $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{u}$, donc orthogonal à $\vec{n}$. Or, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\ y-y_A\end{pmatrix}$, d'où :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow -\beta(x-x_A)+\alpha(y-y_A)=0 \Leftrightarrow -\beta x+\alpha y = \alpha y_A-\beta x_A$$

qui est bien de la forme souhaitée.

Réciproquement, soit $M(x,y)$ un point du plan tel que $-\beta x+\alpha y=\alpha y_A-\beta x_A$. Alors $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$. Or $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$, donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, d'où $M\in\mathcal{D}$.

◈

Une utilisation intéressante du produit scalaire est la détermination d'une équation de cercle de diamètre $[AB]$ donné. En caractérisant le cercle par l'ensemble des points M tels que AMB est rectangle en M, et en utilisant la caractérisation des vecteurs orthogonaux par le produit scalaire, on trouve l'équation cartésienne du cercle.

Proposition Soient A, B deux points du plan et k un réel supérieur ou égal à $\frac{AB}{2}$. Alors l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=k$ est un cercle de centre le milieu de $[AB]$.

Démonstration

On note I le milieu de $[AB]$. Soit M un point du plan. On a :

$$\begin{aligned}
MA^2+MB^2=k &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=k\\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=k\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2=k\\
&\Leftrightarrow 2MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)+IA^2+IB^2=k \quad \textit{par bilinéarité et symétrie}\\
&\Leftrightarrow 2MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{0}+2IA^2=k \quad \textit{car } I \textit{ milieu de } [AB]\\
&\Leftrightarrow 2MI^2+2\left(\frac{AB}{2}\right)^2=k \quad \textit{par bilinéarité, et car } I \textit{ milieu de } [AB]\\
&\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}-\frac{AB}{4}
\end{aligned}$$

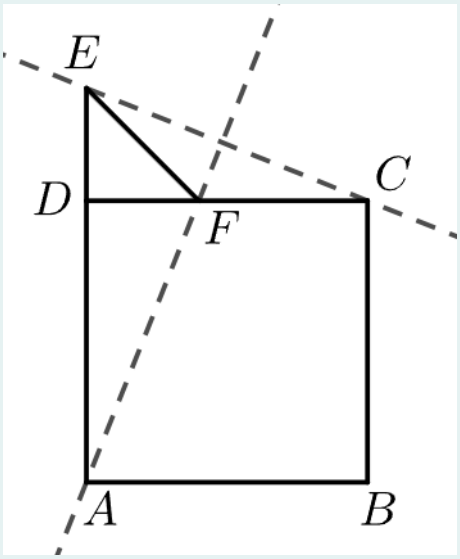
Comme $k\geq\frac{AB}{2}$, l'ensemble des points M tels que $MI^2=k-\frac{AB}{2}$ est un cercle de centre I.

◈

19.3.3 Problèmes d'orthogonalité

Le produit scalaire est un outil très pratique pour travailler avec l'orthogonalité. En effet, il permet de ramener des questions d'orthogonalité (qui sont donc de nature géométrique) à un calcul sur les vecteurs (ce qui est plutôt de nature algébrique). Moyennant un choix de repère, ce calcul peut même se faire dans le cadre numérique avec des coordonnées.

Exercice On considère la figure suivante, dans laquelle $ABCD$ est un carré, et $ED = DF$. Montrer que les droites (AF) et (EC) sont perpendiculaires.



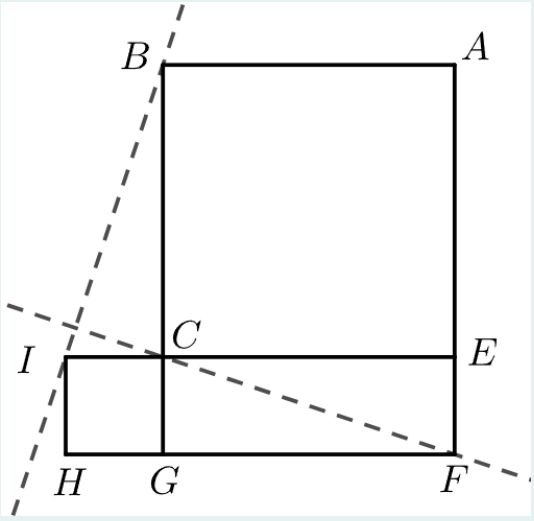
Par la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$. On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EC} &= \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}\right) \cdot \left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= -AD \times ED + DF \times DC \quad \text{car les angles en } D \text{ sont droits, } D \in [AE] \text{ et } F \in [DC] \\ &= 0 \quad \text{car } AD = DC \text{ et } ED = DF\end{aligned}$$

Ainsi, les droites (AF) et (EC) sont perpendiculaires.

Une variante de cet exercice est le suivant :

Exercice On considère la figure suivante dans laquelle $ABCE$ et $IHGC$ sont des carrés, et $CEFG$ est un rectangle. Démontrer que les droites (FC) et (IB) sont perpendiculaires.



19.3.4 Trigonométrie

On peut utiliser le produit scalaire pour redémontrer les formules d'addition et de soustraction de trigonométrie.

Proposition Soient a et b deux réels.

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
2. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
3. $\sin(a+b) = \cos(b)\sin(a) + \cos(a)\sin(b)$
4. $\sin(a-b) = \cos(b)\sin(a) - \cos(a)\sin(b)$

Démonstration

On démontre les formules de soustraction. On se place dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$*, et on considère les deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *unitaires tels que* $(\vec{i}, \vec{u}) = a$ *et* $(\vec{i}, \vec{v}) = b$*. Ainsi, dans ce repère orthonormé, on a :*

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ \sin(b) \end{pmatrix}$$

D'autre part, $(\vec{i}, \vec{u}) = a$ *et* $(\vec{i}, \vec{v}) = b$*, donc* $(\vec{u}, \vec{v}) = a - b$*. On a alors :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

en utilisant les coordonnées, et

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(a-b) = \cos(a-b)$$

en utilisant la définition, et car $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont unitaires.*

Par conséquent, $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$*. Les autres formules se retrouvent à partir de* $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$*, et car* cos *est paire et* sin *impaire.* ◈

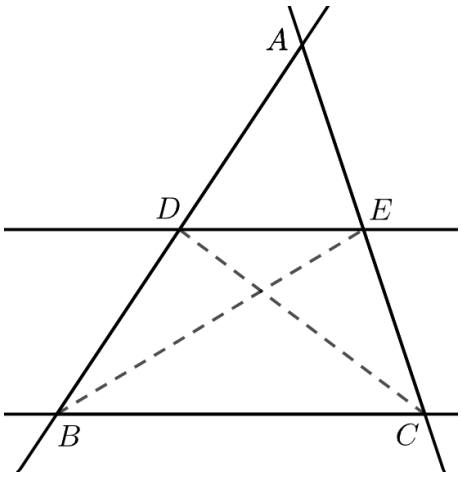
20 Applications de la notion de proportionnalité à la géométrie

- **Niveau :** cycle 4, Seconde générale
- **Pré-requis :** proportionnalité, cercles, fonctions, triangles rectangles, droites parallèles, vecteurs du plan

20.1 Théorème de Thalès

Théorème (Théorème de Thalès) Si deux droites sécantes sont toutes deux coupées par deux droites parallèles, alors les longueurs des deux triangles qu'elles forment sont proportionnelles.

Démonstration *On considère deux droites sécantes en un point A, et deux droites parallèles qui coupent ces deux droites sécantes en B et C, et en D et E.*
On a alors deux possibilités : soit le point A se situe dans la partie du plan délimitée par les deux droites parallèles, auquel cas on a la configuration "papillon", soit ce n'est pas le cas et on a la configuration "triangles imbriqués".
Quitte à faire subir au triangle ABC une symétrie de centre A, ce qui ne modifie aucune longueur, on peut supposer que l'on est dans la configuration "triangles imbriqués".



On considère les triangles ADE et BED. Comme A, B et D sont alignés, ces deux triangles admettent une hauteur h en commun : celle issue de E. On en déduit que

$$\frac{\mathcal{A}(ADE)}{\mathcal{A}(BED)} = \frac{\frac{1}{2} \times h \times AD}{\frac{1}{2} \times h \times BD} = \frac{AD}{BD}$$

Le même raisonnement appliqué aux triangles ADE et DEC montre que

$$\frac{\mathcal{A}(ADE)}{\mathcal{A}(DEC)} = \frac{AE}{EC}$$

Comme les droites (BC) et (DE) sont parallèles, les triangles BED et DEC ont la même hauteur relativement à la base $[DE]$. Ils ont donc la même aire. On en déduit que

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\mathcal{A}(ADE)}{\mathcal{A}(BED)} = \frac{\mathcal{A}(ADE)}{\mathcal{A}(DEC)} = \frac{AE}{EC}$$

Comme $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$, on a alors

$$\begin{aligned}\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} &\Rightarrow \frac{AD}{AB-AD} = \frac{AE}{AC-AE}\\ &\Rightarrow \frac{AB-AD}{AD} = \frac{AC-AE}{AE}\\ &\Rightarrow \frac{AB}{AD} - 1 = \frac{AC}{AE} - 1\\ &\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}\end{aligned}$$

Pour les longueurs BC et DE, on trace la droite parallèle à (AB) passant par E : elle coupe $[BC]$ en F. Alors $DEFB$ est un parallélogramme, donc $DE = BF$. On peut alors appliquer le résultat précédent aux triangles CEF et ABC, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{BC}{CF} = \frac{AC}{CE} &\Rightarrow \frac{BC}{BC-BF} = \frac{AC}{AC-AE}\\ &\Rightarrow \frac{BC-DE}{BC} = \frac{AC-AE}{AC}\\ &\Rightarrow 1 - \frac{DE}{BC} = 1 - \frac{AE}{AC}\\ &\Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

donc les longueurs des triangles ABC et ADE sont proportionnelles. ◈

Théorème (Réciproque du théorème de Thalès) Soient deux droites sécantes toutes deux coupées par deux droites d et d', de façon à former deux triangles. Si les longueurs de ces deux triangles sont proportionnelles, alors les droites d et d' sont parallèles.

Démonstration *On considère la même figure que celle du théorème. On suppose que*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

On trace la droite parallèle à (AB) passant par D : elle coupe $[AC]$ en E'. Alors par le théorème de Thalès, on a

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE'} = \frac{BC}{DE'}$$

On en déduit que $AE' = AE$ et $DE' = DE$. Comme de plus, E et E' sont sur $[AC]$, nécessairement $E = E'$, donc d et d' sont parallèles. ◈

Remarque Dans le cas particulier ou D est le milieu de $[AB]$, on obtient un résultat qui porte le nom de théorème de la droite des milieux : E est le milieu de $[AC]$ si, et seulement si, (DE) et (BC) sont parallèles.

20.2 Homothéties

Définition L'homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}$ est la transformation du plan qui à un point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Proposition Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$ et conserve les angles.

Démonstration *On considère une homothétie de centre O et de rapport k, et trois points distincts A, B et C, dont les images par l'homothétie seront notées A', B' et C'.*

On a alors $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. En particulier, $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = |k|$. Que k soit positif ou négatif, on peut appliquer la réciproque du théorème de Thalès aux triangles AOB et $A'OB'$, ce qui donne que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles. En appliquant maintenant le théorème dans le sens direct, on obtient que $\frac{A'B'}{AB} = |k|$. Cela montre que cette homothétie multiplie les longueurs par $|k|$.

En procédant de même, on obtient que

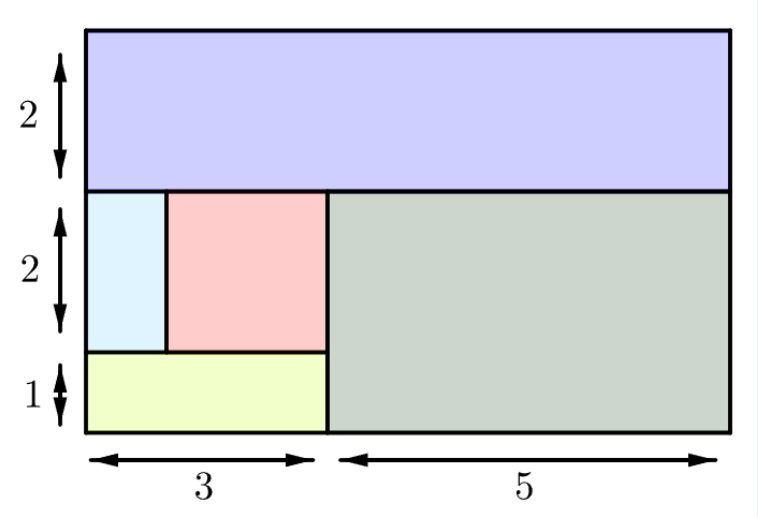
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = |k|$$

Les longueurs des triangles ABC et $A'B'C'$ sont alors proportionnelles. Quitte à faire subir à $A'B'C'$ une isométrie, ce qui ne modifie aucune longueur, on peut supposer que l'on est dans une configuration de Thalès telle que $A = A'$.
On peut alors appliquer la réciproque du théorème de Thalès, ce qui donne que les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles. Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{A'B'C'}$ sont alors correspondants entre deux droites parallèles, donc sont égaux. Ce même raisonnement s'applique pour tout angle, si bien que cette homothétie conserve les angles. ◈

Remarque De ce point de vue, le théorème de Thalès peut être vu comme un cas d'agrandissement/-réduction d'un triangle par une homothétie de centre l'un de ses sommets, et dont le rapport (en valeur absolue) est le rapport des longueurs.

Une des applications de ce résultat à des problèmes d'agrandissement/réduction est la situation du puzzle de Brousseau, dont voici une variante.

Exercice Réaliser une agrandissement du puzzle suivant, de sorte que le carré rouge ait pour côté 3.



20.3 Échelles et plans

On a vu que les homothéties conservent les angles et multiplient les longueurs par une constante. Ainsi, pour représenter un lieu ou un objet trop grand, on en représente l'image par une homothétie (à isométrie près) de rapport $0 < k < 1$. Ce rapport est alors appelé échelle du plan, et est donc le coefficient de proportionnalité entre les longueurs réelles, et les longueurs représentées.

Formellement, cela se modélise par une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle qu'il existe $0 < k < 1$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$\|f(x) - f(y)\| = k \|x - y\|$$

Voyons un résultat intéressant sur ce type de fonction.

Théorème (Théorème du point fixe de Banach)(admis) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application contractante, c'est-à-dire pour laquelle il existe un réel $0 < k < 1$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$$

Alors f admet un unique point fixe.

Démonstration *On considère $u_0 \in \mathbb{R}^2$, et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leq k \|u_{n+1} - u_n\|$, donc par récurrence*

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|$$

Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q$, on a

$$\begin{aligned}
\|u_p - u_q\| &\leq \|u_p - u_{p-1}\| + \ldots + \|u_{q+1} - u_q\| \\
&\leq \left(k^{p-1} + \ldots + k^q\right) \|u_1 - u_0\| \\
&\leq k^q\left(1 + k + \ldots\right) \|u_1 - u_0\| \quad \text{car } k > 0 \\
&\leq \frac{k^q}{1-k} \|u_1 - u_0\| \quad \text{car } 0 < k < 1
\end{aligned}$$

Or, $k^q \xrightarrow[q \to +\infty]{} 0$ car $0 < k < 1$, donc la suite (u_n) est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}^2$ est complet, elle converge vers un point $L \in \mathbb{R}^2$.
Comme f est contractance, elle est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc par passage à la limite, $L = f(L)$, ce qui prouve le théorème. ◈

Une conséquence de ce théorème est la suivante : si l'on tient une carte d'un lieu tout en se situant dans ce lieu, alors il existe un unique point qui est sa propre représentation sur la carte. Dans ce cas, la carte est l'image par une homothétie du lieu.

20.4 Cercles

Proposition (admise) Le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre. On note π le coefficient de proportionnalité correspondant.
Le périmètre d'un cercle de rayon r est donc $2 \times \pi \times r$.

Démonstration *On considère deux cercles : $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon $r > 0$, et $\mathcal{C}'$ de centre O' et de rayon $r' > 0$.*
Quitte à appliquer une translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$ à $\mathcal{C}'$, ce qui ne change pas son périmètre car une translation est une isométrie, on peut supposer que $O = O'$.

Soit $M \in \mathcal{C}$. On note M' l'image par l'homothétie de centre O de rapport $\frac{r'}{r} > 0$ du point M. On a alors $\overrightarrow{OM'} = \frac{r'}{r}\overrightarrow{OM}$, et $OM = r$, donc $OM' = \frac{r'}{r} \times r = r'$, d'où $M' \in \mathcal{C}'$. Réciproquement, le même raisonnement montre que tout point de $\mathcal{C}'$ est l'image par cette homothétie d'un point de $\mathcal{C}$. On en déduit que $\mathcal{C}'$ est l'image de $\mathcal{C}$ par cette homothétie.

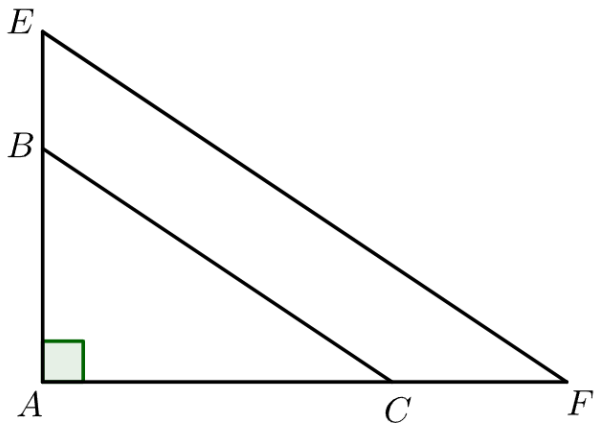
Cela justifie que tous les cercles sont semblables. En conséquence, pour deux cercles de périmètres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, le rapport $\frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}}$ est le rapport de similitude entre ces deux cercles, ie le rapport de leur diamètres $\frac{d'}{d}$. On en déduit que $\frac{\mathcal{P}'}{\mathcal{P}} = \frac{d'}{d}$, et donc que $\frac{\mathcal{P}'}{d'} = \frac{\mathcal{P}}{d}$. Ce rapport est donc constant pour tous les cercles, d'où l'existence du nombre π. ◈

20.5 Trigonométrie

Proposition Soient ABC et DEF deux triangles rectangles en A et D tels que $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$. Alors

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \qquad \frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$$

Démonstration *Quitte à faire subir une isométrie au triangle DEF, on peut supposer que $D = A$. On peut également supposer que A, B et D sont alignés et qu'il en est de même de A, C et F, car les triangles sont rectangles en $A = D$.*
Comme $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = \widehat{AEF}$, les droites (BC) et (EF) sont parallèles. Quitte à échanger les deux triangles, on peut supposer que $B \in [AE]$, et donc que $C \in [AF]$.



On peut alors appliquer le théorème de Thalès, ce qui donne :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$$

De la première égalité, on déduit que $AB \cdot AF = AC \cdot AE$, et donc en utilisant que $D = A$:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{DF}{DE}$$

ce qui est la troisième égalité à prouver. On démontre les deux autres de la même façon à partir de $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}$ et $\frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF}$. ◈

Cette proposition affirme donc que ces trois rapports de dépendant pas des longueurs des triangles ABC et DEF, du moment qu'ils ont les mêmes angles. Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, donc ces rapports ne dépendent que de l'angle $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$. Cela motive donc la définition suivante.

Définition Soit α un angle aigu, et soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\widehat{ABC} = \alpha$. On définit alors

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC} \qquad \sin(\alpha) = \frac{AC}{BC} \qquad \tan(\alpha) = \frac{AC}{AB}$$

Cette définition n'est valable que pour des angles aigus. Pour des angles obtus, on passe par le supplémentaire.

20.6 Fonctions linéaires

On sait que l'on peut représenter toute situation de proportionnalité dans un repère orthonormé par une droite passant par l'origine. Celle-ci est alors la représentation d'une fonction réelle f de la forme $x \mapsto kx$, où k est la coefficient de proportionnalité.

Ce type de fonction est appelé fonction linéaire, notamment de par la représentation par une droite. Cependant, la propriété de linéarité pour une fonction est en réalité une propriété de morphisme entre espaces vectoriels. Nous allons voir le lien entre ces deux point de vue.

Définition Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite linéaire si

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (linéarité additive)
- Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ (linéarité multiplicative)

Cette définition est en accord avec les méthodes de linéarité additive et de linéarité multiplicative utilisées pour résoudre des problèmes de proportionnalité.

Proposition Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaire. Alors il existe un réel k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = kx$.

Démonstration *Il suffit de voir qu'en appelant $k = f(1)$, par linéarité multiplicative, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x \times 1) = x \times f(1) = kx$* ◈

Cela justifie qu'une fonction possédant ces propriétés de linéarité additive et multiplicative est bien représentée par une droite. Il est en réalité possible d'affaiblir les conditions de ce résultat, de la façon suivante.

Proposition Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Alors il existe un réel k tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = kx$.

Démonstration *On note $k = f(1)$, et soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, donc $f(0) = 0$. De plus $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2k$, $f(3) = f(1+1+1) = f(1) + f(1) + f(1) = 3k$, et par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = kn$.*
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(0) = 0$, donc $f(-n) = -f(n) = -kn$. Le résultat est donc vrai pour $x \in \mathbb{Z}$.
Si $x \in \mathbb{Q}$ s'écrit $x = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et q non nul, on a par une récurrence immédiate que

$$q \times f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q} \times q\right) = f(p) = kp$$

d'où $f\left(\frac{p}{q}\right) = k\frac{p}{q}$.
Dans le cas général, on utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On considère une suite $(x_n)_n$ de rationnels qui converge vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) = kx_n$ car $x_n \in \mathbb{Q}$. Par continuité de f, on en déduit que $f(x) = kx$. ◈

21 Problèmes de construction géométriques

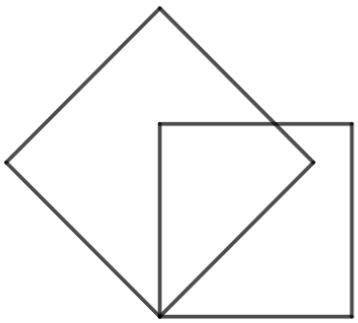
- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** variable selon les applications

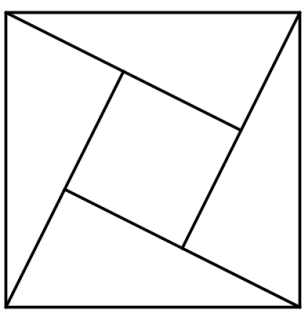
21.1 Cycle 4

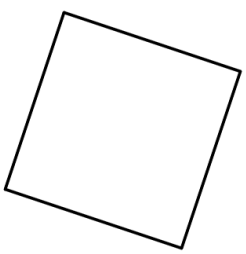
Nous allons proposer différents exercices ou différents problèmes de construction géométrique, en précisant le niveau minimal requis.

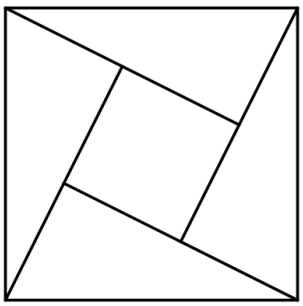
La première situation est la restauration de figures. Le but est de restaurer une figure modèle à partir d'une amorce donnée (souvent de taille différente).

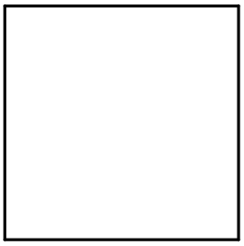
C'est un type de tâche rencontrée en classe de 6e (voire avant), dont le but est de faire évoluer la perception des figures géométriques, en cherchant des alignements et des points d'intersection. Cela favorise la déconstruction dimensionnelle. Voici quelques exemples, avec le modèle à gauche et l'amorce à droite.







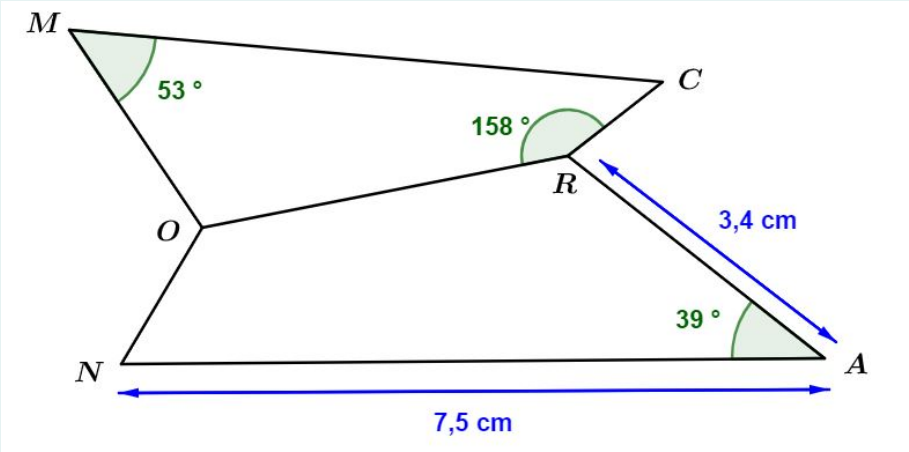




Sur la deuxième situation, l'amorce est le carré intérieur, et sur la troisième l'amorce est le carré extérieur.

Toujours en classe de 6e, en lien avec la symétrie axiale, on a ce type d'exercice.

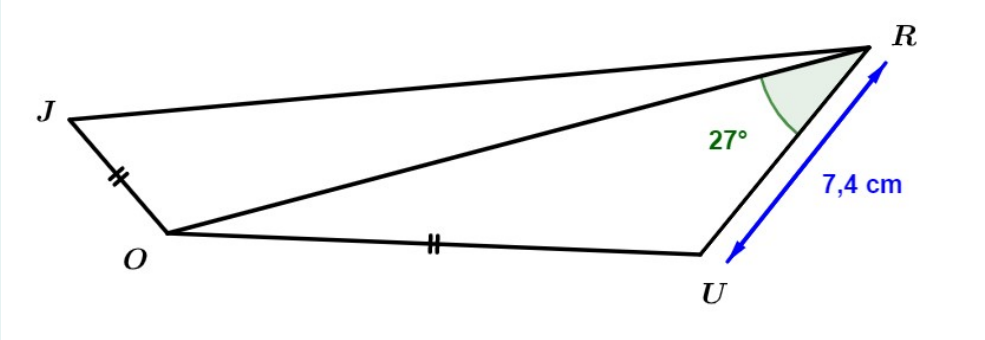
Exercice Construire la figure suivante en vraie grandeur, dans laquelle (OR) est un axe de symétrie.



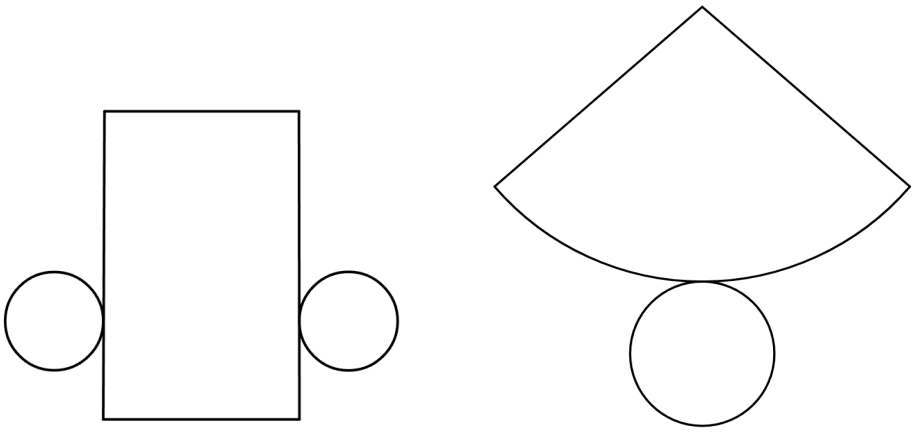
Les informations données sur la figure ne suffisent pas à sa construction. Il est nécessaire de déduire des longueurs et des angles des propriétés de la symétrie axiale.

En classe de cinquième, on a le même type d'exercice, qui utilise cette fois les propriétés du parallélogramme.

Exercice $JOUR$ est un parallélogramme. Construire le figure en vraie grandeur.

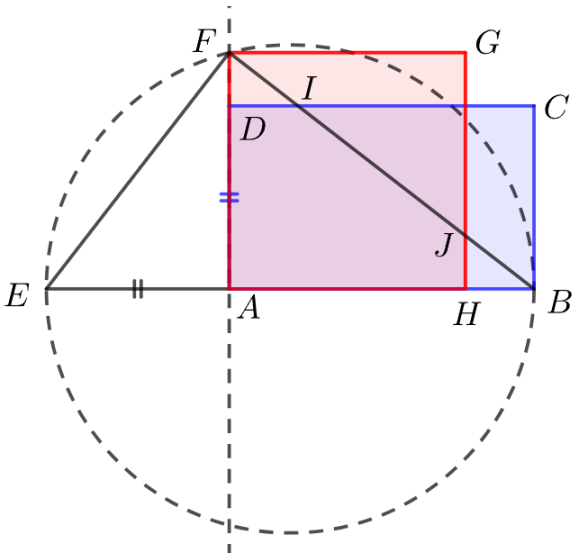


Dans un autre registre, on peut proposer des constructions de patrons de solides. Les cas du cylindre et du cône sont particulièrement intéressants, puisque leur construction passe par le calcul du périmètre de leur base.



Un dernier type de problème abordable à partir de la classe de 4e est la quadrature de polygones, c'est-à-dire la construction d'un carré de même aire qu'un polygone donné. Commençons par la quadrature du rectangle.

On considère un rectangle $ABCD$. On prolonge (AB) et on y place E tel que $AE = AD$, avec E en dehors du rectangle. On trace le cercle de diamètre $[EB]$, puis la perpendiculaire à (AB) passant par A : elle coupe ce cercle en F, du même côté que le point D. On construit ensuite le carré $AFGH$.



Montrons que $ABCD$ et $AFGH$ ont même aire. On note $h = AF$, $a = AD$ et $b = AB$. On montre facilement que $\widehat{AEF} = \widehat{AFB}$ et $\widehat{AFE} = \widehat{ABF}$, en utilisant que les triangles BFE, AEF et AFB sont rectangles. Les triangles AFE et AFB sont alors semblables, donc $\frac{AF}{AE} = \frac{AB}{AF}$, d'où $\frac{h}{a} = \frac{b}{h}$, et $h^2 = ab$. $ABCD$ et $AFGH$ ont donc même aire.

On place I et J à l'intersection de $[BF]$ avec $[CD]$ et $[GH]$ respectivement. Si le rectangle $ABCD$ est trop "long" pour que ces points apparaissent, il suffit de le transformer par découpage en un rectangle de longueur divisée par 2 et de largeur doublée.

Les triangles FDI et JHB sont semblables, ainsi que FGJ et ICB, car ils ont les mêmes angles. De plus, les triangles FDI et ICB sont aussi semblables par le théorème de Thalès, et il en est de même de JHB et FGJ. On a $DI + IC = DC = AB = AH + HB$ avec $\frac{DI}{IC} = \frac{HB}{AH}$, ie $DI = \frac{IC \cdot HB}{AH}$. Ainsi

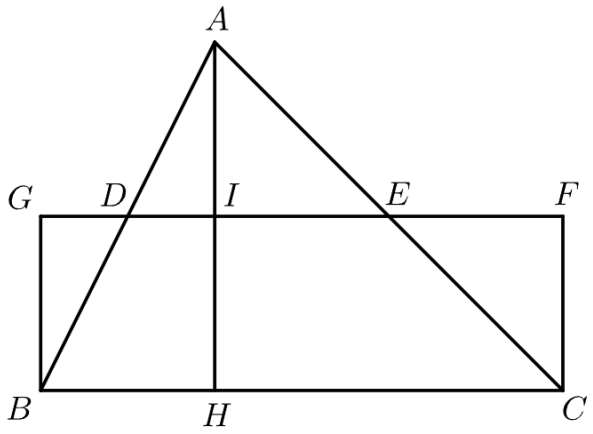
$$\frac{IC \cdot HB}{AH} + IC = AH + HB \Rightarrow IC\left(\frac{AH + HB}{AH}\right) = AH + HB \Rightarrow \frac{IC}{AH} = 1 \Rightarrow IC = AH$$

Ainsi, $IC = AH = FG$, donc les triangles FGJ et ICB sont égaux. On a alors également $DI = DC - CI = AB - AH = HB$, donc les triangles FDI et JHB sont aussi égaux. Cela fournit donc un découpage permettant d'obtenir le carré $AFGH$ à partir du rectangle $ABCD$.

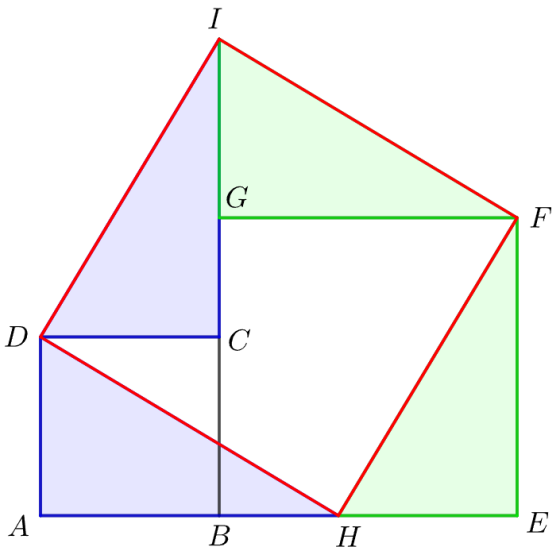
Pour des polygones en général, on a le théorème suivant.

Théorème (Théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien) Deux polygones de même aire sont congrus par découpage.

Démonstration *On considère un polygone quelconque. On commence par le trianguler. En transforme ensuite par découpage chaque triangle en rectangle.*



On considère un triangle ABC tel que $[BC]$ soit son plus grand côté, et l'on trace sa hauteur issue de A. Elle coupe alors $[BC]$ en H. On trace la médiatrice de $[AH]$. Par le théorème de la droite des milieux, elle coupe $[AB]$ en son milieu D et $[AC]$ en son milieu E. En appliquant des symétrie centrales aux triangles AID et AIE, on obtient un rectangle $BCFG$ de même aire que ABC.
Ensuite, on transforme chaque rectangle en carré par le découpage explicité précédemment. On peut maintenant assembler deux à deux ces carrés pour former un nouveau carré, en suivant le découpage suivant.



On considère deux carrés parmi ceux que l'on a obtenu, et on les juxtapose pour former les carrés $ABCD$ et $BEFG$. On suppose que $BE > AB$, et on place $H \in [BE]$ tel que $HE = AB$, puis on trace les triangles rectangles ADH et HFE.
On a $AD = HE$ et $AH = AE - HE = AE - AB = BE = EF$, donc les triangles rectangles ADH et HFE sont égaux. On a donc $DH = HF$. De plus, on a $\widehat{AHD} = \widehat{HFE}$ et $\widehat{ADH} = \widehat{FHE}$, donc $\widehat{DHF} = 180° - \widehat{AHD} - \widehat{FHE} = 90°$.
En appliquant des rotations d'angle $90°$ aux triangles ADH autour de D, et FHE autour de F, on obtient alors un carré $DHFI$ qui est donc congru par découpage à la figure composée des deux carrés juxtaposés.

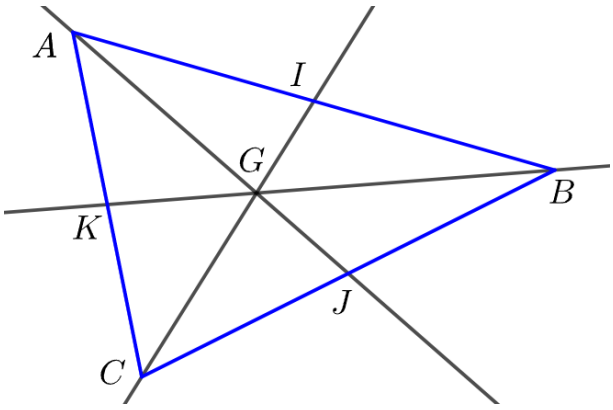
Par conséquent, tout polygone est congru par découpage à un carré de même aire. En superposant les découpages, tous les polygones de même aire sont congrus par découpage. ◈

21.2 Seconde générale et spécialité

Au lycée (hors option maths expertes), on rajoute les vecteurs, les triangles égaux, les résultats sur le triangle rectangle et le cercle circonscrit, ainsi que la notion de projeté orthogonal.

Un problème de construction abordable à l'aide des vecteurs est la construction de l'isobarycentre de trois points non alignés.

Si on considère trois points A, B et C non alignés, on cherche à prouver l'existence et l'unicité d'un point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$. On chercher également un moyen de le construire. On note I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.



Supposons qu'un tel point G existe. On a alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0} \quad \text{par le relation de Chasles}\\ &\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0} \quad \text{car } J \text{ est le milieu de } [BC]\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}\end{aligned}$$

En suivant cette équivalence dans le sens inverse, on montre alors l'existence (et l'unicité) de ce point G, qui est alors situé aux $\frac{2}{3}$ de la médiane $[AJ]$.

Ce raisonnement s'applique également aux deux autres médianes, ce qui prouve leur concourance. Ce point G est également appelé centre de gravité du triangle ABC.

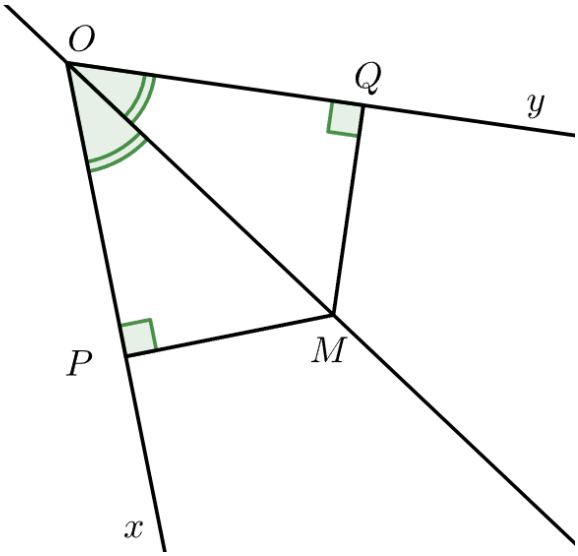
Remarque De manière générale, il est possible de définir le barycentre de $n \geq 2$ points distincts, associé à n réels appelés poids. C'est une formulation qui s'accorde avec celle de centre de gravité.

Au lycée, on dispose du résultat suivant : tout triangle s'inscrit dans un cercle (le cercle circonscrit). Un problème que l'on peut traiter à ce niveau est l'existence, l'unicité et la construction d'un cercle inscrit dans un triangle. On cherche alors un cercle inclus dans un triangle, qui serait tangent à chacun de ses côtés.

Proposition Soit ABC un triangle non aplati. Alors les bissectrices intérieures de ses trois angles sont concourantes en un point I.
Le triangle ABC admet alors un cercle inscrit de centre I et de rayon

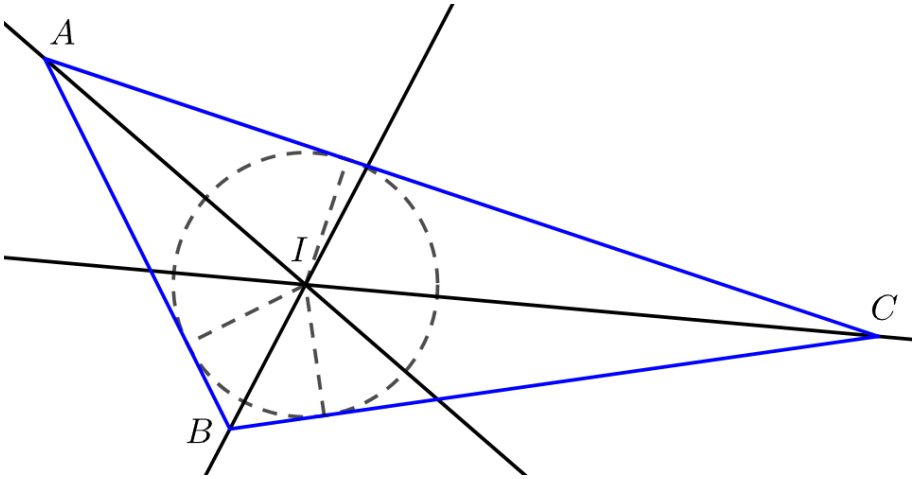
$$R = \frac{2\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{P}(ABC)}$$

Démonstration *Commençons par un résultat intermédiaire. On considère un point O et deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ non confondues. On considère également la bissectrice $\mathcal{D}$ de l'angle que forme ces deux demi-droites.*



Soit $M \in \mathcal{D}$. On appelle P et Q les projetés orthogonaux de M sur $[Ox)$ et $[Oy)$. Comme (OM) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$, on a $\widehat{POM} = \widehat{MOQ}$. Les triangles POM et MOQ sont rectangles en P et Q, et partagent le côté $[OM]$, donc ils sont égaux. En particulier, $MP = MQ$, donc M est à égale distance des demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$.
Réciproquement, tout point M à la même distance de ces deux demi-droites forme alors deux triangles égaux POM et MOQ, donc M est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

Démontrons maintenant le résultat initial. On considère un triangle ABC non aplati et on trace ses trois bissectrices intérieures.



On admet que les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ se coupent en un point I (c'est un résultat dû à la convexité des demi-plans que forme la bissectrice de $\widehat{ABC}$).
D'après le résultat précédent, ce point I est à la même distance de (AC), (AB) et (BC) : il appartient donc également à la troisième bissectrice intérieure du triangle.

Ce point I est à égale distance des trois côtés du triangle, donc il est le centre d'un cercle inscrit dans ce triangle. Il nous reste le résultat sur le rayon de ce cercle à démontrer.

On remarque que le triangle ABC est l'union des triangles AIB, AIC et CIB, donc

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(AIB) + \mathcal{A}(AIC) + \mathcal{A}(CIB)$$

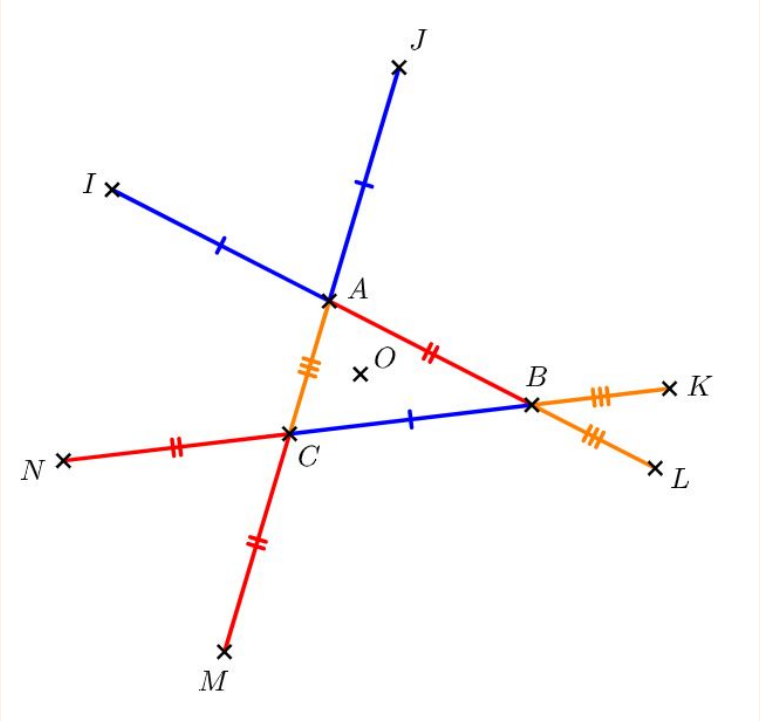
Comme le cercle inscrit est tangent aux trois côtés de ABC, son rayon R est la hauteur de chacun des trois triangles AIB, AIC et CIB. Par conséquent :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \times R \times AB + \frac{1}{2} \times R \times AC + \frac{1}{2} \times R \times BC = R \times \frac{\mathcal{P}(ABC)}{2}$$

d'où le résultat : $R = \frac{2\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{P}(ABC)}$. ◈

Voici également un corollaire de la concourance des bissectrices d'un triangle.

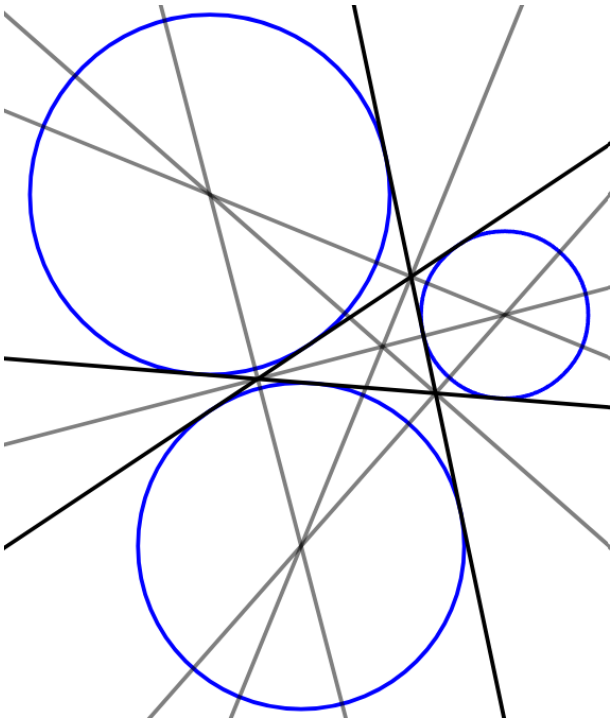
Proposition (Cercle de Conway) On considère la figure suivante, dans laquelle O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, et les points I, A, B, L, les points N, C, B, K et les points M, C, A, J sont alignés.
Alors les points I, J, K, L, M et N sont situés sur un même cercle de centre O.



Démonstration *Le point O est le point de concourance des bissectrices intérieures de ABC. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est aussi celle de l'angle $\widehat{IAJ}$.*
Les triangles AIJ et AML sont isocèles en A, donc cette bissectrice est également la médiatrice des segments $[IJ]$ et $[ML]$. Puisque O est sur cette médiatrice, on a $IO = JO$ et $MO = OL$.
Le même raisonnement sur les autres bissectrices permet de montrer que $IO = JO = KO = LO = MO = NO$, d'où le résultat. ◈

La propriété des points d'une bissectrice d'être à égale distance des deux demi-droites de l'angle en question est également valable pour les bissectrices extérieures d'un triangle.

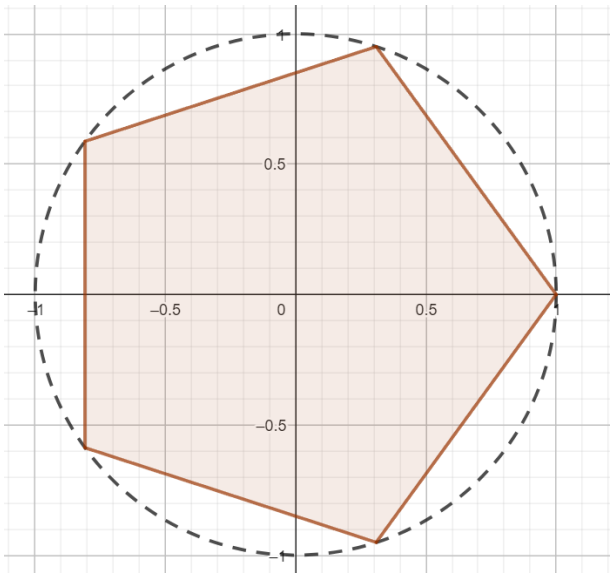
Cela permet de justifier l'existence de trois cercles en dehors du triangle, dits cercles exinscrits, qui sont tangents aux trois droites qui portent ses côtés.



21.3 Terminale maths expertes

L'option maths expertes en terminale permet d'aborder des problèmes de géométrie du point de vue des nombres complexes.

Une des applications classiques des nombres complexes à la géométrie est la construction à la règle et au compas du pentagone régulier convexe. On va les utiliser pour donner une valeur à $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, ce qui va permettre de construire un des sommets du pentagone. On peut alors construire les autres par report de longueur.



On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, de sorte que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

c'est-à-dire

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

On remarque que $z^5 = 1$. Ainsi :

$$z^5 = 1 \Rightarrow z^5 - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = 0 \Rightarrow z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$$

car $z \neq 1$. Comme $z \neq 0$, on a

$$z^4+z^3+z^2+z+1 = 0 \Leftrightarrow z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)-1 = 0$$

Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de $4X^2+2X-1=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 2^2-4\times4\times(-1) = 20 = 4\times5$. Ainsi, les solutions de cette équation sont

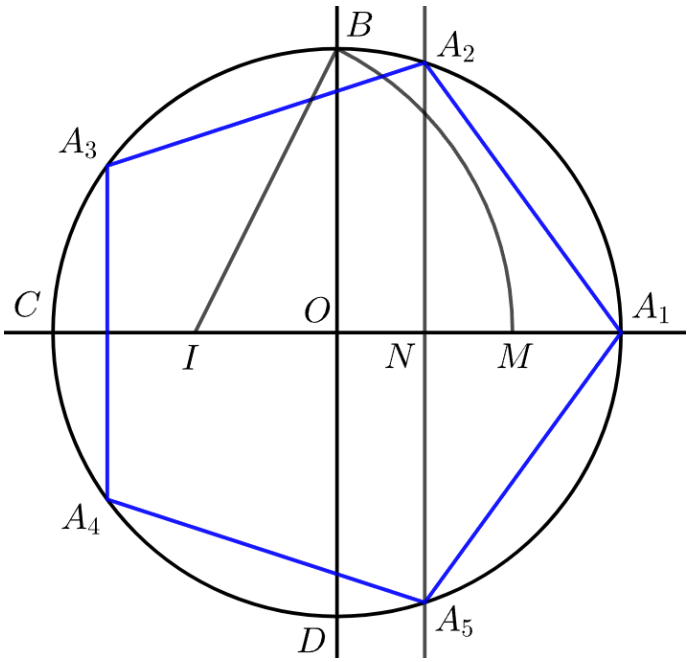
$$x_1 = \frac{-2-2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, on a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

On va maintenant donner les étapes de la construction, puis justifier à l'aide du calcul précédent que l'on obtient bien un pentagone régulier convexe.

- On commence par tracer deux droites perpendiculaires et un cercle de centre leur point d'intersection O. On appelle A_1, B, C et D les points d'intersection de ce cercle avec les deux droites, dans le sens trigonométrique.
- On place le milieu I de $[OC]$.
- Avec le compas, on reporte la longueur IB sur la demi-droite $[IO)$, ce qui place un point $M \in [IO)$ tel que $IB = IM$.
- On place le milieu N de $[OM]$.
- On trace la droite perpendiculaire à (OA_1) passant par N : elle coupe le cercle en A_2 et A_5.
- On reporte ensuite la longueur A_1A_2 deux fois de suite sur le cercle pour placer les points A_3 et A_4.
- Le polygone $A_1A_2A_3A_4A_5$ est alors un pentagone régulier convexe.



On note R le rayon du cercle. On a alors $OI = \frac{R}{2}$ et $OB = R$, donc en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OBI, on obtient que $IB = R\frac{\sqrt{5}}{2} = IM$. Ainsi, $OM = IM - OI = R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $ON = \frac{OM}{2} = R\frac{\sqrt{5}-1}{4} = R\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Cela permet alors de justifier que l'on a bien construit un pentagone régulier convexe.

Les nombres complexes donnent également des équations caractérisant certains objets géométriques.

Proposition Soient A, B deux points d'affixes $a, b \in \mathbb{C}$. Alors la médiatrice de $[AB]$ a pour équation complexe

$$|z - a| = |z - b|$$

Démonstration *Il suffit d'utiliser la caractérisation des points de la médiatrice de $[AB]$ comme points équidistants de A et B.* ◈

Proposition L'équation complexe d'une droite est de la forme

$$\omega\overline{z} + \overline{\omega}z = k$$

avec $\omega \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration *Dans $\mathbb{R}^2$, on sait qu'une équation de droite est de la forme $ax + by = c$ avec a, b, c des réels. On fait correspondre chaque point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ au complexe $z = x + iy$. On remarque alors que*

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = x \quad \textit{et} \quad \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{1}{2i}(x + iy - x + iy) = y$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} ax + by = c &\Leftrightarrow a\frac{z+\overline{z}}{2} + b\frac{z-\overline{z}}{2i} = c \\ &\Leftrightarrow a(z+\overline{z}) - ib(z-\overline{z}) = 2c \\ &\Leftrightarrow z(a-ib) + \overline{z}(a+ib) = 2c \end{aligned}$$

En notant $\omega = a + ib$ et $k = 2c$, on a bien le résultat voulu. ◈

Proposition Le cercle (respectivement le disque) de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ a pour équation complexe

$$|z - \omega| = r \quad \text{(respectivement, } |z - \omega| \leq r\text{)}$$

Démonstration *Il suffit d'utiliser la caractérisation d'un cercle et d'un disque par la distance avec le centre.* ◈

Proposition Le cercle de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ a pour équation complexe :

$$z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z = r^2 - |\omega|^2$$

Démonstration *On utilise la caractérisation précédente :*

$$\begin{aligned} |z - \omega| = r &\Leftrightarrow |z - \omega|^2 = r^2 \quad \textit{car les quantités sont positives} \\ &\Leftrightarrow (z-\omega)\overline{(z-\omega)} = r^2 \\ &\Leftrightarrow (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega}) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{z} - \omega\overline{z} - \overline{\omega}z = r^2 - |\omega|^2 \end{aligned}$$

◈

Donnons une dernière utilisation des nombres complexes à la construction de polygones. On considère n point fixés $A_1, \dots, A_n$ et l'on cherche à construire un polygone à n côtés, dont les milieux sont les points $A_1, \dots, A_n$.

On note $a_1, \dots, a_n$ les affixes des points $A_1, \dots, A_n$. On cherche alors des affixes $z_1, \dots, z_n$ de points $M_1, \dots, M_n$ tels que

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ z_2 + z_3 = 2a_2 \\ \quad \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n + z_1 = 2a_n \end{cases}$$

Si l'on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes de ce système, on effectue l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + \dots + (-1)^{n+1} L_n$. La première équation devient alors

$$\Big(1 + (-1)^{n+1}\Big) z_1 = 2\Big(a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n+1} a_n\Big)$$

On distingue maintenant selon la parité de n.

- ❖ Si n est pair, cette équation devient

  $$a_1 - a_2 + \dots - a_n = 0$$

  Si cette condition n'est pas vérifiée, il n'existe alors pas de solution.
  Si elle est vérifiée, les $n-1$ autres équations forment un système à n inconnues. En choisissant z_1 comme paramètre, on peut exprimer z_n en fonction de z_1, puis z_{n-1} en fonction de z_1, etc. jusqu'à z_2 en fonction de z_1. Il existe alors une infinité de solutions, et dès lors que l'on fixe z_1, on peut retrouver les autres points un par un.
- ❖ Si n est impair, la première équation donne

  $$z_1 = a_1 - a_2 + \dots + a_n$$

  Cette affixe z_1 est donc fixée, et en utilisant les $n-1$ autres équations on en déduit $z_n, z_{n-1}, \dots, z_2$ de proche en proche. Il existe alors une unique solution.

22 Exemples de problèmes d'alignement, de parallélisme

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** variable selon les applications

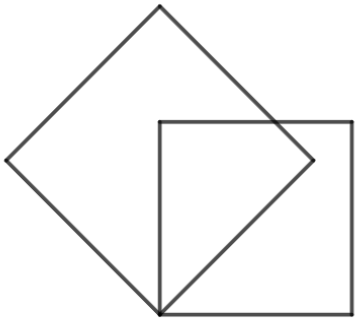
22.1 Cycle 4

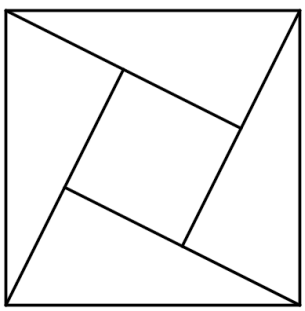
22.1.1 Restauration de figures

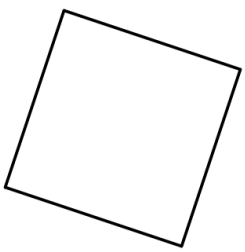
Le but de la restauration de figure est de restaurer une figure modèle à partir d'une amorce donnée (souvent de taille différente).

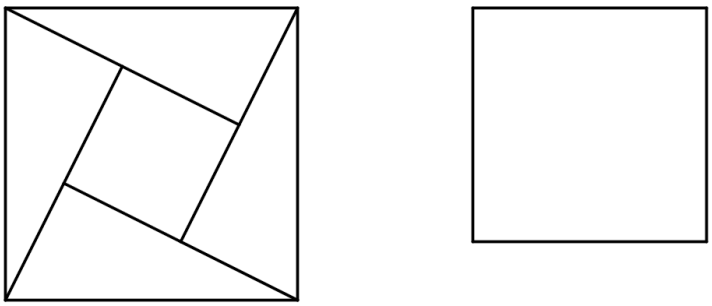
C'est un type de tâche rencontrée en classe de 6e (voire avant), dont le but est de faire évoluer la perception des figures géométriques, en cherchant des alignements et des points d'intersection. Cela favorise la déconstruction dimensionnelle.

Voici quelques exemples, avec le modèle à gauche et l'amorce à droite.









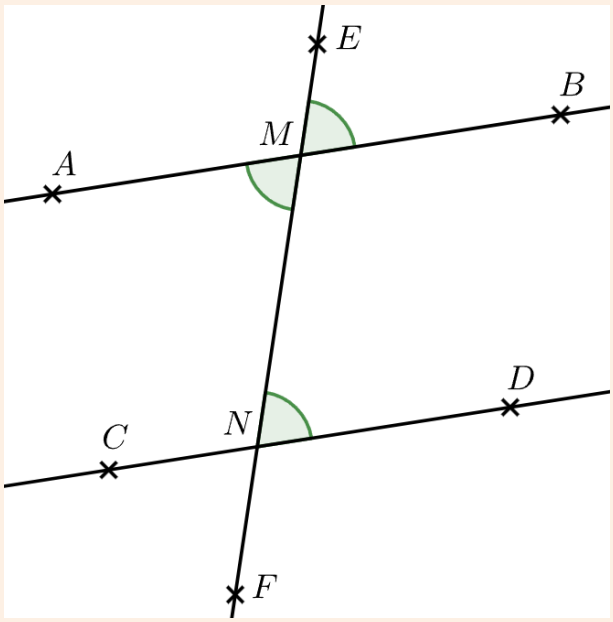
Sur la deuxième situation, l'amorce est le carré intérieur, et sur la troisième l'amorce est le carré extérieur.

22.1.2 Angles

À partir de la classe de 5e, on dispose d'outils supplémentaires pour étudier l'alignement et le parallélisme : les angles alternes-internes et les angles correspondants.

Commençons par rappeler les résultats suivants.

Proposition (admise) On considère deux droites (AB) et (CD) toutes deux coupées par une droite (EF). On note M et N les points d'intersection de (EF) avec (AB) et (CD).



Alors

- Les angles alternes-internes $\widehat{MND}$ et $\widehat{AMN}$ sont égaux si, et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- Les angles correspondants $\widehat{MND}$ et $\widehat{EMB}$ sont égaux si, et seulement si, les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Remarques

- Les deux points à démontrer sont équivalents puisque les angles $\widehat{AMN}$ et $\widehat{EMB}$ sont opposés par le sommet, donc égaux.
- Cette proposition est en réalité équivalente au cinquième postulat d'Euclide, que l'on peut formuler sous la forme de l'axiome des parallèles : "Pour une droite donnée et un point en dehors de celle-ci, il existe une unique droite parallèle à la droite donnée passant par ce point". Ainsi, cette proposition peut prendre le rôle d'axiome.

❖ Elle est d'ailleurs également équivalente à la suivante : "la somme des trois angles d'un triangle est un angle plat". Toute tentative de démonstration avec cette propriété (ou par symétrie centrale également) revient à une démonstration "circulaire".

On peut proposer de nombreux exercices faisant intervenir cette propriété, ou son équivalence par la somme des angles d'un triangle.

On peut par exemple essayer d'étendre cette propriété des angles d'un triangle à n'importe quel polygone convexe.

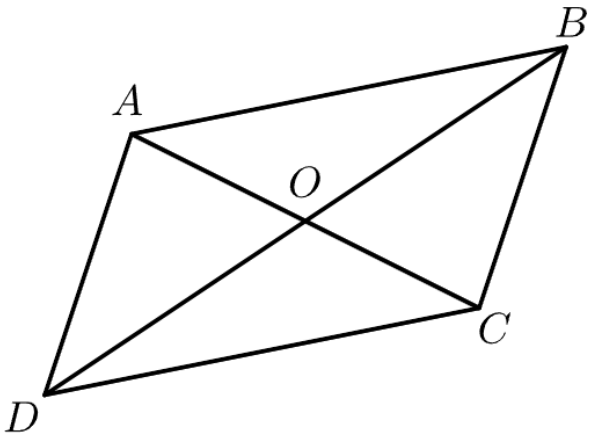
Proposition La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut $(n-2)\times 180°$.

Démonstration *On considère un polygone convexe à n côtés. Si l'on considère deux côtés adjacents, et que l'on trace le segment reliant les deux extrémités non adjacentes, on forme un triangle. Comme le polygone est convexe, ce segment se situe à l'intérieur du polygone, ce qui le partage en l'union d'un triangle et d'un polygone à $n-1$ côtés.*
On peut alors procéder par récurrence à partir du cas $n=3$. ◈

22.1.3 Quadrilatères

Proposition Les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu si, et seulement si, ses côtés opposés sont parallèles et de même longueur.
Dans ce cas, on dit que ce parallélogramme est un parallélogramme.

Démonstration *On considère un quadrilatère $ABCD$.*
Supposons que $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu O. On a alors $\widehat{AOB}=\widehat{COD}$, $AO=OC$ et $BO=OD$, donc les triangles AOB et COD sont égaux. Par conséquent, les angles alternes-internes $\widehat{BAO}$ et $\widehat{OCD}$ sont égaux, et les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueur. En suivant le même raisonnement dans les triangles AOD et BOC, on montre que les côtés $[BC]$ et $[AD]$ sont parallèles et de même longueur.

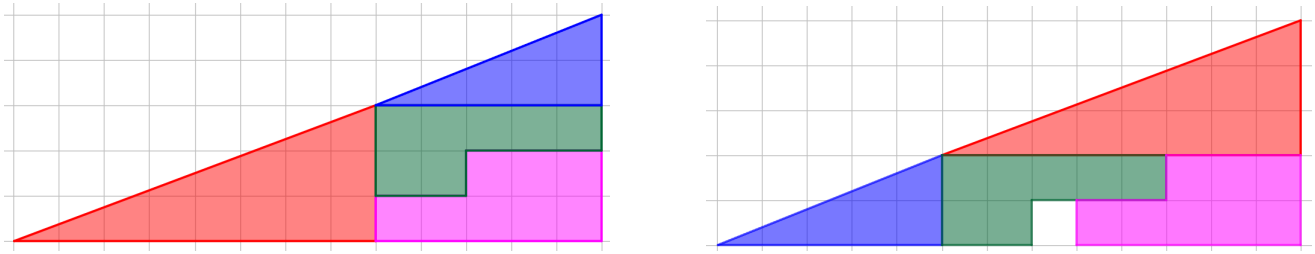


Réciproquement, supposons que les côtés opposés de $ABCD$ sont parallèles et de même longueur. Alors $ABCD$ est convexe, donc on peut considérer le point d'intersection O de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Comme les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles, on a $\widehat{OAB}=\widehat{OCD}$ et $\widehat{OBA}=\widehat{ODC}$. Comme de plus, $AB=CD$, les triangles AOB et COD sont égaux. Par conséquent, $AO=OC$ et $BO=OD$, donc O est le milieu commun de $[AC]$ et $[BD]$. ◈

Cette caractérisation permet de démontrer facilement que des droites sont parallèles.

22.1.4 Théorème de Thalès

Un autre problème d'alignement bien connu est celui du paradoxe de Lewis Carroll. On considère le découpage suivant.



Les deux découpages semblent s'inscrivent dans un même triangle rectangle, ce qui semble paradoxal. On peut expliquer ce paradoxe à l'aide du théorème de Thalès.

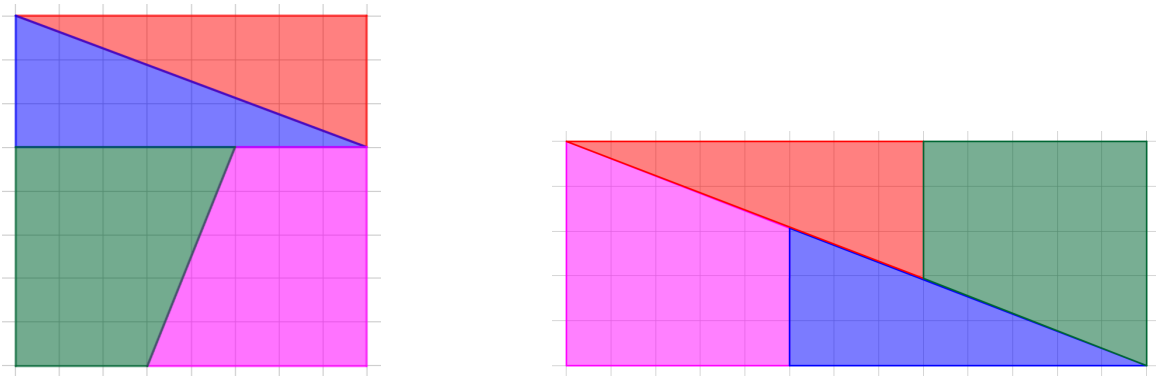
Ces découpages s'inscrivent dans un même triangle si, et seulement si, les triangles bleu et rouge sont semblables, ce qui garantit que leurs hypoténuses sont alignées. Par le théorème de Thalès, cela est vrai si, et seulement si, les rapports de leurs longueurs sont égaux. Dans ce cas, cela donne :

$$\frac{8}{3} = \frac{5}{2}$$

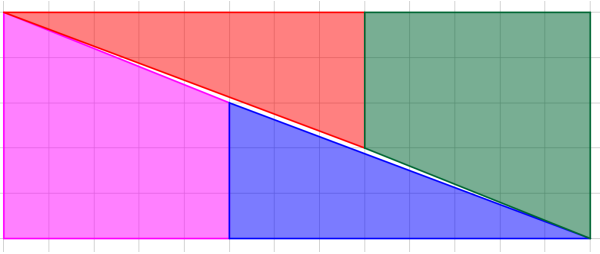
ce qui est faux car $8 \times 2 = 16$ et $3 \times 5 = 15$.

Ces deux triangles ne sont donc pas semblables. On en déduit que les deux découpages ne s'inscrivent pas exactement dans un même triangle : l'un est convexe et "dépasse" et l'autre est concave et présente un "creux.

Une autre variant due à Sam Loyd est le découpage suivant :



Le carré a pour aire 64 et le rectangle a pour aire 65. Les mêmes calculs montrent que les 4 points de la "diagonale" du rectangle ne sont en réalité pas alignés. Le découpage réel ressemble plutôt au suivant :



C'est cette "partie manquante" au milieu qui explique la différence d'aire. Celle-ci est assez fine pour ne pas se voir lors d'un tracé à la main ou d'un découpage sur papier.

Remarque Ce paradoxe est lié au fait que les rapports $\frac{8}{3}$ et $\frac{5}{2}$ sont proches. On remarque que ce sont les rapports entre des termes de la suite de Fibonacci espacés de deux rangs. Le prochain rapport serait alors $\frac{13}{5}$, qui est celui du grand triangle !
Il est en effet possible de montrer que ce type de rapport converge vers le réel $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ surnommé "nombre d'or", qui est lié de près à cette suite de Fibonacci.
On pourrait alors produire d'autres paradoxes de ce même type, avec des écarts de convexité/concavité encore plus faibles.

22.2 Lycée

22.2.1 Vecteurs

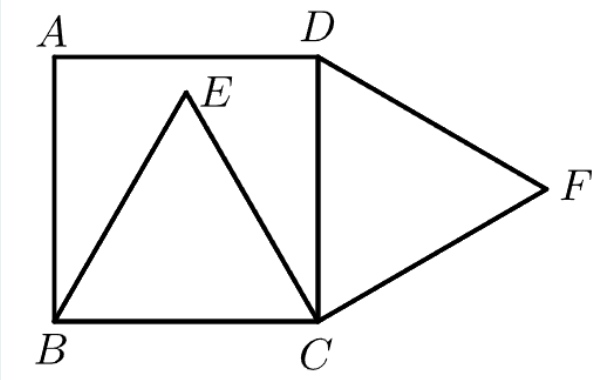
Commençons par rappeler quelques résultats sur les vecteurs et l'alignement, le parallélisme.

Proposition
- ❖ Soient A, B, C trois points distincts du plan. Alors A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- ❖ Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan. Alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- ❖ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires si, et seulement si, leur déterminant est nul.

Démonstration
- ❖ *Si A, B, C sont alignés, alors en munissant la droite (AB) du repère gradué $(A, \overrightarrow{AB})$, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Ces vecteurs sont donc colinéaires.*
  Réciproquement, s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$, alors $C \in (AB)$, donc A, B, C sont alignés.
- ❖ *Il suffit de faire subir aux points C et D une translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$, ce qui n'influe ni sur le parallélisme ni sur la colinéarité. On se ramène ainsi au cas du point précédent.*
- ❖ *On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ les coordonnées de ces deux vecteurs dans un repère orthonormé, de sorte que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$. Alors $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$. Ainsi*
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = x\lambda y - \lambda xy = 0$$
  Réciproquement, supposons que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire que $xy' = x'y$. Si $x' = 0$, alors $x = 0$ ou $y' = 0$. Comme $\vec{v}$ est non nul, nécessairement $x = 0$. Dans ce cas, on a $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\y'\end{pmatrix}$, donc ces vecteurs sont colinéaires. De même, si $y' = 0$ ces deux vecteurs sont colinéaires.
  Si x' et y' sont non nuls, alors on a $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \lambda$, donc $\vec{u} = \lambda\vec{v}$, et ces vecteurs sont colinéaires.

◈

Exercice On considère la figure suivante, dans laquelle $ABCD$ est un carré, BCE et CDF sont des triangles équilatéraux. Démontrer que les points A, E et F sont alignés.



On se place dans le repère orthonormé $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$. Dans ce repère, on a les coorodnnées suivantes : $A(0,1)$, $B(0,0)$, $C(1,0)$, $D(1,1)$. Par le théorème de Pythagore, la hauteur d'un des triangles équilatéraux de la figure est $\sqrt{1^2 - \frac{1^2}{2^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, on a les coordonnées $E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. On en déduit que

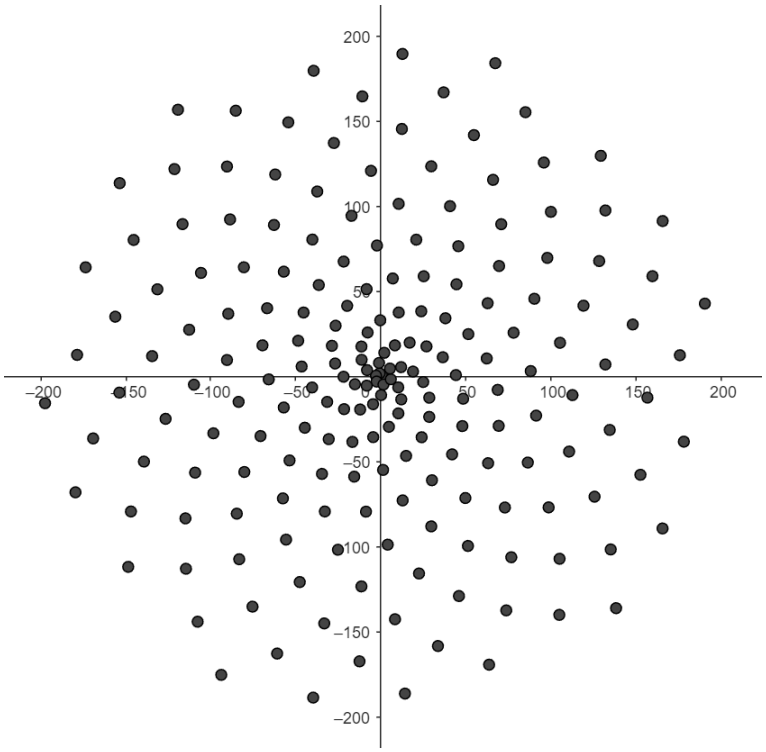
$$\det\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \times \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 0$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont colinéaires, et les points A, E et F sont alignés.

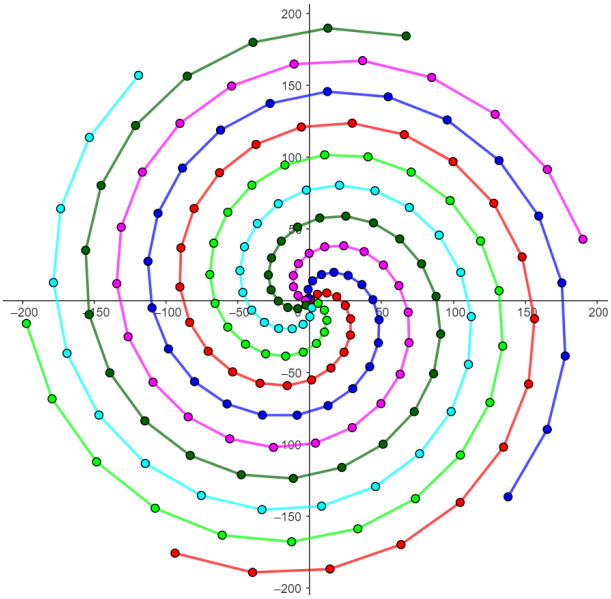
Voici un autre problème faisant intervenir des alignements, ou en l'occurrence des "presque-alignements". Celui-ci est très largement inspiré de la vidéo suivante de la chaîne YouTube 3Blue1Brown :

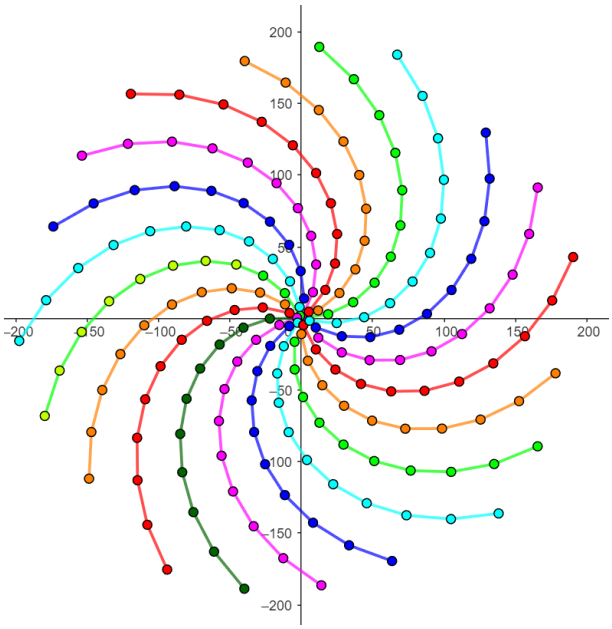
https://www.youtube.com/watch?v=EK32jo7i5LQ.

On considère un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ dans lequel on affiche les points M_n de coordonnées polaires (n, n), où n est un entier naturel. Cela signifie que $OM = n$ et $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = n$ radians. En coordonnées cartésiennes, cela s'écrit $M_n\Big(n\cos(n), n\sin(n)\Big)$. En plaçant de nombreux points de ce type, on obtient ce type de représentation :



En examinant de plus près, on peut apercevoir que certaines ligne brisées forment des spirales.





On peut alors se demander : quel phénomène explique l'apparition de ces spirales ? Commençons par le premier cas avec 6 branches.

On a $M_0 = O$, $M_6\Big(6\cos(6), 6\sin(6)\Big)$ et $M_{12}\Big(12\cos(12), 12\sin(12)\Big)$. L'angle $\Big(\overrightarrow{OM_6}, \overrightarrow{OM_{12}}\Big)$, qui est l'angle de décalage d'une ligne brisée, vaut

$$\Big(\overrightarrow{OM_6}, \overrightarrow{OM_{12}}\Big) = \Big(\overrightarrow{OM_6}, \overrightarrow{OI}\Big) + \Big(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_{12}}\Big) = 12 - 6 = 6$$

exprimé en radians. Or, 6 est proche de $2\pi \approx 6,28$, donc cet angle de décalage est proche d'un tour complet. En effet, on a l'approximation $\pi \approx \frac{6}{2} = 3$.

Cela signifie que tous les 6 points placés, l'on a presque réalisé un tour complet, d'où ce motif en 6 spirales.

Dans le second cas, on a 19 spirales. Avec le même raisonnement, on a

$$\Big(\overrightarrow{OM_{19}}, \overrightarrow{OM_{38}}\Big) = \Big(\overrightarrow{OM_{19}}, \overrightarrow{OI}\Big) + \Big(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_{38}}\Big) = 38 - 19 = 19$$

On a de plus, $6\pi \approx 18,85 \approx 19$, donc $\pi \approx \frac{19}{6}$. Cela signifie qu'au bout de 19 points placés, on a fait un peu plus de 3 tours, d'où ce motif en 19 spirales.

Ce type de motif est donc dû à des approximations rationnelles de π, qui induisent des "presque-alignements" périodiques. En particulier, l'irrationnalité de π fait que l'on obtiendra toujours des spirales de cette sorte, et pas des lignes droites.

On peut observer un autre fait intéressant : il semble qu'aucun point (hormis O) ne se trouve sur l'axe des abscisses ou des ordonnées. Démontrons cela.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que M_n appartienne à l'axe des abscisses ou des ordonnées. Comme M_n a pour coordonnées cartésiennes $\Big(n\cos(n), n\sin(n)\Big)$, on a $\cos(n) = 0$ ou $\sin(n) = 0$. On en déduit que $n \equiv 0[\pi]$ ou $n \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, c'est-à-dire que $n \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$. Cela implique qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = \frac{\pi}{2}k$, donc que $\pi = \frac{n}{2k}$. Or, π est irrationnel, donc cela est impossible.

Les points qui sont proches de l'axe des abscisses ou de l'axe des ordonnées donnent par contre des approximations rationnelles de π. Par exemple, le point M_{44} se situe proche de l'axe des abscisses. En examinant d'un peu plus près, on remarque qu'il a fallu presque 7 tours pour arriver à ce point, d'où $7 \times 2\pi \approx 44$ et $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Ce problème donne donc une certaine interprétation graphique de l'irrationnalité de π et de ses approximations rationnelles, à travers un problème d'alignement.

22.2.2 Dans l'espace

Définition Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace. On dit qu'elles sont :

- coplanaires, si elles sont incluses dans un même plan.
- parallèles, si elles sont coplanaires et d'intersection vide.
- confondues, si $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
- sécantes, si elles sont coplanaires, non parallèles et non confondues.

Remarque Deux droites de l'espace coplanaires sont donc parallèles, ou confondues, ou sécantes.

Proposition Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou confondues si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Démonstration ($\Longrightarrow$) *Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, le résultat est trivial. Supposons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles. Il existe alors un plan $\mathcal{P}$ les contenant. Quitte à opérer un changement de variable, on peut supposer que ce plan est $\mathbb{R}^2$, auquel cas les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent des équations réduites :*

$$\mathcal{D} \ : \ y = ax + b$$
$$\mathcal{D}' \ : \ y = a'x + b'$$

avec a, b, a', b' réels. Dans ce cas, les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement. On remarque qu'un point $M(x,y)$ appartient à $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ si, et seulement si, $ax+b = a'x+b'$, c'est-à-dire $x(a-a') = b'-b$. Si $a \neq a'$, un tel point M existe donc, ce qui contredit le parallélisme de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Par conséquent, $a = a'$, et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent des vecteurs directeurs colinéaires.

($\Longleftarrow$) *On considère deux points $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et un réel λ tels que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(B, \lambda\overrightarrow{u})$.*

- *Si $B \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.*
- *Supposons que $B \notin \mathcal{D}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $C \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Si l'on note (x,y,z) ses coordonnées, il existe alors des réels α, β tels que*

$$(x,y,z) = (x_A, y_A, z_A) + \alpha(a,b,c)$$
$$(x,y,z) = (x_B, y_B, z_B) + \beta\lambda(a,b,c)$$

On en déduit que

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_A, y_A, z_A) + (\alpha - \beta\lambda)(a,b,c)$$

et donc que $B \in \mathcal{D}$, ce qui n'est pas. Par conséquent, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$.

On considère le plan $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$. On a alors $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, et $B \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$. Ces droites sont donc coplanaires.

Au final, elles sont bien confondues, ou parallèles. ◈

Proposition Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes ont exactement un point d'intersection.

Démonstration *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes. Elles sont alors coplanaires et non parallèles, donc elles admettent un point d'intersection. Supposons qu'elles admettent au moins deux points d'intersection distincts $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. On considère un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$.*

On a alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$, donc il existe un réel λ tel que

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(a, b, c)$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \lambda\overrightarrow{u}$$

donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$.
Le même raisonnement montre que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$, et donc que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. Or, ces droites sont sécantes, donc non confondues. On en déduit qu'elles n'ont qu'un seul point d'intersection. ◈

Définition Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace. On dit qu'ils sont :

- ❖ parallèles si ils sont d'intersection vide.
- ❖ confondus si $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.
- ❖ sécants sinon.

Proposition (admise) L'intersection de deux plans sécants est une droite de l'espace.

Proposition (admise) Deux plans sont parallèles ou confondus si, et seulement si, ils admettent un vecteur normal en commun.

Théorème (Théorème du toit) Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans sécants, et soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}'$ deux droites parallèles. Alors l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est une droite parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Démonstration *On note $\mathcal{D}''$ l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.*
Supposons par l'absurde que $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles. On note $\mathcal{P}''$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (qui existe car ces droites sont parallèles). Comme $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}$ sont coplanaires et non parallèles, elles admettent un point d'intersection I.
Celui-ci est alors un point de $\mathcal{D}''$, donc il est dans les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Il est également dans $\mathcal{D}$, donc il est dans le plan $\mathcal{P}''$. Ainsi, I appartient à l'intersection des plans $\mathcal{P}''$ et $\mathcal{P}'$, c'est-à-dire $\mathcal{D}'$. Dans ce cas, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un point en commun, ce qui contredit le fait qu'elles sont parallèles. ◈

22.2.3 Nombres complexes

Proposition Soient 4 points A, B, C et D distincts d'affixes respectives $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Alors

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

Démonstration *On se place dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$. *On a*

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OI}\right) + \left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{CD}\right) = -\arg(b-a) + \arg(d-c) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$$

◈

Cette proposition permet de donner une caractérisation calculatoire par les complexes de l'alignement ou du parallélisme, ce qui peut s'avérer très pratique. Voici un exemple :

Exercice On considère une suite $(z_n)_n$ de nombres complexes définie par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ quelconque et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{i}{2} z_n + 5$. On considère également le point A d'affixe $z_A = 4 + 2i$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on notera M_n le point d'affixe z_n.

1. Montrer que la suite $(z_n - z_A)_n$ est géométrique.

2. En déduire une expression de z_n en fonction de n.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

1. On remarque que

$$\frac{i}{2} z_A + 5 = \frac{i}{2}(4+2i) + 5 = 2i - 1 + 5 = 4 + 2i = z_A$$

Ainsi, z_A est un point fixe de $z \mapsto \frac{i}{2} z + 5$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} - z_A = \frac{i}{2} z_n + 5 - \left(\frac{i}{2} z_A + 5\right) = \frac{i}{2}(z_n - z_A)$$

Ainsi, la suite $(z_n - z_A)_n$ est géométrique de raison $\frac{i}{2}$.

2. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_n - z_A = z_0 \times \left(\frac{i}{2}\right)^n$$

et donc que

$$z_n = z_0 \frac{i^n}{2^n} + 4 + 2i$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{AM_n}, \overrightarrow{AM_{n+4}}\right) &= \arg\left(\frac{z_{n+4} - z_A}{z_n - z_A}\right) \\
&= \arg\left(\frac{z_0 \frac{i^n}{2^n}}{z_0 \frac{i^{n+4}}{2^{n+4}}}\right) \\
&= \arg\left(\frac{2^4}{i^4}\right) \\
&= \arg\left(2^4\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

23 Exemples de problèmes d'intersection en géométrie

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** droites remarquables dans le triangle, géométrie repérée, droites et plans de l'espace, parallélogrammes, théorème de la droite des milieux

23.1 Dans le plan

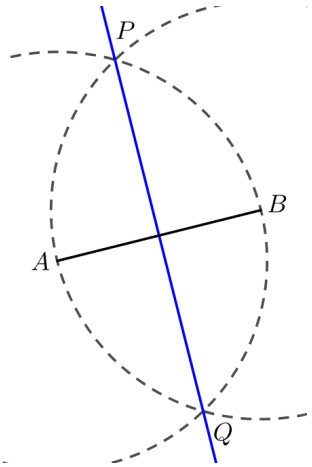
23.1.1 Construction à la règle et au compas

La géométrie euclidienne telle qu'elle est conçue par Euclide n'autorise que deux types de constructions instrumentées : on peut construire une droite passant par deux points distincts donnés, et on peut tracer un cercle de centre connu et passant par un point. Ces deux constructions correspondent respectivement à l'utilisation de la règle non graduée et du compas.

Toute la géométrie construite dans les Éléments d'Euclide se fait à partir de ces deux outils et de cinq axiomes. Tout point se construit alors comme intersection de droites et/ou de cercles.

Donnons un exemple avec la construction à la règle et au compas de la médiatrice d'un segment.

On considère un segment $[AB]$ donné. On trace les cercles de centre A et B et de rayon AB. Comme $AB > \frac{AB}{2}$, ces deux cercles se coupent en deux points distincts P et Q. On trace alors la droite (PQ), qui est la médiatrice du segment $[AB]$.



Puisque la médiatrice de $[AB]$ est une droite, il suffit pour la construire de construire deux points distincts de celle-ci, puis de tracer la droite passant par ces deux points. Comme P et Q sont à la même distance AB de A et B, ils sont sur la médiatrice de $[AB]$.

Cette construction en entraîne d'autres réalisables à la règle et au compas : placer le milieu d'un segment, tracer des droites perpendiculaires et parallèles passant par des points donnés, etc.

23.1.2 Droites remarquables d'un triangle

Définition On considère un triangle ABC.

- On appelle médiatrices de ABC les médiatrices de ses trois côtés, c'est-à-dire les droites perpendiculaires à ces côtés passant par leur milieu.
- On appelle hauteurs de ABC les trois droites perpendiculaires à ses côtés et passant par le sommet opposé.
- On appelle médianes de ABC les trois droites passant par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé.
- On appelle bissectrices de ABC les bissectrices intérieures de ses trois angles, c'est-à-dire les droites qui partagent ces angles en deux angles égaux.

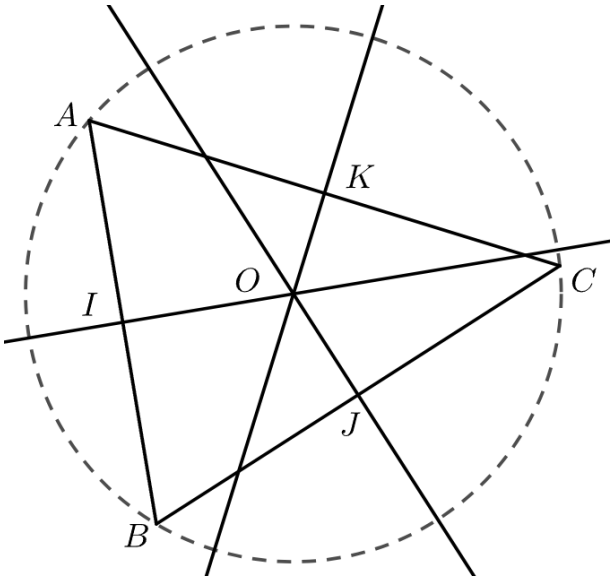
Rappelons quelques propriétés :

- La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points situés à égale distance de ses deux extrémités.
- Toute médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.
- La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points situés à égale distance de ses deux côtés.

Ces droites remarquable ont certaines propriétés de concourance.

Proposition Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Démonstration *On considère un triangle ABC. On considère les médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$. Si elles sont parallèles, alors il en est de même des côtés $[AB]$ et $[BC]$, ce qui n'est pas. On peut donc considérer le point d'intersection O de ces deux médiatrices. On a alors $OA = OB = OB$, donc O est sur la troisième médiatrice, ce qui prouve leur concourance.*

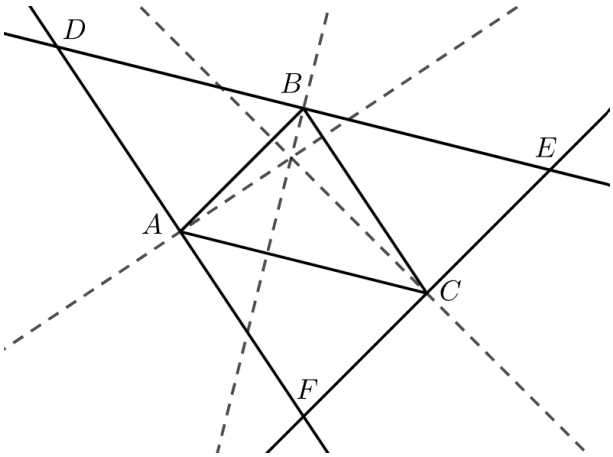


◈

Remarque Comme $OA = OB = OC$, les points A, B et C sont tous sur un même cercle de centre O, appelé cercle circonscrit au triangle ABC. Le point O porte alors souvent le nom de centre du cercle circonscrit.
Cela démontre d'ailleurs que par trois points non alignés il passe un et un seul cercle.

Proposition Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Démonstration *On considère un triangle ABC. On trace la parallèle à chaque côté passant par le sommet opposé, ce qui forme un triangle DEF. Dans ce cas, les quadrilatères $DABC$, $ABEC$ et $BAFC$ ont des côtés deux à deux parallèles, donc sont des parallélogrammes. On en déduit que A, B et C sont les milieux respectifs de $[DF]$, $[DE]$ et $[EF]$. Ainsi, les hauteurs de ABC sont les médiatrices de DEF, donc sont concourantes.*

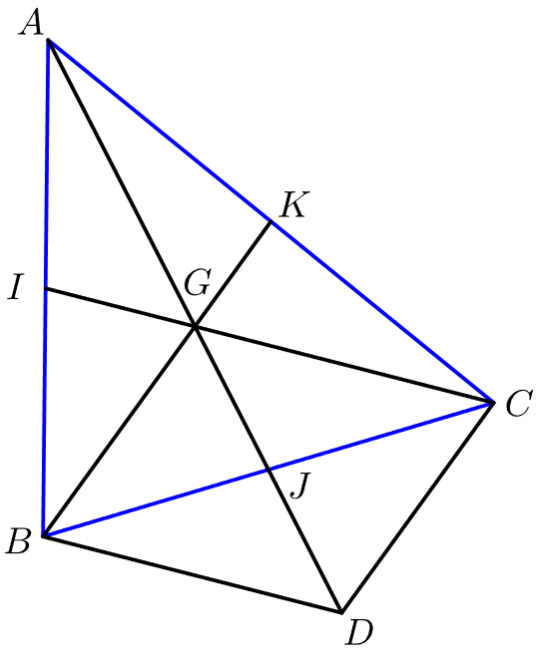


◈

Remarque Le point de concourance des hauteurs d'un triangle est appelé orthocentre de ce triangle.

Proposition Les trois médianes d'un triangles sont concourantes.

Démonstration *On considère un triangle ABC. On note I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$. Les médianes (BK) et (CI) se coupent en un point G intérieur au triangle (par des arguments de convexité). On appelle D le symétrique de A par rapport à G.*

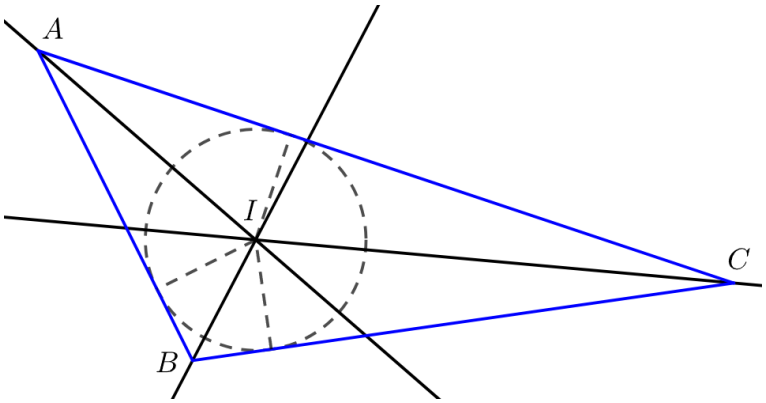


On remarque que I est le milieu de $[AB]$ et G le milieu de $[AD]$. Par le théorème de la droite des milieux, on en déduit que (IG) et (BD) sont parallèles. En procédant de même dans le triangle ACD, on montre que (KG) et (CD) sont parallèles.
Ainsi, $BGCD$ est un parallélogramme. On en déduit que le milieu J de $[BC]$ est également le milieu de $[GD]$. En particulier, $(AG) = (GJ)$, donc G est sur la médiane (AJ). Cela prouve le résultat. ◈

Remarque Ce point de concourance des médianes porte le nom de centre de gravité du triangle. En effet, il vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Proposition Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.

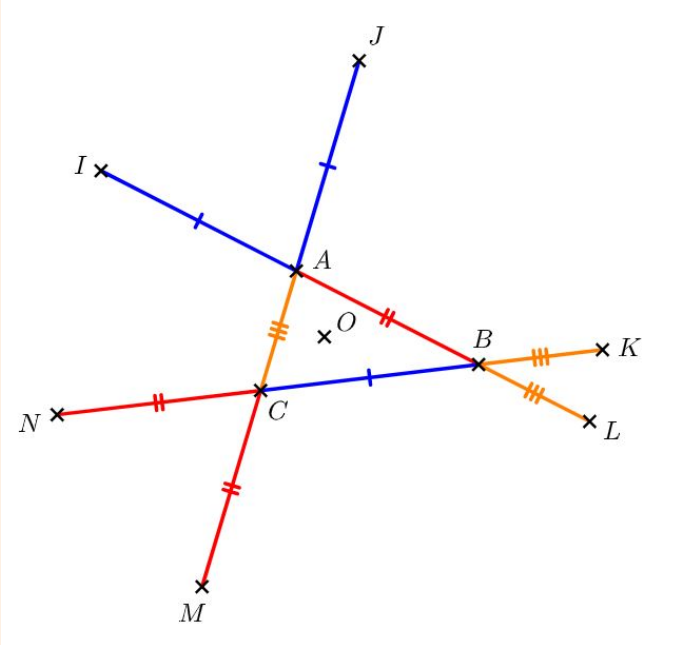
Démonstration *On considère un triangle ABC. Les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ se coupent en un point I (par des arguments de convexité). Ce point I est alors à égale distance des trois côtés du triangle : il appartient donc à la bissectrice de $\widehat{ABC}$, ce qui prouve le résultat.*



◈

Remarque Cela justifie l'existence et l'unicité d'un cercle inclus dans le triangle qui soit tangent à ses trois côtés. Il porte le nom de cercle inscrit, et le point I est appelé centre du cercle inscrit.

Proposition (Cercle de Conway) On considère la figure suivante, dans laquelle O est le centre du cercle inscrit au triangle ABC, et les points I, A, B, L, les points N, C, B, K et les points M, C, A, J sont alignés. Alors les points I, J, K, L, M et N sont situés sur un même cercle de centre O.



Démonstration *Le point O est le point de concourance des bissectrices intérieures de ABC. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est aussi celle de l'angle $\widehat{IAJ}$.*
Les triangles AIJ et AML sont isocèles en A, donc cette bissectrice est également la médiatrice des segments $[IJ]$ et $[ML]$. Puisque O est sur cette médiatrice, on a $IO = JO$ et $MO = OL$.
Le même raisonnement sur les autres bissectrices permet de montrer que $IO = JO = KO = LO = MO = NO$, d'où le résultat. ◈

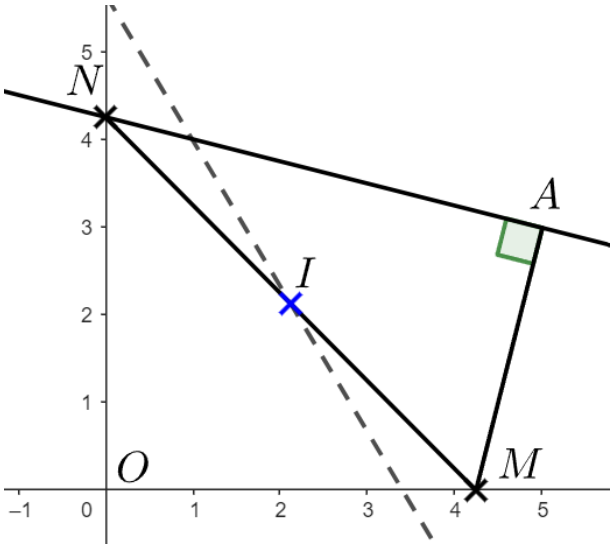
23.1.3 Problèmes de lieu

On appelle problème de lieu tout problème de géométrie dont le but est de déterminer le lieu des points vérifiant une certaine propriété. Ce type de problème se résout très souvent par analyse-synthèse.

L'usage d'un logiciel de géométrie dynamique permet alors très souvent de conjecturer la solution, ce qui peut s'avérer particulièrement utile dans la résolution.

Exercice On considère un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$, et un point A du premier quadrant. Pour tout point $M \in (OI)$, on trace la perpendiculaire à (MA) passant par A : elle coupe (OJ) en N.
Déterminer le lieu du milieu I de $[MN]$, lorsque M parcourt (OI).

En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, on peut conjecturer que le lieu recherché est la médiatrice de $[OA]$.



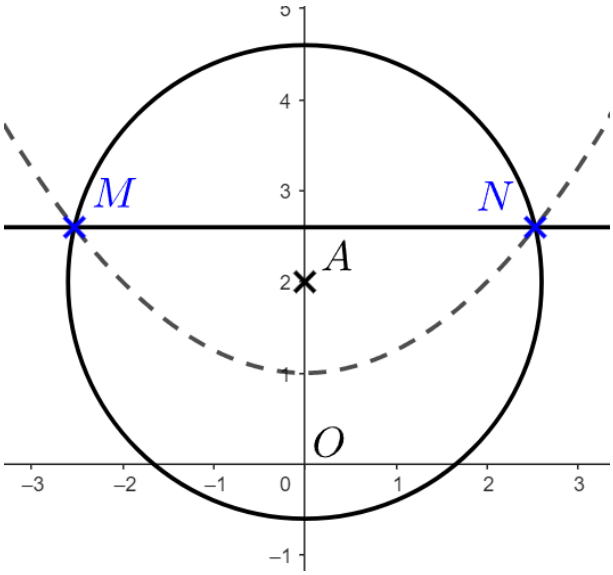
Analyse : On considère un tel point I. Le triangle ANM est rectangle en A, donc le cercle circonscrit à ce triangle est celui de diamètre $[MN]$. De même, le triangle OMN est rectangle en O donc admet le même cercle pour cercle circonscrit. On en déduit que $OI = IA$, et donc que I est sur la médiatrice de $[OA]$.

Synthèse : Soit I un point de la médiatrice de $[OA]$. On construit le cercle de centre I et de rayon $OI = IA$: il coupe (OI) en M et (OJ) en N. Ce cercle passe par O, M et N : c'est donc le cercle circonscrit au triangle OMN. Ce triangle est rectangle en O, donc le centre de ce cercle est le milieu de $[MN]$. Ainsi, I est le milieu de $[MN]$.

Le lieu de ces points I est donc bien la médiatrice de $[OA]$.

Exercice On considère un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ et un point $A(0,a)$, avec $a>0$. Pour tout réel $t>0$, on trace le cercle de centre A et de rayon t, et la droite d'équation $y=t$. Déterminer le lieu des points d'intersections de ce cercle et de cette droite, lorsque t parcourt $]0,+\infty[$.

L'usage d'un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer que le lieu recherché est une parabole d'axe de symétrie (OJ) et passant par $\left(0,\frac{a}{2}\right)$.



Analyse : On commence par remarquer que le cercle et la droite se coupent si, et seulement si, $t \geq \frac{a}{2}$, et que pour $t=\frac{a}{2}$, il n'y a qu'un seul point d'intersection.

Soient M et N deux points d'intersection du cercle avec la droite. On note $M(-x,y)$ et $N(x,y)$ leur coordonnées, avec $x \geq 0$. Alors il existe $t \geq \frac{a}{2}$ (avec éventuellement $M=N$) tel que $y=t$ et $AM=AN=t$. Ainsi

$$AM^2 = AN^2 = t^2 \Rightarrow (y-a)^2 + x^2 = y^2 \Rightarrow -2ay + a^2 + x^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2a} + \frac{a}{2}$$

car $a>0$. Ainsi, les points M et N sont sur la parabole d'équation $y=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$.

Synthèse : Soit $M(x,y)$ un point tel que $y=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} AM^2 &= (y-a)^2 + x^2 \\ &= \left(\frac{x^2}{2a} - \frac{a}{2}\right)^2 + x^2 \\ &= \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4} + x^2 \\ &= \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{4} \\ &= \left(\frac{x}{2a} + \frac{a}{2}\right)^2 \\ AM^2 &= y^2 \end{aligned}$$

donc $AM=y$ (car $AM \geq 0$). Ainsi, M est à la fois sur le cercle de centre A et de rayon y, et sur la droite horizontale d'ordonnée y.

Par conséquent, le lieu recherché est la parabole d'équation $y=\frac{x^2}{2a}+\frac{a}{2}$, qui admet bien comme axe de symétrie (OJ) et passe par $\left(0,\frac{a}{2}\right)$.

23.2 Dans l'espace

23.2.1 Droites et plan

Définition Soient $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace. On dit qu'elles sont :

- ❖ coplanaires, si elles sont incluses dans un même plan.
- ❖ parallèles, si elles sont coplanaires et d'intersection vide.
- ❖ confondues, si $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.
- ❖ sécantes, si elles sont coplanaires, non parallèles et non confondues.

Remarque Deux droites de l'espace coplanaires sont donc parallèles, ou confondues, ou sécantes.

Proposition Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles ou confondues si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Démonstration ($\Longrightarrow$) *Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, le résultat est trivial. Supposons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ parallèles. Il existe alors un plan $\mathcal{P}$ les contenant. Quitte à opérer un changement de variable, on peut supposer que ce plan est $\mathbb{R}^2$, auquel cas les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent des équations réduites :*

$$\mathcal{D} \ : \ y = ax + b$$
$$\mathcal{D}' \ : \ y = a'x + b'$$

avec a, b, a', b' réels. Dans ce cas, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ a' \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement. On remarque qu'un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ si, et seulement si, $ax + b = a'x + b'$, c'est-à-dire $x(a - a') = b' - b$. Si $a \neq a'$, un tel point M existe donc, ce qui contredit le parallélisme de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Par conséquent, $a = a'$, et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ admettent des vecteurs directeurs colinéaires.

($\Longleftarrow$) *On considère deux points $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et un réel λ tels que $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(B, \lambda\overrightarrow{u})$.*

- ❖ *Si $B \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.*
- ❖ *Supposons que $B \notin \mathcal{D}$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $C \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Si l'on note (x, y, z) ses coordonnées, il existe alors des réels α, β tels que*

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + \alpha(a, b, c)$$
$$(x, y, z) = (x_B, y_B, z_B) + \beta\lambda(a, b, c)$$

On en déduit que

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_A, y_A, z_A) + (\alpha - \beta\lambda)(a, b, c)$$

et donc que $B \in \mathcal{D}$, ce qui n'est pas. Par conséquent, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$.

On considère le plan $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB})$. On a alors $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, et $B \in \mathcal{P}$, donc $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$. Ces droites sont donc coplanaires.

Au final, elles sont bien confondues, ou parallèles. ◈

Proposition Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sécantes ont exactement un point d'intersection.

Démonstration *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes. Elles sont alors coplanaires et non parallèles, donc elles admettent un point d'intersection. Supposons qu'elles admettent au moins deux points d'intersection distincts $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. On considère un vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$.*

On a alors $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$, donc il existe un réel λ tel que

$$(x_B, y_B, z_B) = (x_A, y_A, z_A) + \lambda(a, b, c)$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \lambda\overrightarrow{u}$$

donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$.
Le même raisonnement montre que $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$, et donc que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$. Or, ces droites sont sécantes, donc non confondues. On en déduit qu'elles n'ont qu'un seul point d'intersection. ◈

Définition Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace. On dit qu'ils sont :

- ❖ parallèles si ils sont d'intersection vide.
- ❖ confondus si $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.
- ❖ sécants sinon.

Proposition (admise) L'intersection de deux plans sécants est une droite de l'espace.

Proposition (admise) Deux plans sont parallèles ou confondus si, et seulement si, ils admettent un vecteur normal en commun.

Définition Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ une droite et un plan.

- ❖ Si leur intersection est vide, on dit qu'ils sont parallèles.
- ❖ Si $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, on dit que $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$.
- ❖ Sinon, on dit qu'ils sont sécants.

Proposition (admise) Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ une droite et un plan. Alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ ou incluse dans $\mathcal{P}$ si, et seulement si, tout vecteur normal à $\mathcal{P}$ est normal à $\mathcal{D}$.

Proposition (admise) Si une droite et un plan sont sécants, alors ils admettent un unique point d'intersection.

Théorème (Théorème du toit) Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans sécants, et soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}'$ deux droites parallèles. Alors l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est une droite parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Démonstration *On note $\mathcal{D}''$ l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.*
Supposons par l'absurde que $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles. On note $\mathcal{P}''$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (qui existe car ces droites sont parallèles). Comme $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}$ sont coplanaires et non parallèles, elles admettent un point d'intersection I.
Celui-ci est alors un point de $\mathcal{D}''$, donc il est dans les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Il est également dans $\mathcal{D}$, donc il est dans le plan $\mathcal{P}''$. Ainsi, I appartient à l'intersection des plans $\mathcal{P}''$ et $\mathcal{P}'$, c'est-à-dire $\mathcal{D}'$. Dans ce cas, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un point en commun, ce qui contredit le fait qu'elles sont parallèles. ◈

23.2.2 Sphères

Définition La sphère $\mathcal{S}(O,R)$ de centre O et de rayon $R>0$ est l'ensemble des points de l'espace situé à une distance R de O :

$$\mathcal{S}(O,R)=\{M\in\mathbb{R}^3,\ OM=R\}$$

Proposition L'intersection d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une sphère $\mathcal{S}$ est soit un cercle, soit un point, soit vide.

Démonstration *On considère un plan $\mathcal{P}$ et une sphère $\mathcal{S}=\mathcal{S}(A,R)$, avec $A\in\mathbb{R}^3$ et $R>0$. On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. Pour $M(x,y)\in\mathbb{R}^3$, M est à l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ si, et seulement si, le triangle AMH est rectangle en H et $AM=R$. Par le théorème de Pythagore*

$$HM=\sqrt{AM^2-AH^2}=\sqrt{R^2-AH^2}$$

Ainsi

- *Si $R>AH$, alors $R^2-AH^2>0$, et l'ensemble des points M est le cercle de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-AH^2}$.*
- *Si $R=AH$, alors $R^2-AH^2=0$, et le seul point M possible est H.*
- *Si $R<AH$, alors $R^2-AH^2<0$, et le plan et la sphère sont d'intersection vide.*

◈

Proposition L'intersection de deux sphères est soit un cercle, soit un point, soit vide.

Démonstration *On considère deux sphères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. On se place dans un repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ de sorte que $\mathcal{S}=\mathcal{S}(O,R)$ et $\mathcal{S}'=\mathcal{S}(A,R')$. Ainsi, on a les équations cartésiennes suivantes :*

$$\mathcal{S}:x^2+y^2+z^2=R^2$$

$$\mathcal{S}':(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R'^2$$

En injectant la première dans la seconde, on en déduit que pour un point $M\in\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$, on a

$$-2xx_a+x_A^2-2yy_A+y_A^2-2zz_A+z_A^2+R^2=R'^2$$

puis que

$$2xx_A+2yy_A+2zz_A=OA^2+R^2-R'^2$$

Ainsi, $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$ est inclus dans un plan orthogonal à $[AA']$. Par conséquent, l'intersection $\mathcal{S}\cap\mathcal{S}'$ est l'intersection d'un plan et d'une sphère, d'où le résultat, par la proposition précédente. ◈

On peut poursuivre avec une intersection de 3 sphères, qui devient alors dans le pire des cas l'intersection d'un cercle et d'une sphère, donc deux points (si le cercle n'est pas sur la sphère), puis avec 4 sphères, auquel cas on obtient au maximum un point.

Une application importante de ces résultats est la triangulation satellite utilisée dans les systèmes GPS. On relève la distance d'un point donnée sur Terre avec 3 satellites, ce qui place ce point à l'intersection de 3 sphères. En considérant le Terre comme une sphère, on obtient une quatrième sphère, ce qui permet de déterminer uniquement la position de tout point sur Terre par la distance à 3 satellites.

24 Pourcentages et taux d'évolution

- **Niveau :** cycle 4, Seconde générale
- **Pré-requis :** fractions, numération décimale, proportionnalité, suites numériques

24.1 Pourcentages et proportionnalité

24.1.1 Proportions et pourcentages

Définition On considère deux grandeurs A et B. La proportion de A par rapport à B est la fraction $\frac{A}{B}$.

Dire qu'une proportion est $N\%$ revient à dire que cette proportion peut s'écrire $\frac{N}{100}$.

Proposition Prendre une proportion P d'une grandeur G revient à multiplier cette grandeur par P.

Démonstration *On écrit $P = \frac{A}{B}$, c'est-à-dire que P est la proportion "A B-ièmes". Ainsi, prendre la proportion P d'une grandeur G revient à prendre A B-ièmes de G.*
Un B-ième de G est $\frac{G}{B}$. A B-ièmes de G sont donc

$$A \times \frac{G}{B} = G \times \frac{A}{B} = G \times P$$

◈

24.1.2 Lien avec la proportionnalité

La proportion $\frac{A}{B}$ est le nombre qui, multiplié par B, donne A. Ainsi, lorsque cette proportion reste constante pour les différentes valeurs correspondantes de A et B, ces deux grandeurs sont proportionnelles. Dans ce cas, la proportion $\frac{A}{B}$ est le coefficient de proportionnalité entre A et B.

Cela peut alors donner une multitude de techniques associées à la proportionnalité pour résoudre des problèmes de proportions : retour à l'unité, coefficient de proportionnalité, linéarités additive et multiplicative.

24.2 Taux d'évolution, coefficient multiplicateur

On considère une grandeur qui évolue entre un temps initial et un temps final. On note V_i sa valeur initiale et V_f sa valeur finale.

24.2.1 Coefficient multiplicateur et pourcentage

Définition On appelle coefficient multiplicateur le réel k (lorsqu'il existe) tel que

$$V_f = k \times V_i$$

Remarque Dès que $V_i \neq 0$, un tel réel existe, est unique, et vaut

$$k = \frac{V_f}{V_i}$$

Proposition Une augmentation (resp. une diminution) de $N\%$ correspond à un coefficient multiplicateur $k = 1 + \frac{N}{100}$ (resp. $k = 1 - \frac{N}{100}$).

Démonstration *On considère une grandeur G. Alors $N\%$ de G vaut $G \times \frac{N}{100}$. Ainsi, la valeur de G après une augmentation de $N\%$ est*

$$G + G \times \frac{N}{100} = G \times \left(1 + \frac{N}{100}\right)$$

Le coefficient multiplicateur est alors $1 + \frac{N}{100}$.
Pour une diminution, la preuve est analogue. ◈

24.2.2 Taux d'évolution

Définition On appelle variation absolue la différence $V_f - V_i$. On appelle variation relative, ou taux d'évolution, le rapport $T = \frac{V_f - V_i}{V_i}$.

Proposition Si une grandeur évolue d'une valeur initiale à une valeur finale, avec un coefficient multiplicateur k et un taux d'évolution T, alors on a :

$$T = k - 1 \quad \text{et} \quad k = T + 1$$

Démonstration *On considère une grandeur qui évolue entre une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f. On a :*

$$T = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - 1 = k - 1$$

d'où le résultat. ◈

24.3 Évolutions successives

24.3.1 Évolutions successives et réciproques

Proposition On considère une grandeur dont les valeurs évoluent successivement de V_0 à V_n (avec $n \geq 1$). Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note k_i et T_i respectivement le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution de V_{i-1} à V_i.
Si l'on note k et T le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution de V_0 à V_n, alors on a

$$k = k_1 \times \ldots \times k_n \quad \text{et} \quad T = (1 + T_1) \times \ldots \times (1 + T_n) - 1$$

Démonstration *On remarque que l'on a*

$$\frac{V_n}{V_0} = \frac{V_n}{V_0} \times \frac{V_{n-1}}{V_{n-1}} \times \ldots \times \frac{V_1}{V_1} = \frac{V_n}{V_{n-1}} \times \ldots \times \frac{V_1}{V_0}$$

Ainsi, on a

$$k = k_1 \times \ldots \times k_n$$

On en déduit que

$$k = (1 + T_1) \times \ldots \times (1 + T_n)$$

puis que

$$T = k - 1 = (1 + T_1) \times \ldots \times (1 + T_n) - 1$$

◈

Les coefficients multiplicateurs k_i et taux d'évolution T_i sont dits successifs, et le coefficient multiplicateur k et le taux d'évolution T sont dits globaux.

Remarque On remarque que lorsque l'on effectue une augmentation puis une diminution de $N\%$, le coefficient multiplicateur est alors

$$k = \left(1 + \frac{N}{100}\right)\left(1 - \frac{N}{100}\right) = 1 - \frac{N^2}{10\ 000}$$

Cela correspond alors à une diminution de $\frac{N^2}{100}\%$, qui n'est pas forcément nulle.
Si l'on effectue d'abord une diminution, puis une augmentation de $N\%$, le résultat est le même.

Définition On considère une grandeur qui évolue d'une valeur initiale V_i à une valeur V_f. Alors le coefficient multiplicateur et le taux d'évolution de V_f à V_i sont dits réciproques.

Proposition On considère une grandeur qui évolue d'une valeur initiale V_i à une valeur finale V_f, avec un coefficient multiplicateur k et un taux d'évolution T.
Alors le coefficient multiplicateur réciproque k' et le taux d'évolution réciproque T' valent :

$$k' = \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad T' = \frac{1}{1+T} - 1$$

Démonstration *Si l'on considère les valeurs successives $V_0 = V_i$, $V_1 = V_f$ et $V_2 = V_i$, le coefficient multiplicateur global est $k \times k' = 1$, puisque $V_i \times 1 = V_i$.*
Par conséquent, $k' = \frac{1}{k}$. On en déduit que

$$T' = k' - 1 = \frac{1}{k} - 1 = \frac{1}{1+T} - 1$$

◈

24.3.2 Taux moyen

Définition On considère une grandeur qui évolue successivement avec des coefficients $k_1, \ldots, k_n$ et des taux $T_1, \ldots, T_n$. On appelle coefficient multiplicateur moyen le réel k_m tel que :

$$k_m{}^n = k_1 \times \ldots \times k_n$$

On appelle taux d'évolution moyen le réel T_m tel que :

$$(1 + T_m)^n = (1 + T_1) \times \ldots \times (1 + T_n)$$

Remarque Ce coefficient moyen et ce et taux moyen correspondent au coefficient et au taux qu'il faudrait appliquer n fois pour obtenir la même évolution qu'avec les coefficients et taux k_i et T_i.

Proposition En reprenant les notations précédentes, on a

$$k_m = \sqrt[n]{k_1 \times \ldots k_n} \quad \text{et} \quad T_m = \sqrt[n]{(1 + T_1) \times \ldots \times (1 + T_n)} - 1$$

Démonstration *On a*

$$k_m{}^n = k_1 \times \ldots \times k_n$$

d'où le résultat sur k_m*. D'autre part, on a pour tout* $1 \leq i \leq n$*,* $1 + T_i = k_i$ *et* $T_m = k_m - 1$*, d'où le second résultat.* ◈

24.4 Applications

24.4.1 Probabilités

Pour soigner une maladie, on propose deux traitements A et B différents. Pour tester l'efficacité de ces traitements, on décide d'étudier leurs effets sur différents patients. On teste 357 patients de moins de 50 ans et 343 patients de plus de 50 ans.

- ❖ Chez les patients de moins de 50 ans, 87 ont reçu le traitement A et 81 d'entre eux ont été soignés, soit 93%, et 270 ont reçu le traitement dont 234 ont été soignés, soit 87%.
- ❖ Chez les patients de plus de 50 ans, 263 ont reçu le traitement A et 192 d'entre eux ont été soignés, soit 73%, et 80 ont reçu le traitement dont 55 ont été soignés, soit 69%.

Ainsi, il semble que le traitement A est plus efficace que le traitement B. Cependant, si l'on regroupe les données, on a que :

- ❖ Parmi les 350 patients à qui on a donné le traitement A, 273 ont été soignés.
- ❖ Parmi les 350 patients à qui on a donné le traitement B, 289 ont été soignés.

C'est donc en réalité le traitement B qui est le plus efficace.

Ce paradoxe est connu sous le nom de paradoxe de Simpson. Cela s'explique par deux facteurs :

1. Le traitement B a été beaucoup plus donné aux patients de plus de 50 ans, et le traitement A à ceux de moins de 50 ans.

2. Il est raisonnable de penser que la maladie en question est plus difficile à traiter chez des personnes de plus de 50 ans que chez des personnes de moins de 50 ans.

24.4.2 Démographie

Lorsque l'on étudie l'évolution d'une population, on modélise régulièrement le nombre d'individus de cette population par une suite numérique $u = (u_n)_n$.

L'un des modèles les plus simple est celui ce Malthus. On fait l'hypothèse que cette population dispose de ressources infinies, et que par conséquent, la variation absolue de u d'un terme à l'autre est proportionnelle au terme initial. Il existe alors un réel positif k tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = ku_n$$

Dans ce cas, la taux d'évolution de u_{n+1} à u_n est constant égal à k.

25 Problèmes conduisant à une modélisation par des équations ou des inéquations

- **Niveau :** Troisième, lycée
- **Pré-requis :** variable selon les problèmes

25.1 Premier degré

25.1.1 Équations

Exercice Alice part de Rennes en direction de Nantes en voiture, et au même moment Bob part de Nantes en direction de Rennes en prenant la même route. Alice roule à une vitesse constante de 90km/h et Bob à une vitesse constante de 120km/h.
En sachant que la distance entre Rennes et Nantes est 97km, quand et où se croiseront Alice et Bob ?

On appelle t le temps écoulé en heures depuis le départ simultané d'Alice et Bob. Alors la distance parcourue (en km) par Alice pendant cette durée t est $90t$, et la distance parcourue (en km) par Bob pendant cette même durée est $120t$.

Lorsqu'ils se croiseront, ils auront chacun roulé pendant un certain temps t, et la distance totale qu'ils auront parcourue sera 97km. On en déduit que ce temps t entre le départ et la rencontre des deux automobilistes vérifie $90t + 120t = 97$

On résout cette équation :

$$90t + 120t = 97 \Leftrightarrow 210t = 97 \Leftrightarrow t = \frac{97}{210}$$

Alice et Bob se croiseront après avoir roulé pendant $\frac{97}{210}$ heures, soit environ $\frac{97}{210} \times 60 \approx 28$ minutes.

On peut alors calculer les distances parcourues par Alice et Bob en km :

$$90 \times \frac{97}{210} = \frac{97 \times 3}{7} \approx 41,6 \qquad 120 \times \frac{97}{210} = \frac{97 \times 4}{7} \approx 55,4$$

25.1.2 Inéquations

Exercice Une salle de sport propose trois formules d'abonnement :

- Formule A : 3€ par séance
- Formule B : une cotisation de 10€ puis 1€ par séance
- Formule C : un forfait de 24€ pour un mois de séances gratuites

Déterminer, selon le nombre de séances effectuées dans un mois, quelle formule est la plus avantageuse.

Si l'on note x le nombre de séances effectuées dans un mois, le prix à payer est donné par :

- Formule A : $3x$
- Formule B : $10 + x$
- Formule C : 24

On compare deux à deux les formules en résolvant des inéquations. La formule A est plus avantageuse que la formule B lorsque $3x \leq 10 + x$, etc. On a

$$3x \leq 10 + x \Leftrightarrow 2x \leq 10 \Leftrightarrow x \leq 5$$
$$3x \leq 24 \Leftrightarrow x \leq 8$$
$$10 + x \leq 24 \Leftrightarrow x \leq 14$$

Par conséquent, entre 0 et 5 séances, le formule A est la plus avantageuse, entre 5 et 14 séances c'est la formule B, et au-delà de 14 séance c'est la formule C.

25.2 Second degré

25.2.1 Équations

Premier exemple :

Pour des raisons pratiques, le format de papier A est tel que lorsque l'on partage une feuille en deux parallèlement à la largeur, on obtient deux rectangles de même format. Pour une longueur L et une largeur l, ce format est donné par le rapport $\frac{L}{l}$. Celui doit alors vérifier :

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{2}} \Leftrightarrow \frac{L^2}{l^2} = 2$$

Le rapport entre longueur et largeur doit alors être $\sqrt{2}$.

Le format A0 est celui d'une feuille de rapport $\sqrt{2}$, et de surface 1m^2. La longueur la largeur doivent donc être $\sqrt[4]{2}$ et $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Deuxième exemple :

Exercice Un fabricant d'ustensiles de cuisine fabrique des casseroles cylindriques. Dans un but d'optimisation, il souhaite que le volume que peut contenir une casserole soit maximal en utilisant le moins de matériau possible pour la construire.
Quel doit être alors le rapport entre le hauteur de la casserole et son rayon ?

On modélise une casserole par un cylindre de hauteur h et de rayon r auquel on a retiré la base du haut. Le volume contenu dans la casserole est alors donné par :

$$\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h$$

La quantité de matériau nécessaire pour la fabriquer peut être modélisée par la surface de ce solide, qui est donc la somme de la surface de sa face latérale et de celle de sa base. Celle-ci est donc donnée par :

$$\mathcal{S} = 2 \times \pi \times r \times h + \pi \times r^2$$

On suppose que cette surface est une quantité fixée $\mathcal{S} = S$. On en déduit que la hauteur h vérifie :

$$h = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r}$$

Le volume est alors

$$\mathcal{V} = \pi r^2 \times \frac{S - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{r(S - \pi r^2)}{2}$$

Le rayon r est maximal lorsque $h = 0$. Dans ce cas, on a $S = \pi r^2$ donc $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. On cherche donc à maximiser la fonction $x \mapsto \frac{x(S-\pi x^2)}{2}$ sur $\left[0, \sqrt{\frac{S}{\pi}}\right]$. Celle-ci est dérivable et de dérivée :

$$x \mapsto \frac{S - \pi x^2}{2} + \frac{x}{2} \times (-2\pi x) = \frac{S - \pi x^2}{2} - \pi x^2 = \frac{S - 3\pi x^2}{2}$$

On a

$$\frac{S - 3\pi x^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{S}{3\pi} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

car $x \geq 0$. Le rayon qui maximise le volume est donc $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Dans ce cas, on a

$$h = \frac{S - \pi r^2}{2\pi r} = \left(S - \pi \frac{S}{3\pi}\right) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{3\pi}{S}} = \frac{2S}{3} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{3\pi}{S}} = \frac{S}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{3\pi}{S}} = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$$

Ainsi, $r = h$ et le rapport entre hauteur et rayon est 1. Ce volume maximal est donc obtenu lorsque la hauteur et le rayon sont égaux (ce qui se vérifie d'ailleurs sur de réelles casseroles !).

Troisième exemple :

On cherche à déterminer une expression numérique de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, ce qui permet ensuite de construire un pentagone régulier à la règle et au compas.

On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, de sorte que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

c'est-à-dire

$$z + \frac{1}{z} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

On remarque que $z^5 = 1$. Ainsi :

$$z^5 = 1 \Rightarrow z^5 - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0 \Rightarrow z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

car $z \neq 1$. Comme $z \neq 0$, on a

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

Ainsi, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est solution de $4X^2 + 2X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 20 = 4 \times 5$. Ainsi, les solutions de cette équation sont

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$, on a

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

25.2.2 Inéquations

On jette une balle de masse m à la verticale avec une vitesse initiale $v_0 = 20$km/h à une hauteur initiale $z_0 = 2$m. On cherche à savoir pendant combien de temps la balle aura une altitude supérieure à 5m.

Une fois la balle lancée, elle n'est soumise qu'à son poids donné par $P = mg$, avec $g = 9,8\text{m/s}^2$. Par le principe fondamental de la dynamique, son accélération a vérifie pour tout temps t : $ma(t) = -mg$, c'est-à-dire $a(t) = -g$.

En primitivant, en en déduit que la vitesse v de la balle vérifie :

$$v(t) = v(0) + gt = 20 - gt$$

En primitivant encore une fois, on en déduit l'altitude z de la balle :

$$z(t) = z(0) + 20t - g\frac{t^2}{2} = 2 + 20t - g\frac{t^2}{2}$$

On cherche t tel que $z(t) \geq 5$. On a

$$z(t) \geq 5 \Leftrightarrow 2 + 20t - g\frac{t^2}{2} \geq 5 \Leftrightarrow -3 + 20t - g\frac{t^2}{2} \geq 0$$

On commence par résoudre l'équation $-3 + 20t - g\frac{t^2}{2} = 0$. Le discriminant du polynôme de degré 2 correspondant est

$$\Delta = 20^2 - 4 \times (-3) \times \left(-\frac{g}{2}\right) = 400 - 6g > 0$$

car $g = 9,8$. Les deux racines sont alors :

$$t_1 = \frac{-20 - \sqrt{400 - 6g}}{-g} = \frac{20 + \sqrt{400 - 6g}}{g} \qquad t_2 = \frac{20 - \sqrt{400 - 6g}}{g}$$

On a donc $-3 + 20t - g\frac{t^2}{2} \geq 0$ pour $t_2 \leq t \leq t_1$. Le temps que passe la balle à une altitude supérieure à 5m (en secondes) est donc :

$$t_1 - t_2 = \frac{20 + \sqrt{400 - 6g}}{g} - \frac{20 - \sqrt{400 - 6g}}{g} = 2\frac{\sqrt{400 - 6g}}{g} \approx 3,8$$

25.3 Autres exemples

25.3.1 Suites convergentes et seuils

Exercice On considère une tasse de café dans une pièce de température 21°C, et on s'intéresse à la température du café en fonction du nombre n de minutes écoulées.
Des résultats de physique permettent de démontrer que la température du café peut être modélisée par une suite $(u_n)_n$ qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,97u_n + 0,63$.

1. Résoudre l'équation $x = 0,97x + 0,63$.

2. On considère la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - 21$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $(v_n)_n$ est géométrique. En déduire une expression de $(u_n)_n$ en fonction de n.

3. Justifier que peu importe la température initiale du café, sa température convergera vers une température à déterminer.

4. On suppose que le café a initialement une température de 80°C. Déterminer au bout de combien de minutes sa température sera inférieure à 60°C.

1. On a

$$x = 0,97x + 0,63 \Leftrightarrow 0,03x = 0,63 \Leftrightarrow x = \frac{0,63}{0,03} = 21$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 21 = 0,97u_n + 0,63 - (0,97 \times 21 + 0,63) = 0,97(u_n - 21) = 0,97v_n$$

$(v_n)_n$ est donc géométrique de raison $0,97$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 21$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (u_0 - 21) \times 0,97^n$ et $u_n = v_n + 21 = (u_0 - 21) \times 0,97^n + 21$.

3. La température initiale du café est u_0. Comme $|0,97| < 1$, on a $0,97 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 21$. La température du café converge donc toujours vers 21°C, qui est la température de la pièce.

4. On cherche un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 60$. On a

$$\begin{aligned} u_n \leq 60 &\Leftrightarrow (80-21) \times 0,97^n + 21 \leq 60 \\ &\Leftrightarrow 59 \times 0,97^n \leq 39 \\ &\Leftrightarrow 0,97^n \leq \frac{39}{59} \\ &\Leftrightarrow e^{n\ln(0,97)} \leq \frac{39}{59} \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,97) \leq \ln\left(\frac{39}{59}\right) \quad \text{car } \exp \text{ et } \ln \text{ sont croissantes} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{39}{59}\right)}{\ln(0,97)} \quad \text{car } \ln(0,97) < 0 \end{aligned}$$

On a $\frac{\ln\left(\frac{39}{59}\right)}{\ln(0,97)} \approx 13,6$: il faut donc 14 minutes pour que la température du café passe sous les 60°C.

25.3.2 Suites récurrentes

Exercice Un biologiste souhaite étudier la population d'une espèce d'animaux dans une réserve naturelle. En 2023, cette population compte 12 000 individus, et la taille de la réserve fait que celle-ci ne peut accueillir plus de 60 000 individus.
On modélise l'évolution de cette population par une suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par $u_0 = 12$ et $u_{n+1} = 1,1u_n\left(1 - \frac{u_n}{605}\right)$. On définit f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,1x\left(1 - \frac{x}{605}\right)$.

1. Démontrer que f est croissante sur $[0, 60]$. En déduire que $(u_n)_n$ est croissante.

2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 55$. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers un réel L.

3. Justifier que L vérifie $f(L) = L$. En déduire la valeur de L, puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1,1\left(1 - \frac{x}{605}\right) - \frac{1,1x}{605} = 1,1 - \frac{2,2x}{605}$$

On a

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1,1 \geq \frac{2,2x}{605} \Leftrightarrow x \leq 1,1 \times \frac{605}{2,2} \Leftrightarrow x \leq \frac{605}{2}$$

f est donc croissante sur $[0, 60]$.
On a $u_1 = f(u_0) = 1,1 \times 12 \times \left(1 - \frac{12}{605}\right) \approx 13$, donc $u_1 > u_0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par croissance de f, si $u_{n+1} \geq u_n$, alors $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}$. Ainsi, par récurrence, $(u_n)_n$ est croissante.

2. On a bien $0 \leq u_0 \leq 55$. Par croissance de f, si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq 55$, alors

$$f(0) \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(55)$$

On a $f(0) = 0$ et $f(55) = 1,1 \times 55 \times \left(1 - \frac{55}{605}\right) = 55$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq 55$. Ainsi, par récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 55$.
En particulier $(u_n)_n$ est majorée. Comme elle est aussi croissante, elle converge vers un réel $12 \leq L \leq 55$.

3. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient que $L = f(L)$.

On a

$$\begin{aligned} f(L) = L &\Leftrightarrow 1,1L\left(1-\frac{L}{605}\right) = L \\ &\Leftrightarrow 0,1L - \frac{1,1}{605}L^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow L\left(0,1 - \frac{1,1}{605}L\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow L = 0 \qquad \text{ou} \qquad 0,1 - \frac{1,1}{605}L = 0 \\ &\Leftrightarrow L = 0 \qquad \text{ou} \qquad L = 0,1 \times \frac{605}{1,1} = 55 \end{aligned}$$

Comme $12 \leq L \leq 55$, nécessairement $L = 55$. Cela signifie que la population étudiée converge vers 55 000 individus.

25.3.3 Systèmes linéaires

Premier exemple :

On considère les droites du plan d'équations cartésiennes $2x + y + 11 = 0$ et $-x + 4y - 19 = 0$. Elles se croisent si, et seulement si, le système suivant admet une solution unique :

$$\begin{cases} 2x + y = -11 \\ -x + 4y = 19 \end{cases}$$

On résout ce système. De la seconde équation, on a $x = 4y - 19$, que l'on injecte dans la première, ce qui donne :

$$2 \times (4y - 19) + y = -11 \Rightarrow 8y - 38 + y = -11 \Rightarrow 9y = 27 \Rightarrow y = 3$$

On a alors $x = 4y - 19 = 4 \times 3 - 19 = -7$, donc ces deux droites se coupent en $(-7, 3)$.

Le même type de problème peut être proposé avec l'intersection de trois plans de l'espace, ce qui donne lieu à la résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Second exemple :

On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

La recherche d'une distribution invariante pour ce processus de Markov revient à chercher un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad x + y + z = 1$$

Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} 0,3x + 0,3y + 0,3z = x \\ 0,2x + 0,5y + 0,3z = y \\ 0,5x + 0,2y + 0,4z = z \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

25.3.4 Équations diophantiennes

Exercice Au jour J_0, on observe un premier astre qui apparaît tous les 30 jours. Au jour $J_0 + 18$, on observe un deuxième astre qui apparaît tous les 102 jours. L'objectif est de déterminer le prochain jour J_1 où ces deux astres apparaîtront en même temps.

1. On note u et v le nombre de périodes effectuées par les deux astres entre les jours J_0 et J_1. Montrer que u et v vérifient $30u - 102v = 18$.

2. L'équation $30u - 102v = 18$ admet-elle des solutions entières ? Justifier.

3. Résoudre l'équation $30u - 102v = 18$, et en déduire combien de temps sépare les jours J_0 et J_1.

1. Entre les jours J_0 et J_1, il s'est écoulé $30u$ jours pour le premier astre. Pour le second, il s'est écoulé $102v$ jours entre $J_0 + 18$ et J_1. Ainsi,

$$30u = 102v + 18 \Rightarrow 30u - 102v = 18$$

2. On calcule le PGCD de 30 et 102. On a $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $102 = 2 \times 3 \times 17$, donc $\text{PGCD}(30, 102) = 6$. Comme 6 divise 18, cette équation admet une infinité de solutions entières.

3. On commence par réduire :

$$30u - 102v = 18 \Leftrightarrow 5u - 17v = 3$$

On commence par chercher une solution de l'équation $5u - 17v = 1$ en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu :

$$17 = 5 \times 3 + 2 \Rightarrow 5 \times (-3) - 17 \times (-1) = 2$$
$$5 = 2 \times 2 + 1 \Rightarrow 5 \times 1 - 2 \times 2 = 1 \Rightarrow 5 \times 7 - 17 \times 2 = 1$$

On en déduit une solution particulière de $5u - 17v = 3$: $5 \times 21 - 17 \times 6 = 3$. Maintenant, on a

$$5u - 17v = 3 \Leftrightarrow 5u - 17v = 5 \times 21 - 17 \times 6 \Leftrightarrow 5(u - 21) = 17(v - 6)$$

5 et 17 sont premiers entre eux et 5 divise $17(v - 6)$, donc par le lemme de Gauss 5 divise $v - 6$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $v = 6 + 5k$. Dans ce cas, on a

$$5u - 17v = 3 \Rightarrow 5u - 17(6 + 5k) = 3 \Rightarrow 5(u - 17k) = 105 \Rightarrow u = 21 + 17k$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$5 \times (21 + 17k) - 17 \times (6 + 5k) = 105 + 5 \times 17k - 102 - 17 \times 5k = 3$$

Les solutions de $5u - 17v = 3$ (et donc de $30u - 102v = 18$) sont donc les entiers de la forme $u = 21 + 17k$ et $v = 6 + 5k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le nombre de périodes u minimal est donc 4 (atteint pour $k = -1$), ce qui donne que le nombre de jours séparant J_0 et J_1 est $30 \times 40 = 120$.

26 Problèmes conduisant à une modélisation par des graphes, par des matrices

- **Niveau :** Terminale maths expertes
- **Pré-requis :** matrices, probabilités, graphes, suites numériques, limites de suite, déterminant, polynômes, équations différentielles, systèmes linéaires, dérivées successives

26.1 Problèmes faisant intervenir des matrices

26.1.1 Systèmes linéaires

On considère un système linéaire de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Si l'on note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors ce système peut se réécrire $AX = B$. Cela donne une écriture matricielle de ce type de système.

Remarque C'est d'ailleurs cette écriture qui motive l'appellation "linéaire" de ce type de système.

Ce point de vue est transposable à plus que deux équations et deux inconnues. Tout système linéaire de n équations à n inconnues peut se réécrire sous la forme $AX = B$, où A est une matrice carrée de taille $n \times n$, B et X sont des matrices colonnes de taille n, X contenant les n inconnues.

Proposition (admise) Un système linéaire $AX = B$ admet une unique solution si, et seulement si, A est inversible. Dans ce cas, $X = A^{-1}B$.

Démonstration *Supposons A inversible. Alors*

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$$

d'où le résultat.
Le sens réciproque est admis. ◈

Ce résultat implique donc que la résolution d'un système linéaire revient à inverser une matrice, et réciproquement.

Voyons une application de ce double point de vue. On considère une fonction réelle f, et des réels deux à deux distincts $b_0, \dots, b_n$. On cherche un polynôme P de degré au plus n tel que pour tout $0 \leq i \leq n$, $P(b_i) = f(b_i)$. Ce type de problème porte le nom d'interpolation, et P est alors appelé polynôme interpolateur.

Si l'on note $P(X) = a_n X_n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$, avec $a_0, \ldots, a_n$ les coefficients (réels) de P, alors la condition d'interpolation de f revient à dire que pour tout $0 \leq i \leq n$, on a

$$a_n {b_i}^n + a_{n-1} {b_i}^{n-1} + \ldots + a_1 b_i + a_0 = f(b_i)$$

Il s'agit là d'un système linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues $a_0, \ldots, a_n$. Celui-ci peut se réécrire $VA = F$, avec

$$V = \begin{pmatrix} 1 & b_0 & \ldots & {b_0}^{n-1} & {b_0}^n \\ 1 & b_1 & \ldots & {b_1}^{n-1} & {b_1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & b_{n-1} & \ldots & {b_{n-1}}^{n-1} & {b_{n-1}}^n \\ 1 & b_n & \ldots & {b_n}^{n-1} & {b_n}^n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} f(b_0) \\ \vdots \\ f(b_n) \end{pmatrix}$$

Ainsi, un tel polynôme P existe lorsque ce système admet une solution unique, donc lorsque V est inversible. Or, V a une forme particulière : il s'agit de la matrice de Vandermonde (transposée) associée aux réels $b_0, \ldots, b_n$.

Il est possible de montrer que, puisque ces réels sont deux à deux distincts, cette matrice est inversible, ce qui justifie l'existence (et l'unicité) de P.

Remarque En pratique, on n'inverse pas la matrice V, cela est bien trop long. On utilise plutôt les polynômes interpolateurs de Lagrange (par exemple) qui permettent d'exprimer P à partir des $b_0, \ldots, b_n$ et des $f(b_0), \ldots, f(b_n)$.

Faisons un exemple. On cherche un polynôme P dont la courbe passe par les points $(-8, 2)$, $(-6, -2)$ et $(4, 2)$. On cherche un polynôme de degré 2, donc on note $P(X) = aX^2 + bX + c$. La condition d'interpolation se traduit alors par le système :

$$\begin{cases} a \times (-8)^2 + b \times (-8) + c = 2 \\ a \times (-6)^2 + b \times (-6) + c = -2 \\ a \times 4^2 + b \times 4 + c = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 64a - 8b + c = 2 \\ 36a - 6b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases}$$

Celui-ci se réécrit $AX = B$, avec $A = \begin{pmatrix} 64 & -8 & 1 \\ 36 & -6 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On peut vérifier à la calculatrice que A est bien inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 10 & -24 & 14 \\ -120 & 192 & 48 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 10 & -24 & 14 \\ -120 & 192 & 48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,8 \\ -4,4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le polynôme recherché est $P(X) = 0,2X^2 + 0,8X - 4,4$.

26.1.2 Suites récurrentes linéaires

Définition On appelle suite récurrente linéaire d'ordre p toute suite $(u_n)_n$ définie par ses p premiers termes $u_0, \dots, u_{p-1}$ et par une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = a_0 u_n + \dots a_{p-1} u_{n+p-1}$$

On considère une telle suite $(u_n)_n$.

Proposition On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{p-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ et $U_n = A^n U_0$.

Démonstration *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$AU_n = \begin{pmatrix} a_{p-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_0 u_n \\ u_{n+p-1} \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+p} \\ u_{n+p-1} \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

Le second point découle d'une récurrence immédiate, en tout point analogue au cas des suites numériques géométriques. ◈

Il résulte de cette proposition que si l'on connaît une expression de A^n en fonction de n, alors on peut trouver une expression de u_n explicite en fonction de n.

Remarque En pratique, trouver une expression de A^n peut s'avérer particulièrement ardu, notamment lorsque A n'est pas diagonalisable. On utilise alors plutôt le polynôme caractéristique de la relation de récurrence pour exprimer $(u_n)_n$ à l'aide de suites plus simples.

Prenons un exemple bien connu : la suite de Fibonacci. Elle est définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Elle est donc bien récurrente linéaire, et d'ordre 2. La matrice A correspondante est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche alors à diagonaliser A (ce qui en terminale peut faire l'objet d'une vérification seulement). On trouve que $A = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix}$$

On montre alors par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$. Comme D est diagonale, ses puissances D^n se calculent aisément. Au final, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

26.1.3 Systèmes différentiels

Définition On appelle système différentiel tout système d'équations différentielles couplées, c'est-à-dire dont les inconnues sont présentes dans plusieurs équations.

Lorsque ce type de système est linéaire, de la même façon que pour les systèmes usuels, on peut en donner une écrire matricielle $Y' = AY$, où Y regroupe les fonctions que l'on cherche à déterminer.

Prenons un exemple. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} u' = 2u + v + 2w \\ v' = -u - v - w \\ w' = -u - w \end{cases}$$

On peut alors le réécrire $Y' = AY$, avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$.

On remarque que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et que $A^3 = 0$.

On définit alors $E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui correspond à l'exponentielle de A. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$E(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+2t+1 & t^2+t & t^2+2t \\ -t & 1-t & -t \\ -t^2-t & -t^2 & -t^2-t+1 \end{pmatrix}$$

Soient a, b, c trois réels. On définit alors u, v, w pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = E(t) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On peut alors vérifier que ces fonctions sont bien solutions du système considéré.

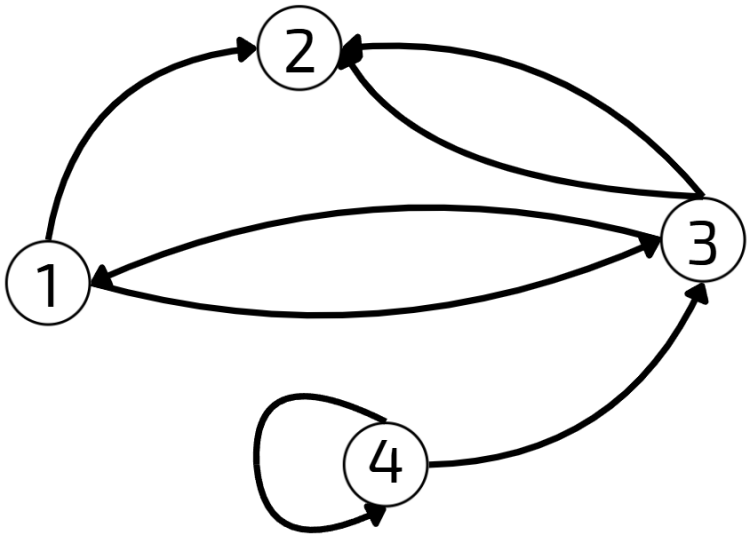
Remarque L'exemple donné ici fait apparaître une matrice A qui est nilpotente d'ordre 3, ce qui facilite énormément le calcul de son exponentielle $E(t)$.

26.2 Lien entre graphes et matrices

26.2.1 Matrice d'adjacence

Définition On considère un graphe d'ordre n. Sa matrice d'adjacence est la matrice de taille $n \times n$ dont les coefficients de ligne i et de colonne j comptent le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

On considère le graphe suivant :



Sa matrice d'adjacence est alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On remarque pour un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique.

Proposition Soit un graphe de matrice d'adjacence A. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, les coefficients de A^p comptent le nombre de chemins de longueur p du graphe.

Démonstration *On note $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$. On procède par récurrence sur p. Pour $p = 1$, le résultat est clair. Pour $p = 2$, on a $A^2 = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ avec pour tous $1 \leq i, j \leq n$:*

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j}$$

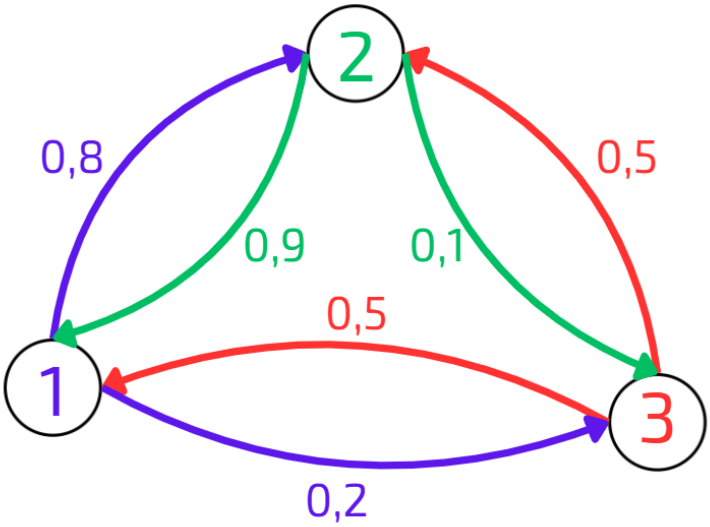
Or, un chemin de longueur 2 du graphe reliant un somme i à un sommet j est un couple de deux chemins de longueur 1 : un reliant le sommet i à un sommet k et un reliant ce sommet k au sommet j. Pour un sommet k fixé, le terme $a_{i,k}a_{k,j}$ compte donc le nombre de chemins de longueur 2 reliant le sommet i au sommet j passant par le sommet k. On en déduit que $b_{i,j}$ compte le nombre de chemins de longueur 2 reliant le sommet i au sommet j.

Supposons le résultat acquis jusqu'à un certain entier p. Tout chemin de longueur $p+1$ est un couple d'un chemin de longueur p et d'un chemin de longueur 1. En écrivant $A^{p+1} = A^p \cdot A$, on procède de la même façon que dans le cas $p = 2$, et l'on montre que les coefficients de A^p comptent bien le nombre de chemins de longueur p. ◈

26.2.2 Chaîne de Markov

Définition On considère un graphe probabiliste. Sa matrice de transition est la matrice dont les coefficients de la ligne i et de la colonne j sont les probabilités portées par l'arête reliant le sommet i au sommet j. S'il n'existe pas de telle arête, le coefficient est 0.

Prenons pour exemple le graphe probabiliste suivant :



Sa matrice de transition est alors $P = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0 & 0,1 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition On appelle chaîne de Markov toute suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de transition de l'état X_n à l'état X_{n+1} ne dépend pas de n.

On peut modéliser une chaîne de Markov par un graphe probabiliste, qui représente les différentes probabilités de transition d'un état à l'autre du processus.

Proposition (admise) On considère une chaîne de Markov $(X_n)_n$ et on note P la matrice de transition de son graphe probabiliste associé. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, π_n le vecteur colonne composé des probabilités $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour chaque état k possible.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_{n+1} = \pi_n P$ et $\pi_n = \pi_0 P^n$. De plus, s'il existe une puissance P^n de P qui ne contient aucun 0, alors (π_n) converge vers un vecteur π tel que $\pi = \pi P$, appelé distribution invariante.

Démonstration *On note $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$, N étant l'ordre du graphe. On a alors pour tout $1 \leq i, j \leq N$, $p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ (cette probabilité ne dépendant pas de n). Alors pour tout état $1 \leq k \leq N$ possible, on a par la formule des probabilités totales :*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{l=1}^{N} \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = l) \cdot \mathbb{P}(X_n = l) = \sum_{l=1}^{N} p_{l,k} \mathbb{P}(X_n = l)$$

Cela traduit que $\pi_{n+1} = \pi_n P$. Par une récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n = \pi_0 P^n$.
Le reste est admis. ◈

Un exemple concret d'utilisation de cette proposition et de modélisation par une chaîne de Markov est l'algorithme PageRank. C'est l'algorithme utilisé par le moteur de recherche Google pour classer les pages Internet par ordre de pertinence.

Chaque page est assimilée à un sommet, et les poids sur les arêtes sont proportionnels aux nombre d'hyperliens allant d'une page à une autre. On obtient alors un graphe probabiliste associé à une chaîne de Markov. Les variables aléatoires $(X_n)_n$ représentent donc la page sur laquelle un visiteur se trouve après un temps discret n, et les états possibles sont toutes les pages Internet.

L'algorithme PageRank cherche alors une distribution invariante de cette chaîne de Markov, ce qui donne un classement de la pertinence des différentes pages.

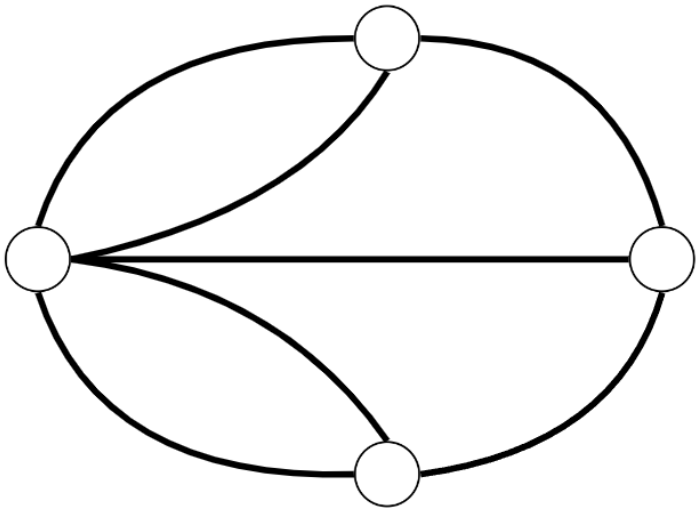
Remarque En pratique, on ne résout pas directement l'équation $\pi = \pi P$: si l'on considère N pages, la matrice P est de taille $N \times N$, ce qui est bien trop grand en pratique. On utilise plutôt des méthodes approchées, qui suffisent amplement.

26.3 Problèmes faisant intervenir des graphes

26.3.1 Problèmes de parcours

Voici un problème historique sur les graphes : le problème des sept ponts de Königsberg. La ville de Königsberg en Russie (aujourd'hui Kaliningrad) est traversée par un fleuve sur lequel se situent deux îles. Elles sont reliées par un pont, et six autres ponts les relient aux deux berges du fleuve.

On peut représenter la situation par un graphe à 4 sommets (les deux îles et les deux berges), et 7 arêtes (les sept ponts) ainsi :



Le problème est de savoir s'il existe un chemin permettant de passer par chacun des ponts une, et une seule fois. Cela se traduit par une chemin eulérien sur ce graphe.

Pour cela, il faut que le graphe compte 0 ou 2 sommets de degré impair, ce qui n'est pas le cas ici. Ainsi, un tel chemin n'existe pas.

Remarque Ce problème a été résolu en 1735 par Leonhard Euler. C'est un des problèmes qui a donné naissance à cette théorie des graphes et notamment à la topologie des graphes. C'est d'ailleurs de là que l'on tient le nom de chemin eulérien.

Un second type de problème de parcours sur un graphe est les problèmes d'optimisation de parcours. Si l'on imagine que chaque arête représente une distance entre deux lieux, ou un coût entre deux états, l'on peut être amené à rechercher, parmi tous les chemins eulériens, celui qui est de distance minimale, ou de coût minimal.

C'est un type de problème complexe traiter pour des graphes comportant beaucoup de sommets, mais dans certains cas plus simples, l'on peut les traiter sans méthode particulière.

26.3.2 Formule d'Euler

Définition On dit qu'un graphe est planaire s'il en existe une représentation sans arêtes sécantes.

Théorème (Formule d'Euler)(admis) Dans un graphe planaire connexe, si l'on note S le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et R le nombre de régions du plan que le graphe délimite, alors on a

$$S - A + R = 2$$

Démonstration *Commençons par remarquer que si le graphe est un triangle, on a* $S-A+R = 3-3+2 = 2$. *Maintenant supposons que le graphe n'est pas un triangle.*
Si l'on exclut la région extérieure au graphe, chaque région est délimitée par un polygone (à déformation près des arêtes, ce qui ne change pas le fait que le graphe est planaire).
On commence par trianguler chacun de ces polygones. Pour chaque arête rajoutée, on ajoute également une région, donc la quantité $S - A + R$ *reste inchangée.*
Une fois ces polygones triangulés, on va retirer des arêtes et des sommets en examinant les triangles.

- *On commence par regarder les triangles dont un seul côté est adjacent à la région extérieure. En retirant ce côté, on retire une arête et une région, donc* $S - A + R$ *reste inchangée.*
- *Pour les autres triangles, comme le graphe est connexe et n'est pas un triangle, ils ont deux côtés adjacents à cette région extérieure. On retire alors ces deux côtés et le sommet les reliant. On retire alors deux arêtes, un sommet et une région, donc* $S - A + R$ *reste inchangée.*

De proche en proche, on réduit le graphe à un triangle, pour lequel $S - A + R = 2$. *Le résultat est donc vrai pour tout graphe planaire connexe.* ◈

Remarque On peut associer à chaque graphe planaire connexe un polyèdre (isomorphe à une sphère) et réciproquement : chaque face est un sommet du graphe, deux sommets sont reliés si les faces sont adjacentes. Chaque région du graphe correspond alors à un sommet du polyèdre.
Cette formule d'Euler est donc valable pour les polyèdres et devient $F - A + S = 2$, avec F le nombre de faces, S le nombre de sommets et A le nombre d'arêtes.

27 Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré

- **Niveau :** Première spécialité, Terminale maths expertes
- **Pré-requis :** notion de fonction, équations, inéquations, nombres complexes, théorème des valeurs intermédiaires

27.1 Forme canonique

Définition On appelle trinôme du second degré, ou plus simplement trinôme, toute expression de la forme ax^2+bx+c, de variable $x \in \mathbb{R}$ et de paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec a non nul.

Théorème (Forme canonique) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Cette écriture se nomme la forme canonique du trinôme ax^2+bx+c.

Démonstration *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \quad \textit{car } a \neq 0 \\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

◈

Cette forme canonique est très utile pour démontrer de nombreux résultats parmi les suivants. Elle sert aussi en pratique pour résoudre des équations de degré 2, donc de la forme $ax^2+bx+c=0$.

En pratique, on retrouve la forme canonique en "complétant le carré". Par exemple :

$$\begin{aligned} x^2+10x = 39 &\Leftrightarrow x^2+10x+25 = 64 \\ &\Leftrightarrow (x+5)^2 = 64 \end{aligned}$$

Cela donne deux possibilités : $x+5=8$, donc $x=3$, ou bien $x+5=-8$, donc $x=-13$.

Remarque Historiquement, cette méthode a été popularisée par le mathématicien persan Al-Khwârizmî au XIème siècle dans son ouvrage latinisé *Abrégé du calcul par la restauration et la compensation*. C'est ce texte qui donnera le nom *algèbre*, et c'est de ce mathématicien que l'on tire le mot *algorithme*.

27.2 Racines et factorisation

Dans cette section, on considère un trinôme ax^2+bx+c.

27.2.1 Racines et discriminant

Définition Un réel x_0 est une racine du trinôme ax^2+bx+c si

$$ax_0{}^2+bx_0+c=0$$

Définition On appelle discriminant du trinôme ax^2+bx+c le réel

$$\Delta=b^2-4ac$$

27.2.2 Résolution d'équation par discriminant

Théorème On note $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$, alors ax^2+bx+c admet deux racines réelles distinctes :
$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta=0$, alors ax^2+bx+c admet une unique racine réelle : $x_0=\frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta<0$, alors ax^2+bx+c n'admet aucune racine réelle.

Démonstration *On remarque que par définition de Δ, la forme canonique du trinôme s'écrit :*

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Par conséquent, pour $x\in\mathbb{R}$:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

On remarque que $4a^2>0$, donc le second membre a le même signe que Δ.

- *Si $\Delta>0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}>0$. Ce réel admet alors deux racines réelles distinctes :*
$$-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta}{2a}$$
Alors le trinôme admet deux racines réelles distinctes x_1,x_2 telles que
$$x_1+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2+\frac{b}{2a}=\frac{\Delta}{2a}$$
d'où le résultat.
- *Si $\Delta=0$, on a $\frac{\Delta}{4a^2}=0$. $x\in\mathbb{R}$ est donc racine du trinôme si, et seulement si,*
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$
c'est-à-dire si $x=-\frac{b}{2a}$.
- *Si $\Delta<0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2}<0$, donc ce réel n'admet pas de racine carrée réelle. Dans ce cas, le trinôme n'admet aucune racine réelle.*

◈

Exemple On cherche un nombre réel dont le carré vaut lui-même augmenté de 1, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x^2 = x + 1$$

donc $x^2 - x - 1 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$. Cette équation admet donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Il n'existe donc qu'un unique réel positif vérifiant cette propriété, qui est x_2. Ce nombre est appelé nombre d'or, et est régulièrement noté φ. Il est notamment utilisé comme proportion "élégante" dans de nombreux milieux artistiques.

27.2.3 Factorisation

Proposition
- ❖ Si le trinôme admet deux racines distinctes x_1, x_2, alors il se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- ❖ Si le trinôme admet une unique racine x_0, il se factorise :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

Démonstration

- ❖ *Supposons que la trinôme admet deux racines distinctes x_1, x_2. Alors $\Delta > 0$ et*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a\Big(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\Big) \\ &= a\left(x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{1}{4a^2}\Big(-b - \sqrt{\Delta}\Big)\Big(-b + \sqrt{\Delta}\Big)\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c}$$

- ❖ *Supposons que le trinôme admet une unique racine x_0. Alors $\Delta = 0$ et $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Pour $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} a(x - x_0)^2 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} \\ &= ax^2 + bx + \frac{4ac}{4a} \quad \textit{car } \Delta = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{a(x - x_0) = ax^2 + bx + c}$$

◈

Cette factorisation permet de trouver une deuxième racine une fois que l'on a trouvé une première racine (il est possible d'avoir deux fois la même racine). Pour trouver la première racine, on peut tester des valeurs "faciles" comme 0, 1, -1, ...

En réalité, cette propriété de factorisation par $x-\alpha$ dès que α est une racine est valable pour tout polynôme, même de degré supérieur à 2. Par exemple pour un polynôme de degré 3, cela permet de le factoriser en un produit d'un polynôme de degré 1 et d'un trinôme, ce qui permet de trouver les racines en résolvant l'équation produit.

27.2.4 Somme et produit de racines

Proposition Supposons que le trinôme admet deux racines réelles distinctes x_1, x_2. Alors

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration *Un calcul direct permet de prouver ces relations. Cependant, on peut démontrer ce résultat bien plus facilement à partir de la factorisation :*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

En effet, en développant le second membre, on obtient

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$$

En identifiant les coefficients des deux trinômes, on obtient les relations souhaitées. ◈

Remarque Soient x_1, x_2 deux réels. On note S leur somme et P leur produit. Alors d'après la proposition précédente, x_1 et x_2 sont les racines du trinôme

$$x^2 - Sx + P$$

En utilisant, par exemple, le discriminant, on peut trouver les racines de ce trinôme, et ainsi retrouver ces deux réels x_1 et x_2.

Exercice On considère deux évènement A et B indépendants tels que $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,82$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,12$. Déterminer $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Comme A et B sont indépendants, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = 0,12$. D'autre part, on a

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0,82 - 0,12 = 0,7$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$ sont les solutions de l'équation $x^2 - 0,7x + 0,12 = 0$. Le discriminant du trinôme est

$$\Delta = (-0,7)^2 - 4 \times 1 \times 0,12 = 0,49 - 0,48 = 0,01 = 0,1^2$$

Cette équation admet donc deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{0,7 - 0,1}{2} = 0,3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{0,7 + 0,1}{2} = 0,4$$

Comme $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$, on a $\mathbb{P}(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}(B) = 0,4$.

27.3 Fonctions polynômes du second degré

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

avec a, b, c des réels, a non nul.

Dans cette partie, on considère $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ une telle fonction.

27.3.1 Signe

Proposition On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, en notant $x_1 < x_2$ les deux racines réelles de $ax^2 + bx + c$, alors f est du même signe que a sur $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, et de signe opposé sur $]x_1, x_2[$.
- Si $\Delta = 0$, en notant x_0 l'unique racine réelle de $ax^2 + bx + c$, alors f est du même signe que a sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.
- Si $\Delta < 0$, alors f est du même signe que a sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

- *Supposons que $\Delta > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*
$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
Sur $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, le produit $(x - x_1)(x - x_2)$ est positif, et il est négatif sur $]x_1, x_2[$, d'où le résultat.
- *Supposons que $\Delta = 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*
$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$
Sur $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $(x - x_0)^2 > 0$, d'où le résultat.
- *Supposons que $\Delta < 0$. On sait que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc si elle change de signe, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule. Par conséquent, f est de signe constant sur $\mathbb{R}$. En utilisant la forme canonique, on a*
$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$
qui est du signe de a, d'où le résultat.

◈

Remarque On peut se servir de cette proposition pour démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs du plan, ou de l'espace, et pour les intégrales.
Présentons la preuve dans le cas général, c'est-à-dire pour une forme φ bilinéaire symétrique définie positive sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E :
$$\varphi(x, y)^2 \leq \varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y)$$
Soient $x, y \in E$ et soit $t \in \mathbb{R}$. On a
$$\varphi(tx + y, tx + y) = t^2\varphi(x, x) + 2t\varphi(x, y) + \varphi(y, y)$$
par bilinéarité et symétrie de φ. Si $x = 0$, le résultat est clair. Sinon, l'expression précédente est une trinôme en t, qui est de signe constant car φ est positive. Ainsi, son discriminant est négatif :
$$(2\varphi(x, y))^2 - 4\varphi(x, x)\varphi(y, y) \leq 0 \Rightarrow \varphi(x, y)^2 \leq \varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y)$$
Bien entendu, il n'est pas attendu une telle preuve au lycée. Cependant, appliqué aux cas particuliers de vecteurs ou d'intégrales, les propriétés de ces objets vues au lycée permettent de démontrer deux cas particuliers de cette inégalité :

- Pour tous vecteurs u, v du plan, ou de l'espace, on a
$$(\langle u, v\rangle)^2 \leq \|u\| \cdot \|v\|$$
- Pour toutes fonctions f, g continues sur $\mathbb{R}$, et tout intervalle $[a, b]$, on a
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2dt\right) \cdot \left(\int_a^b g(t)^2dt\right)$$

27.3.2 Variations

Proposition ❖ Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.
❖ Si $a < 0$, alors f est croissante sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.

Démonstration *On rappelle que l'on dispose de la forme canonique :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Soient x, y deux réels. Alors

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} - a\left(y + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{\Delta}{4a} \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(y + \frac{b}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} + y + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - y - \frac{b}{2a}\right) \\ &= a(x - y)\left(x + y + \frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

Supposons que $-\frac{b}{2a} \leq x \leq y$. Alors $x - y \leq 0$ et

$$x + y + \frac{b}{a} \geq -\frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} + \frac{b}{a} = 0$$

Ainsi, $f(x) - f(y)$ est du signe opposé à celui de a, ce qui donne la monotonie de f sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.

Pour $x \leq y \leq -\frac{b}{2a}$, on a cette fois

$$x + y + \frac{b}{a} \leq 0$$

donc f est de monotonie contraire sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$. ◈

Proposition f admet une extremum global en $-\frac{b}{2a}$: si $a > 0$ c'est un minimum, et si $a < 0$ c'est un maximum.

Démonstration *Cela découle directement de la proposition précédente sur les variations de f.* ◈

Exercice Pour un périmètre donné, quel est le rectangle d'aire maximale ?

On considère un rectangle de périmètre P fixé. Si l'on note L sa longueur, sa largeur l vérifie $2L + 2l = P$, donc $l = \frac{P}{2} - L$. On peut alors exprimer l'aire du rectangle en fonction de sa longueur (variable) :

$$A = L \times l = \frac{P}{2}L - L^2$$

On cherche donc à maximiser la fonction $f : x \mapsto \frac{P}{2}x - x^2$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{P}{2}\right]$, puisque L et l sont positives. f est bien polynomiale de degré 2, avec un coefficient dominant négatif, donc elle admet un maximum global. Celui-ci est atteint en $x = -\frac{1}{2\times(-1)} \times \frac{P}{2} = \frac{P}{4}$. Dans ce cas, la largeur l vaut le quart du périmètre, donc le rectangle est un carré.

Remarque Une application de ces résultats est la recherche d'une droite des moindres carrées pour approximer un nuage de points.

Sans rentrer en détail dans les calculs, on cherche à minimiser une expression de la forme

$$f(a) + g(a,b)^2$$

en fonction de deux paramètres réels a, b, dans laquelle f est une fonction polynomiale de degré 2.

27.4 Nombres complexes

27.4.1 Coefficients réels

On considère un trinôme $ax^2 + bx + c$, avec a, b, c réels, a non nul.

Proposition Si $\Delta < 0$, alors le trinôme admet deux racines complexes conjuguées :

$$z = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \overline{z} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration *On a la forme canonique :*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Ainsi, $z \in \mathbb{C}$ est une racine du trinôme si, et seulement si :

$$a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Or, $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. Ce nombre admet alors deux racines complexes :

$$\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

d'où les deux racines du trinôme. ◈

Remarque Historiquement, c'est pour résoudre ce type d'équation que les nombres complexes ont été inventés. Plus précisément, c'est pour résoudre des équations de degré 3. Montrons sur un exemple leur utilisation, à travers la méthode de Cardan, mathématicien italien du XVIème siècle ayant étudié ces équations.

On considère l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$. On cherche x sous la forme $x = u + v$, avec u, v non nuls. Alors

$$\begin{aligned} x^3 - 15x - 4 = 0 &\Leftrightarrow (u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv - 15)(u+v) - 4 = 0 \end{aligned}$$

La décomposition $x = u + v$ transforme un problème à une inconnue en un problème à deux inconnues. Il est alors raisonnable, pour revenir à un problème à une inconnue, de fixer la condition $uv = 5$, de sorte que $3uv - 15 = 0$. Dans ce cas, l'équation devient :

$$u^3 + v^3 = 4$$

La condition $uv = 5$ s'écrit aussi $u^3v^3 = 125$. Alors, u^3 et v^3 sont deux nombres dont on connait la somme et le produit. Ils sont alors racines du trinôme :

$$X^2 - 4X + 125 = 0$$

Celui-ci a pour discriminant

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 125 = -484 = -22^2 < 0$$

Ses solutions complexes sont alors

$$z = \frac{4 - 22i}{2} = 2 - 11i \quad \text{et} \quad \overline{z} = 2 + 11i$$

qui correspondent donc à u^3 et v^3. On remarque que

$$(2+i)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times i + 3 \times 2 \times i^2 + i^3 = 2 + 11i \quad \text{et} \quad (2-i)^3 = 2 - 11i$$

Ainsi, $u = 2 + 11i$ et $v = 2 - 11i$ conviennent. On en déduit que

$$x = u + v = 2 + 11i + 2 - 11i = 4$$

27.4.2 Racine carrée

Définition Une racine carrée d'un complexe z est un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = z$.

Proposition Tout complexe non nul admet deux racines carrées distinctes opposées.

Démonstration *Soit $z = re^{i\theta}$ un complexe non nul, c'est-à-dire tel que $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. Pour $\delta = \rho e^{i\tau} \in \mathbb{C}$, on a*

$$\begin{aligned} z = \delta^2 &\Leftrightarrow re^{i\theta} = \rho^2 e^{2i\tau} \\ &\Leftrightarrow r = \rho^2 \quad \text{et} \quad \theta \equiv 2\tau (2\pi) \\ &\Leftrightarrow \rho = \pm\sqrt{r} \quad \text{et} \quad \tau \equiv \frac{\theta}{2} (\pi) \end{aligned}$$

Cela fournit donc potentiellement 4 racines carrées :

- $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$
- $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}+i\pi}$
- $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}+i\pi}$

En remarquant que $-1 = e^{i\pi}$, on voit qu'il n'en existe en réalité que 2 distinctes :

$$\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} - \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Réciproquement, on vérifie facilement qu'il s'agit bien de racines carrées de z. ◈

27.4.3 Coefficients complexes

On considère cette fois un trinôme $ax^2 + bx + c$, avec a, b, c des complexes, a non nul.

Proposition On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une unique racine complexe $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, on note $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carré de Δ. Le trinôme admet alors deux racines complexes distinctes :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Démonstration *On commence par remarquer que le fait que a, b, c soient complexes n'invalide pas l'écriture sous forme canonique du trinôme.*
On applique alors le même raisonnement que celui mené dans le cas réel, à l'exception que lorsque $\Delta \neq 0$, il admet toujours deux racines complexes δ et $-\delta$ distinctes. ◈

Remarque On remarque que l'utilisation des nombres complexes garantit qu'une équation de degré 2 admet toujours 2 racines (à l'exception du cas $\Delta = 0$, mais la racine x_0 y est alors double, dans le sens où le trinôme se factorise $a(x - x_0)^2$).

C'est une propriété fondamentale des nombres complexes, et qui explique dans bien des situations leur utilisation. Celle-ci se généralise pour des équations de degré supérieur : elle porte alors le nom de théorème de D'Alembert-Gauss, aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre. Celui peut s'énoncer ainsi : tout polynôme à coefficients complexes admet autant de racines que son degré (comptées avec leur multiplicité).

28 Suites numériques. Limites

- **Niveau :** Première spécialité, Terminale spécialité, Terminale complémentaire
- **Pré-requis :** notion de fonction, raisonnement par récurrence, intervalle de $\mathbb{R}$

28.1 Suites numériques

28.1.1 Définitions et représentations

Définition Une suite numérique u est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, définie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0 fixé.

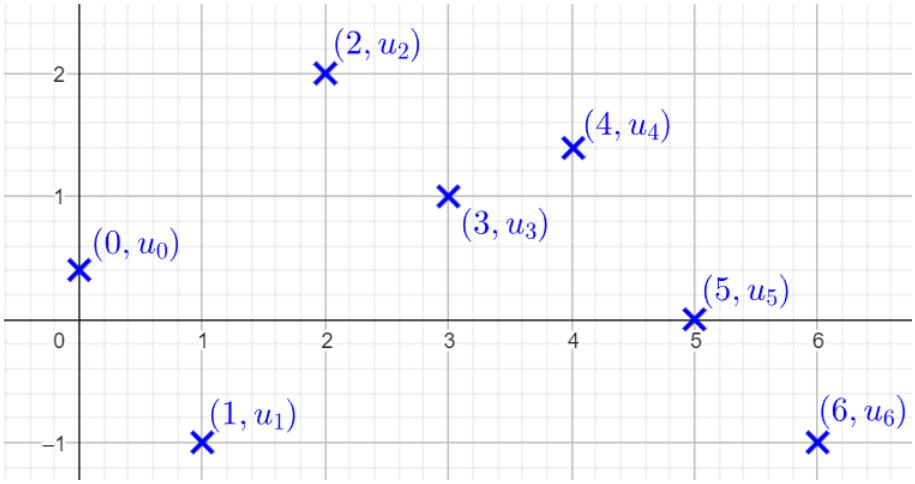
Pour $n \geq n_0$, on note habituellement $u_n = u(n)$. On appelle u_n le terme de rang n de la suite. On note également $(u_n)_{n \geq n_0}$ la suite u, ou plus simplement $(u_n)_n$ ou (u_n), s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On dit qu'une suite numérique u est définie de manière explicite si l'on peut trouver une expression de chaque terme u_n directement en fonction de n.

On dit qu'une suite numérique u est définie par récurrence si chaque terme u_n est définie en fonction des termes précédents $u_{n_0}, \ldots, u_{n-1}$.

Remarque Il est souvent plus pratique de travailler avec une expression explicite d'une suite numérique. Cependant, très souvent ce que l'on modélise par une suite numérique ne permet que d'obtenir une relation de récurrence.

On peut représenter graphiquement une suite numérique par son graphe, qui est à l'instar de celui des fonctions, l'ensemble des (n, u_n), pour $n \geq n_0$.



Bien souvent, le premier terme d'une suite est celui de rang 0 ou de rang 1. On remarque qu'un changement d'indice $n \mapsto n - n_0$ ne modifie pas réellement la suite, cela décale uniquement les termes pour commencer à $n = 0$.

28.1.2 Vocabulaire et propriétés

On considère une suite numérique $u = (u_n)_{n\geq 0}$.

Définition On dit que u est croissante (resp. décroissante) si pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \text{(resp. } u_{n+1} \leq u_n\text{)}$$

La suite est strictement croissante (resp. décroissante) si l'inégalité est stricte.

On dit que u est monotone si elle est croissante, ou décroissante.

Proposition On suppose u définie explicitement par $u_n = f(n)$ pour tout $n \geq 0$, avec f une fonction réelle. Si f est monotone (resp. strictement monotone), alors u est monotone (resp. strictement monotone) et de même sens de variation que f.

Démonstration *On fait la preuve dans le cas croissant, le cas décroissant étant similaire.*

Supposons f croissante (resp. strictement croissante). Pour tout $n \geq 0$, on a $n + 1 > n$, donc $u_{n+1} = f(n + 1) \geq f(n) = u_n$ (resp. $u_{n+1} = f(n + 1) > f(n) = u_n$). u est donc croissante (resp. strictement croissante). ◈

Remarque Attention, la réciproque est fausse. En effet, la monotonie de f donne plus d'informations que la monotonie de u, puisqu'elle s'applique pour tous réels. La monotonie de u ne garantit pas celle de f, puisqu'elle ne donne aucune information sur les variations de f sur les intervalles $[n, n + 1]$.
On peut prendre par exemple $f : x \mapsto x\cos(2\pi x)$: elle n'est pas monotone, et u définie par $u_n = f(n)$ est strictement croissante.

Proposition Soient $p > q$ deux entiers naturels. Si u est croissante (resp. décroissante), alors $u_p \geq u_q$ (resp. $u_p \leq u_q$). Si u est strictement monotone, l'inégalité est stricte.

Démonstration *Il suffit de raisonner par récurrence à partir de la définition précédente.* ◈

Définition On dit que u est majorée (resp. minorée) s'il existe un réel A tel que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq A$ (resp. $u_n \geq A$). On dit alors que u est majorée (resp. minorée) par A.
u est bornée si elle est majorée et minorée.

28.1.3 Suites arithmétiques et géométriques

Nous voyons dans cette section deux exemples classiques de suites numériques.

Définition On dit que u est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ si pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Proposition Si u est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors pour tous entiers $n \geq p \geq 0$, on a

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

En particulier, pour tout $n \geq 0$, $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration *Il suffit de procéder par récurrence à partir de u_p.* ◈

Remarque Cela implique en particulier qu'il n'existe qu'une seule suite arithmétique de raison r fixée et de premier terme u_0 fixé. On peut alors parler de la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Proposition Si u est arithmétique de raison r, alors pour tout $n \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Démonstration *Supposons u arithmétique de raison r. Soit $n \geq 0$. On note*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On remarque que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$u_k + u_{n-k} = u_0 + kr + u_0 + (n-k)r = 2u_0 + nr = u_0 + u_n$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 2S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} \quad \textit{en inversant l'ordre de sommation} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_k + u_{n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (u_0 + u_n) \\ 2S_n &= (n+1)(u_0 + u_n) \end{aligned}$$

d'où le résultat. ◈

Définition On dit que u est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = qu_n$$

Proposition Si u est géométrique de raison q, alors pour tous $n \geq p \geq 0$, on a :

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

En particulier, pour tout $n \geq 0$, on a $u_n = u_0 q^n$.

Démonstration *Il suffit de procéder par récurrence à partir de u_p.* ◈

Remarque Tout comme pour les suites arithmétiques, il existe donc une unique suite géométrique de raison q fixée et de premier terme u_0 fixé.

Proposition Supposons u géométrique de raison q. Soit $n \geq 0$.

- ❖ Si $q = 1$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0(n+1)$$
- ❖ Si $q \neq 1$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration *Si $q = 1$, alors u est constante égale à u_0. Ainsi*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 = u_0(n+1)$$

Supposons $q \neq 1$. Remarquons que

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} q^k - \sum_{k=1}^{n+1} q^k = 1 - q^{n+1}$$

Ainsi, comme $q \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Il suit que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 q^k = u_0 \sum_{k=0}^{n} q^k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

◈

28.2 Limites

28.2.1 Approche intuitive

Lorsque l'on étudie une suite, on s'intéresse souvent à sa "limite", c'est-à-dire la manière dont elle se comporte "à l'infini", pour des termes de rang très élevés.

Nous allons voir qu'il existe plusieurs comportements possibles. Commençons par voir 3 exemples.

1. On considère la suite u des sommes des premiers entiers naturels, c'est-à-dire la suite dont les premiers termes sont 0, 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, ...

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

La suite u croît sans arrêt, et sans jamais atteindre de "plafond". Dans ce cas, on dira qu'elle diverge, et ce, vers $+\infty$.

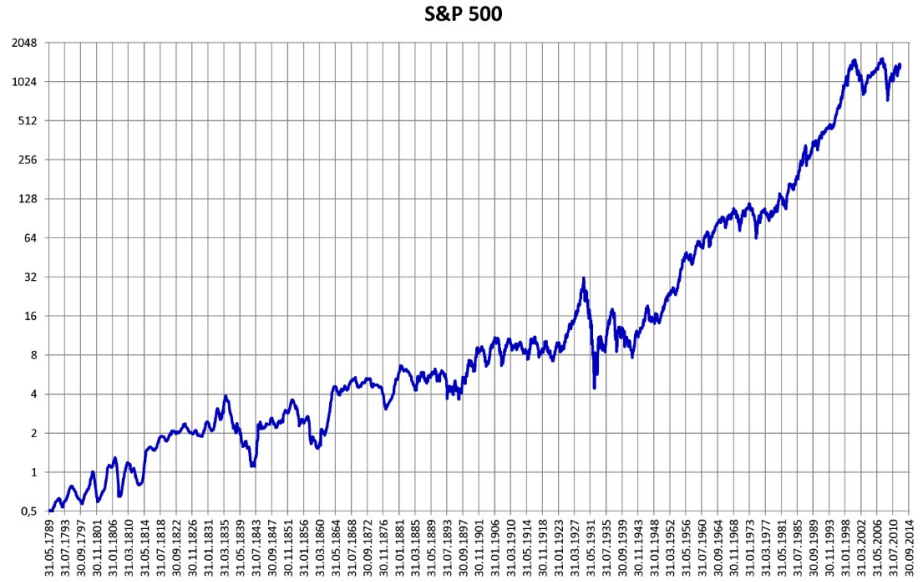
2. On considère la construction par récurrence du flocon de Koch. On part d'un triangle équilatéral, on partage chacun de ses côtés en 3 segments égaux, puis l'on construit un triangle équilatéral sur le segment central. On obtient un étoile, avec laquelle on recommence, et ainsi de suite.

On s'intéresse à la suite v des aires des différentes figures obtenues, en partant d'un triangle d'aire 1.

n	0	1	2	3	4	5
v_n	1	$\frac{13}{9}$	$\frac{133}{81}$	$\frac{1\ 261}{729}$	$\frac{11\ 605}{6\ 561}$	$\frac{105\ 469}{59\ 049}$
Approximation	1	1.44444	1.64198	1.72977	1.76879	1.78613

Cette fois, la suite est toujours croissante, mais elle semble de pas pouvoir dépasser une sorte de "plafond" (ce qui est cohérent, puisque le flocon de Koch peut être plongé dans une figure d'aire finie). Elle se rapproche alors d'un certain réel. Dans ce cas, on dira que la suite converge vers ce réel.

3. Donnons un dernier exemple de comportement possible en regardant les courbes de la bourse. On peut en effet modéliser ce type d'évolution par une suite numérique.



https://fr.wikipedia.org/wiki/S%26P_500

Dans ce cas, on voit que la suite ne se rapproche pas d'un réel en particulier, et ne devient pas arbitrairement grande (positivement comme négativement). On dira ici aussi que la suite diverge.

28.2.2 Définitions et propriétés

Maintenant, définissons plus formellement ces notions de suites convergentes et de suites divergentes.

Définition On dit que u converge vers un réel L si pour tout intervalle ouvert I centré sur L (c'est-à-dire de la forme $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$), il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \in I$. On dit que u est convergente, on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. Dans le cas contraire, on dit que u diverge.

Proposition Si u converge vers un réel L, alors celui-ci est unique. On dit alors que L est la limite de u.

Démonstration *Supposons que u converge vers deux réels distincts L_1 et L_2. Quitte à les échanger, supposons que $L_1 > L_2$. Alors $\varepsilon = \frac{L_1-L_2}{3} > 0$.*
Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$, il existe un entier N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on a

$$u_n \in]L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon[$$

De même, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2$, donc il existe un entier N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, on a

$$u_n \in]L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon[$$

Si on note $N = max(N_1, N_2)$, on a alors en particulier :

$$u_N \in]L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon[\quad \text{et} \quad u_N \in]L_2-\varepsilon, L_2+\varepsilon[$$

On a donc

$$u_N < L_2 + \varepsilon = L_2 + \frac{L_1-L_2}{3} = \frac{L_1+2L_2}{3}$$

et

$$u_N > L_1 - \varepsilon = L_1 - \frac{L_1 - L_2}{3} = \frac{2L_1 + L_2}{3}$$

Ainsi

$$\frac{2L_1 + L_2}{3} < u_N < \frac{L_1 + 2L_2}{3}$$

ce qui est impossible car $L_1 > L_2$.

On en déduit que u *ne peut pas avoir deux limites distinctes.* ◈

Définition On dit que u tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout réel M, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq M$ (resp. $u_n \leq M$).

Proposition On considère deux suites u et v convergentes vers L_1 et L_2 respectivement. Alors :

1. $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 + L_2$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda L_1$
3. $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 L_2$
4. si $L_2 \neq 0$, alors $\frac{1}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{L_2}$
5. si $L_2 \neq 0$, alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{L_1}{L_2}$

Démonstration *Cette proposition est admise, mais on présente tout de même la preuve ici, en passant rapidement sur certains points.*

On considère un intervalle ouvert I *centré en* $L_1 + L_2$. *Alors*

$$I - L_2 = \{x - L_2,\ x \in I\}$$

est un intervalle centré sur L_1. *Comme* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$, *il existe un entier* N_1 *tel que pour* $n \geq N_1$, $u_n \in L_1$. *Dans ce cas, on a* $u_n + v_n \in I$, *donc* $u + v$ *converge vers* $L_1 + L_2$.

Pour le deuxième point, on procède de la même façon en considérant

$$\lambda I = \{\lambda x,\ x \in I\}$$

qui est alors un intervalle centré sur λL_1.

Pour le troisième point, on utilise un résultat non énoncé ici : toute suite convergente est bornée (il suffit de voir qu'elle l'est à partir d'un certain rang, car elle converge, et elle l'est aussi avant ce rang car il n'y a alors qu'un nombre fini de termes). On écrit pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n v_n - L_1 L_2 = u_n v_n - u_n L_2 + u_n L_2 - L_1 L_2 = u_n(v_n - L_2) + L_2(u_n - L_1)$$

On remarque alors que $u_n - L_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $v_n - L_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. *Comme* u *est bornée (car convergente), les deux termes tendent vers* 0, *donc* uv *converge vers* $L_1 L_2$.

Pour l'inverse, on commence par justifier que comme $L_2 \neq 0$, *il existe un rang à partir du quel* v *ne s'annule plus. Pour des* n *assez grands, on peut donc écrire :*

$$\frac{1}{v_n} - \frac{1}{L_2} = \frac{L_2 - v_n}{v_n L_2}$$

Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2$ *et* $L_2 \neq 0$, *à partir d'un certain rang à partir duquel* $v_n \geq \frac{L_2}{2}$, *on a*

$$\frac{L_2 - v_n}{v_n L_2} \leq \frac{2(L_2 - v_n)}{{L_2}^2}$$

Ainsi, par comparaison (ce que nous verrons un peu plus loin), ce terme tend vers 0, ce qui montre le quatrième point. Pour le dernier point, il suffit de combiner le troisième et le quatrième. ◈

28.2.3 Comparaison

Théorème On considère deux suites numériques u et v.

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et si à partir d'un certain rang N, $u_n \leq v_n$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, et si à partir d'un certain rang N, $u_n \leq v_n$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Démonstration

- *Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, pour tout $M \in \mathbb{R}$, à partir d'un certain rang $u_n \geq M$. Ainsi, à condition de prendre des termes de rang assez élevé, on a $v_n \geq u_n \geq M$, d'où le résultat.*
- *On procède exactement comme pour le premier point.*

◈

Théorème (Théorème des gendarmes) Soient u, v, w trois suites telles que :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$
- u et w convergent vers le même réel L

Alors v converge vers L.

Démonstration *Soit I un intervalle ouvert centré sur L. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, $u_n \in I$, et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $w_n \in I$. Ainsi, pour $n \geq N = max(N_1, N_2)$, on a $u_n \in I$ et $w_n \in I$. Pour des rangs assez grands, on a de plus $u_n \leq v_n \leq w_n$, et I est un intervalle, donc $v_n \in I$, d'où le résultat.* ◈

Remarque Ce résultat, qui peut paraître plutôt intuitif, n'est pourtant pas si évident. Il est par exemple faut si l'on se place dans $\mathbb{Q}$. En effet, dans la preuve, le fait que $v_n \in I$ à partir de $u_n \in I$ et $w_n \in I$ s'appuie une caractérisation des intervalles, qui se base sur la complétude de $\mathbb{R}$.

28.2.4 Suites monotones

Théorème Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration *On fait la preuve dans le premier cas, le second étant similaire.*
Soit u une suite croissante et non majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme u n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq M$. Par croissance de u, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N \geq M$, donc u tend vers $+\infty$. ◈

Théorème (admis) Toute suite croissante et majorée converge. Toute suite décroissante et minorée converge.

Démonstration *On admet ce théorème car il utilise la notion de bornes supérieure et inférieure. On va ici faire la preuve de la première affirmation, la deuxième étant analogue.*
Soit u croissante et majorée. Alors $E = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ admet une borne supérieure M. Soit $I =]M-\varepsilon, M+\varepsilon[$ un intervalle ouvert centré sur M. Par définition de la borne supérieure, $M-\varepsilon$ n'est pas un majorant de E, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq M-\varepsilon$. Par croissance de u, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N \geq M-\varepsilon$. Comme M est un majorant de E, on a également $u_n \leq M$ pour de tels entiers, donc $u_n \in I$, d'où le résultat. ◈

28.2.5 Suites arithmétiques et géométriques

Proposition Soit u une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $r < 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- Si $r = 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_0$.

Démonstration *On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Si $r > 0$ (resp. $r < 0$), $(nr)_n$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), d'où le résultat. Si $r = 0$, u est constante égale à u_0, et donc converge vers u_0.* ◈

Proposition Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors :

- Si $q > 1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $q \leq -1$, alors $(q^n)_n$ diverge.

Démonstration *On commence par montrer le lemme de Bernouilli :*

$$\forall x \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

On peut le montrer facilement par récurrence, mais on peut faire plus rapide en utilisant les fonctions convexes.
On fixe $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto (1+x)^n$ est convexe sur $]-1, +\infty[$, car elle y est deux fois dérivable et sa dérivée seconde $x \mapsto n(n-1)(1+x)^{n-2}$ y est positive (ou nulle). Sa dérivée en 0 vaut $n(1+0)^{n-1} = n$, donc sa tangente en 0 a pour équation $y = 1+nx$, d'où le résultat par convexité.

On suppose $q > 1$. En l'appliquant à $x = q - 1 > 0$, on a

$$q^n = (1 + q - 1)^n \geq 1 + n(q-1)$$

Comme $q - 1 > 0$, le membre de droite tend vers $+\infty$, donc par comparaison $(q^n)_n$ aussi.

Pour $q = 1$, la suite est constante égale à 1. Pour $-1 < q < 1$, on a $0l \geq |q| < 1$. Si $q = 0$, la suite est constante égale à 0. Sinon, $\frac{1}{|q|} > 1$, donc $\frac{1}{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $q \leq -1$, on a $|q|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et (q^n) alterne de signe, donc diverge. ◈

Comme pour une suite u géométrique de raison q, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$, on peut se servir de la proposition précédente pour déterminer la limite d'une suite géométrique, selon q et le signe de u_0.

28.2.6 Complément sur les séries

Soit u une suite numérique. On appelle série de terme général u_n la suite des ses sommes partielles S_n définies comme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

On dit qu'une telle série converge lorsque (S_n) converge. Dans ce cas, la limite est notée

$$\sum_{k\geq 0} u_k$$

Proposition Soit $q \in \mathbb{R}$. Alors la série $\sum_{k\geq 0} q^k$ converge si, et seulement si, $-1 < q < 1$. Dans ce cas, sa limite est $\frac{1}{1-q}$.

Démonstration *Soit $n \in \mathbb{N}$. On note*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

Si $q = 1$, alors $S_n = n + 1$, donc (S_n) diverge. Sinon, on a

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Ainsi, la suite (S_n) converge si, et seulement si, $-1 < q < 1$, et dans ce cas, elle converge vers $\frac{1}{1-q}$. ◈

Revenons à notre exemple de l'aire du flocon de Koch. On a vu que cette suite converge (en tout cas, il semblait qu'elle converge).

On peut voir qu'à la n-ième itération de la construction, on rajoute 4^n triangles d'aires $\frac{1}{9^n}$. Ainsi, la suite des aires a une expression explicite donnée par :

$$A_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

Comme $-1 < \frac{4}{9} < 1$, cette suite converge, et ce, vers

$$A = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{5} = 1.8$$

ce qui est cohérent avec les observations faites.

29 Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

- **Niveau :** Première spécialité, Terminale spécialité, Terminale complémentaire
- **Pré-requis :** suites, raisonnement par récurrence, fonctions, continuité, intervalles, variations de fonctions, intégrales, limites de suite

29.1 Premiers éléments théoriques

29.1.1 Définitions

Définition Soit p un entier naturel non nul. Une suite $(u_n)_n$ récurrente d'ordre p est une suite définie par p termes consécutifs $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ et une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = f(u_n, \dots, u_{n+p-1}, n)$$

L'entier p est appelé ordre de récurrence.

Remarque Au lycée, on se restreint principalement à l'étude de suites récurrentes d'ordre 1, même si l'on peut étudier certaines suites récurrentes d'ordre 2. Par la suite, on parlera alors simplement de suites récurrentes.

Remarque Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_n$ une suite récurrente définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour que (u_n) soit bien définie, il faut que $u_0 \in I$, et que I soit stable par f, ie que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
Cela assure que l'on puisse appliquer f à u_n pour tout entier naturel n. On a alors $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

29.1.2 Monotonie et convergence

Dans toute cette partie, on considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que I soit un intervalle stable par f, et une suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in I$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition Si f est croissante sur I, alors (u_n) est monotone. Le sens de variation dépend alors du signe de $u_1 - u_0$:

- si $u_1 - u_0 \geq 0$, (u_n) est croissante
- si $u_1 - u_0 \leq 0$, (u_n) est décroissante

Démonstration

On suppose f croissante sur I, et on suppose que $u_1 - u_0 \geq 0$, ie que $u_1 \geq u_0$. On va démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

- ❖ ***Initialisation :*** *Par hypothèse, $u_1 \geq u_0$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.*
- ❖ ***Hérédité :*** *Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons que $u_{k+1} \geq u_k$. Comme f est croissante sur I, avec u_{k+1} et u_k appartenant à I, en appliquant f aux deux membres de l'inégalité précédente, on obtient :*

$$f(u_{k+1}) \geq f(u_k)$$

ie $u_{k+2} \geq u_{k+1}$. La propriété est donc héréditaire.

- ❖ ***Conclusion :*** *La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela prouve que (u_n) est croissante.*

Si $u_1 - u_0 \leq 0$, on applique le même raisonnement en inversant le sens des inégalités, ce qui montre que la suite est décroissante.

◈

Remarque On remarque que dans le cas où $u_1 - u_0 = 0$, ie $u_1 = u_0$, la suite est croissante et décroissante, et par conséquent est constante.

Proposition Si f est décroissante sur I, alors les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones, de sens de variations opposés, selon le signe de $u_2 - u_0$. Plus précisément :

- ❖ si $u_2 - u_0 \geq 0$, (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) est décroissante
- ❖ si $u_2 - u_0 \leq 0$, (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) est croissante

Démonstration

On note $g = f^2 = f \circ f$. On remarque alors que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont récurrentes d'ordre 1, et suivent la relation de récurrence $u_{2(n+1)} = g(u_{2n})$ et $u_{2(n+1)+1} = g(u_{2n+1})$.
Soient x et y dans I tels que $x \leq y$. Alors, par décroissance de f sur I, $f(x) \geq f(y)$, et $f(f(x)) \leq f(f(y))$, ie $g(x) \leq g(y)$. g est donc croissante sur I. On peut alors appliquer la proposition précédente aux deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Pour cela on remarque que comme f est décroisssante, $u_3 - u_1$ est de signe opposé à $u_2 - u_0$.

- ❖ *Si $u_2 - u_0 \geq 0$, alors (u_{2n}) est croissante. De plus, $u_3 - u_1 \leq 0$, donc (u_{2n+1}) est décroissante.*
- ❖ *Si $u_2 - u_0 \leq 0$, alors (u_{2n}) est décroissante. De plus, $u_3 - u_1 \geq 0$, donc (u_{2n+1}) est croissante.*

◈

Remarque On fera attention au fait que, contrairement aux suites définies explicitement par une relation du type $u_n = f(n)$, les sens de variation de (u_n) et de f ne sont pas identiques.

Théorème On suppose f continue sur I, et I fermé, ie de la forme $[a, b]$, $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$, ou $I = \mathbb{R}$. Si (u_n) converge vers un réel L, alors L est un point fixe de f, ie $f(L) = L$.

Démonstration

Au lycée, on admettra que $L \in I$. Cela vient du fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et que I est fermé, mais cet argument de topologie n'est pas accessible au lycée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = L$. Comme $L \in I$, f est continue en L. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(L)$. Ainsi, par passage à la limite dans la relation de récurrence, on a $f(L) = L$.

◈

Remarques ❖ Il est important de supposer que (u_n) converge. La continuité de f n'assure pas la convergence de la suite.

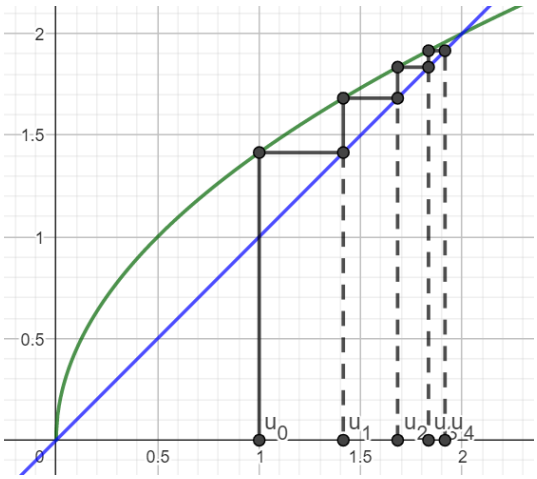
❖ Ce théorème est parfois nommé "théorème du point fixe" au lycée. Cependant, cette appellation renvoie plutôt à d'autres théorèmes (point fixe de Banach, point fixe de Brouwer, ...). Ceux-ci assure de l'existence d'un point fixe à une fonction, contrairement au théorème précédent, ce qui justifie leur nom.

Comme dit dans la remarque, ce théorème n'assure pas la convergence de la suite, mais il permet souent d'en trouver la limite lorsque celle-ci converge. On démontre alors régulièrement la convergence en amont, typiquement par des théorèmes de convergences de suites monotones (une suite croissante et majorée converge, une suite décroissante et minorée converge).

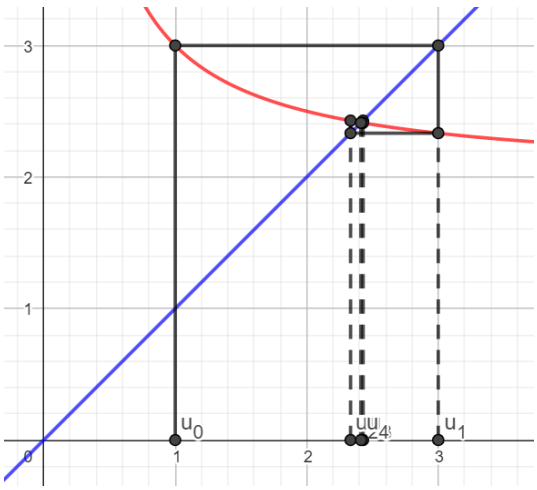
On peut toutefois conjecturer le comportement d'une suite récurrente d'ordre 1 graphiquement. Pour cela, on trace dans un repère les graphes de f et de la fonction identité $x \mapsto x$ sur I.

On place u_0 sur l'axe des abscisses, on trouve graphiquement à l'aide de la courbe représentative de f son image u_1, que l'on reporte sur l'axe des abscisses en se servant de la droite $y = x$. On recommence ensuite l'opération autant de fois que voulu.

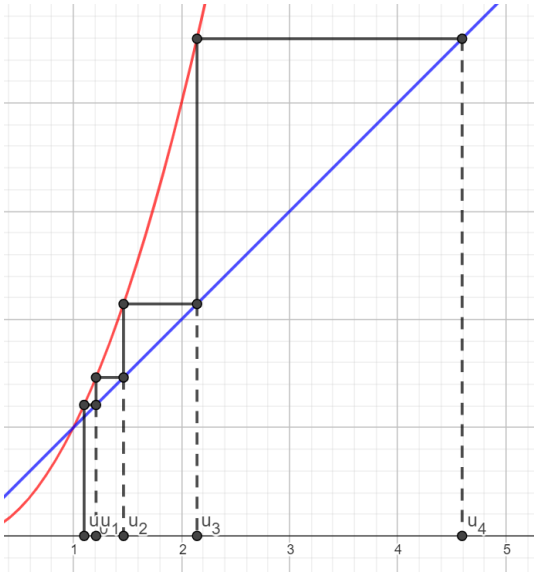
Voici quelques exemples de comportements. On fait figurer la courbe représentative de f en rouge, et la droite $y = x$ en bleu.



$f(x) = \sqrt{2x}$ *avec* $u_0 = 1$, *qui semble converger vers 2*



$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ *avec* $u_0 = 1$, *qui semble converger vers la solution de* $f(x) = x$



$f(x) = x^2$ *avec* $u_0 = 1,1$, *qui semble diverger vers* $+\infty$

29.2 Exemples de suites récurrentes

29.2.1 Suites arithmétiques et géométriques

Définition Soient $(u_n)_n$ une suite réelle, et r et q deux réels.

- On dit que (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
- On dit que (u_n) est géométrique de raison q si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$.

Proposition Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$. Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration

Cela résulte d'une récurrence triviale.

◈

Remarque Les suites arithmétiques et géométriques sont des suites définies par récurrence, mais pour lesquelles on dispose d'expressions explicites en fonction de n. On utilise alors plutôt ces expressions pour les étudier.

Proposition Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- si $r > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- si $r < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- si $r = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$

Démonstration

Si $r > 0$, $\lim_{n\to+\infty} nr = +\infty$, *et si* $r < 0$, $\lim_{n\to+\infty} nr = -\infty$, *d'où le résultat. Si* $r = 0$, (u_n) *est constante, donc converge vers* u_0.

◈

Proposition Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

1. si $q > 1$, (u_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon le signe de u_0.

2. si $q = 1$, (u_n) converge vers u_0.

3. si $-1 < q < 1$, (u_n) converge vers 0.

4. si $q \leq -1$, (u_n) diverge.

Démonstration

On commence par montrer l'inégalité de Bernouilli :

$$\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Soit $x > -1$. On procède par récurrence sur n.

- $(1+x)^0 = 1$ *et* $1 + 0 \times x = 1$, *donc l'inégalité est vraie pour* $n = 0$.
- *Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons que $(1+x)^k \geq 1 + kx$. Alors :*

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \\ &\geq (1+x)(1+kx) \quad \text{par hypothèse de récurrence, et car } 1+x > 0 \\ &\geq 1 + x + kx + kx^2 \\ &\geq 1 + (k+1)x\end{aligned}$$

  La propriété est donc héréditaire.
- *La prorpriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour $k \in \mathbb{N}$, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On va maintenant étudier la convergence de $(q^n)_n$.

1. *Supposons que $q > 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1)$$

d'après l'inégalité de Bernouilli, car $q > 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty} n(q-1) = +\infty$ (car $q > 1$), $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

2. *Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante égale à 1, donc converge vers 1.*

3. *Supposons que $-1 < q < 1$. Alors, $|\frac{1}{q}| > 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|q^n|} = +\infty$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.*

4. *Supposons que $q \leq -1$. Si $q = -1$, (q^n) alterne entre les valeurs 1 et -1, donc elle diverge. Si $q < -1$, alors $|q| > 1$, donc $|q^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En particulier, (q^n) diverge.*

On en déduit les résultats de la proposition, grâce à l'expression explicite d'une suite géométrique.

◆

29.2.2 Sommes

Définition Soit (u_n) une suite réelle. On appelle suite des sommes partielles de (u_n), et on note $(S_n)_n$, la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$S_{n+1} = S_n + u_n \quad \text{et} \quad S_0 = u_0$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Bien que l'on dispose d'une écriture sous la forme $\sum_{k=0}^{n} u_k$, cette expression n'est pas réellement explicite.

Proposition Soit (u_n) une suite réelle. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0$$

Démonstration *On a :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)&=\sum_{k=0}^{n}u_{k+1}-\sum_{k=0}^{n}u_k\\&=u_{n+1}-u_0+\sum_{k=0}^{n-1}u_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}u_k\\&=u_{n+1}-u_0+\sum_{k=1}^{n}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k \quad \textit{par changement d'indice}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_{n+1}-u_0$$

◈

Remarque On appelle ce type de somme, ou de la forme $\sum_{k=0}^{n}(u_k-u_{k+1})$ des sommes télescopiques.

Proposition Soient (u_n) une suite arithmétique de raison r et (v_n) une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n}u_k=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}v_k=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q\neq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}v_k=(n+1)v_0 \text{ si } q=1$$

Démonstration

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0+nr$ et $v_n=v_0q^n$. Ainsi :

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{n}u_k&=2\sum_{k=0}^{n}(u_0+kr)\\&=2(n+1)u_0+r\times 2\sum_{k=0}^{n}k\\&=2(n+1)u_0+r\times\left(\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}(n-k)\right) \quad \textit{par changement d'indice}\\&=2(n+1)u_0+r\times\sum_{k=0}^{n}n\\&=2(n+1)u_0+r\times n(n+1)\\&=(n+1)(2u_0+rn)\end{aligned}$$

$$2\sum_{k=0}^{n}u_k=(n+1)(u_0+u_n)$$

d'où le résultat sur (u_n).

Si $q=1$, la suite (v_n) est constante égale à v_0 d'où le résultat. On suppose à présent $q\neq 1$. Alors :

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n}v_k&=(1-q)\sum_{k=0}^{n}v_0q^k\\&=v_0\sum_{k=0}^{n}(q^k-q^{k+1})\\&=v_0(1-q^{n+1}) \quad \textit{car la somme est télescopique}\end{aligned}$$

d'où, puisque $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

◆

29.2.3 Suites arithmético-géométriques

Définition On appelle suite arithmético-géométrique toute suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$, avec a et b des réels.

Remarque Si $a = 1$, on a une suite arithmétique, et si $b = 0$, on a une suite géométrique. Ce type de suite englobe donc les suites arithmétiques et les suites géométriques, d'où leur nom. Leur étude détaillée n'est pas au programme du lycée, mais elle font souvent l'objet d'exercices.

On considère à présent une telle suite (u_n).

Proposition Si $a \neq 1$, alors la suite $\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)_n$ est géométrique de raison a.

Démonstration

On suppose que $a \neq 1$. On cherche un point fixe à la fonction $x \mapsto ax + b$.

$$x = ax + b \Leftrightarrow x(1-a) = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a} \quad \text{car } a \neq 1$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{b}{1-a} &= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= au_n + b - a\frac{b}{1-a} - b \\ &= a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right) \end{aligned}$$

La suite $\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$ est donc géométrique de raison a.

◆

Proposition On suppose que $a \neq 1$. Alors (u_n) converge si, et seulement si, $-1 < a < 1$. Dans ce cas, elle converge vers $\frac{b}{1-a}$.

Démonstration

D'après la proposition précédente, la suite $\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)_n$ est géométrique de raison a. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^n \Rightarrow u_n = \frac{b}{1-a} + a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)$$

On en déduit que (u_n) converge si,et seulement si, (a^n) converge, ie si et seulement si $-1 < a < 1$. Dans ce cas, on a $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b}{1-a}$.

On peut également retrouver cette limite remarquant que $x \mapsto ax + b$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, de point fixe $\frac{b}{1-a}$.

◆

29.2.4 Suites homographiques

Définition On appelle suite homographique toute suite récurrente définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et une relation de récurrence du type :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

avec a, b, c et d des réels tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

On ne présente pas ici l'étude détaillée de ce type de suite, qui n'est pas au programme au lycée. Cependant, de nombreux exercices portent sur ce type de suite.

29.2.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 toute suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$, et une relation de récurrence d'ordre 2 de la forme :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

où a et b sont des réels.

Remarque Si $b = 0$, à partir du deuxième terme la suite est géométrique de raison a. Si $a = 0$, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont géométriques de raison b.

Définition On appelle équation caractéristique de la suite (u_n) l'équation $x^2 - ax - b = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Proposition (admise)

- Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors il existe deux réels C et D tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = C{r_1}^n + D{r_2}^n$$
- Si l'équation caractéristique admet une unique racine réelle r_0, alors il existe deux réels C et D tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = (C + Dn){r_0}^n$$
- Si l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, avec $r > 0$, alors il existe deux réels C et D tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = r^n\Big(C\cos(n\theta) + D\sin(n\theta)\Big)$$

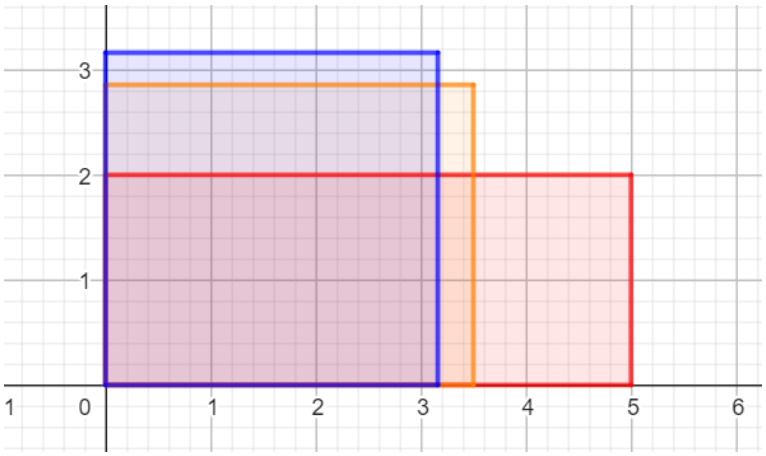
29.3 Applications

29.3.1 Méthode de Héron

La méthode de Héron (Héron d'Alexandrie, mathématicien grec du Ier siècle après J.C) est une méthode numérique d'extraction de racine carrée.

On considère un réel positif a dont on veut extraire la racine carrée. On considère un réel positif x quelconque, et l'on construit un rectangle d'aire a, dont l'une des dimensions est x. Sa seconde dimension est alors nécessairement $\frac{a}{x}$. On rend ensuite ce rectangle moins "rectangle" et plus "carré" en le remplaçant par un rectangle d'aire a dont l'une des dimensions est la moyenne arithmétique $\frac{x+\frac{a}{x}}{2}$ de ses dimensions.

Ici un exemple, où l'on cherche à approximer $\sqrt{10}$. On démarre d'un rectangle de longueur 5, donc de largeur 2 (en rouge). On construit un nouveau rectangle (en orange), d'aire 10 et dont l'une des dimensions est $\frac{5+2}{2} = 3,5$. Sa seconde dimension est alors $\frac{10}{3,5}$. Il suffit alors de recommencer le processus, pour se rapprocher du carré bleu, de côté $\sqrt{10}$.



Cette méthode fait apparaître la suite x_n des dimensions successives des rectangles, que l'on définit par récurrence par la relation $x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$.

On peut alors montrer que cette suite est décroissante et minorée, donc elle converge. La fonction $x \mapsto \frac{x+\frac{a}{x}}{2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, si bien que la limite L de la suite vérifie $L = \frac{L+\frac{a}{L}}{2}$, ie $L^2 = a$.

29.3.2 Intégrales de Wallis

Exercice Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n-ième intégrale de Wallis l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie.

2. Calculer I_0 et I_1.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

4. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc I_n est bien définie.

2. On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = \Big[-\cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \cdot \sin(t)dt$$

Les fonctions $t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont dérivables et de dérivée continue sur $[0,1]$. On peut alors intégrer par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)\times(n+1)\cos(t)\sin^n(t)dt \\
&= \cos(0)\sin^{n+1}(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\sin^n(t)dt \\
&= 0 - 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2(t)\right)\sin^n(t)dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}(t)dt \\
I_{n+2} &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

4. On procède par récurrence sur p. Pour $p=0$, le résultat a été prouvé à la question 2. Soit $p\in\mathbb{N}$ quelconque, et supposons le résultat acquis pour p. Alors

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} &= I_{2p+2} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2}I_{2p} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\times\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{(2p+1)(2p+2)}{2\times2\times(p+1)\times(p+1)} \\
&= \frac{\pi}{2}\times\frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}
\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)+1} &= I_{2p+3} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3}I_{2p+1} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3}\times\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\times\frac{2\times2\times(p+1)\times(p+1)}{(2p+2)(2p+3)} \\
&= \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient donc le résultat voulu.

Remarque Ces intégrales apparaissent dans différents problèmes où leur expression explicite est utile : approximation de π, problème de Bâle (par les intégrales), intégrale de Gauss ou encore détermination de la constante dans le formule de Stirling.

29.3.3 Suite logistique

Définition On appelle suite logistique toute suite récurrente (u_n) définie par une relation de récurrence du type :

$$u_{n+1} = cu_n(1-u_n)$$

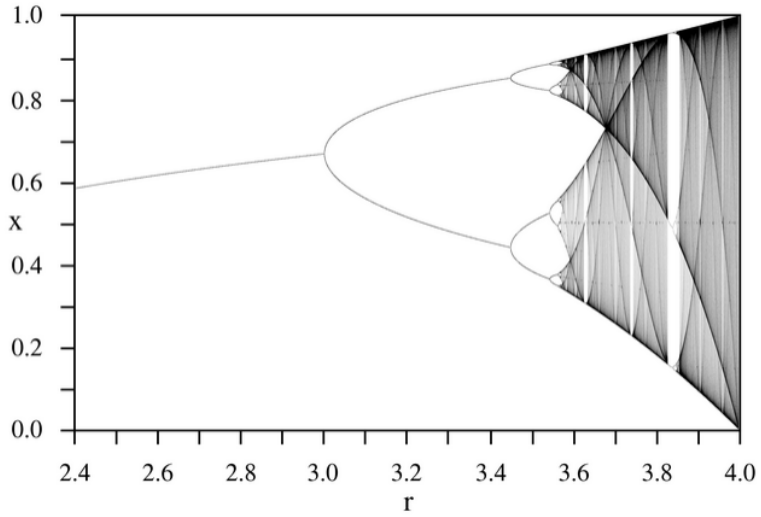
avec $u_0\in[0,1]$, et $c\in[0,4]$.

Ce type de suite modélise des évolutions de populations dans un modèle proie/prédateur. Plus précisément, elle sont les solutions discrètes du modèle de Verhulst, et la suite (u_n) représente alors un rapport entre la population actuelle d'une espèce et la population maximale de cette espèce.

Sans donner de justifications, on peut étudier le comportement de cette suite pour plusieurs valeurs de c.

- Pour $c \in [0,1]$, (u_n) converge vers 0.
- Pour $c \in [1,3]$, (u_n) converge vers $\frac{c-1}{c}$.
- Pour $c \in]3, \sim 3.57[$, la suite (u_n) oscille entre 2, 4, 8, ... valeurs (les puissances de 2) au fur et à mesure que c se rapproche de 3,57 environ.
- Pour $c \in [\sim 3.57, 4]$, le comportement de la suite (u_n) est chaotique : elle n'oscille pas entre un nombre fini de valeurs, sauf pour quelques valeurs de c, dans certains intervalles.

On représente cela dans un diagramme de bifurcation. En abscisse, on fait figurer le paramètre c (ici noté r), et en ordonnée les valeurs autour desquelles la suite oscille (plus précisément, les valeurs d'adhérences de la suite).



https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_logistique

30 Détermination de limites de fonctions réelles de variable réelle

❖ **Niveau :** Terminale complémentaire, Terminale spécialité

❖ **Pré-requis :** fonctions, dérivation, fonctions exponentielles et logarithmes, continuité

30.1 Limites de fonctions

30.1.1 Approche intuitive

Le but de la notion de limite de fonction est d'examiner le comportement d'une fonction en un point fini, ou en l'infini. On cherche donc à savoir comment se comporte $f(x)$ lorsque x se rapproche d'un réel a, ou bien de $\pm\infty$. On a 4 possibilités :

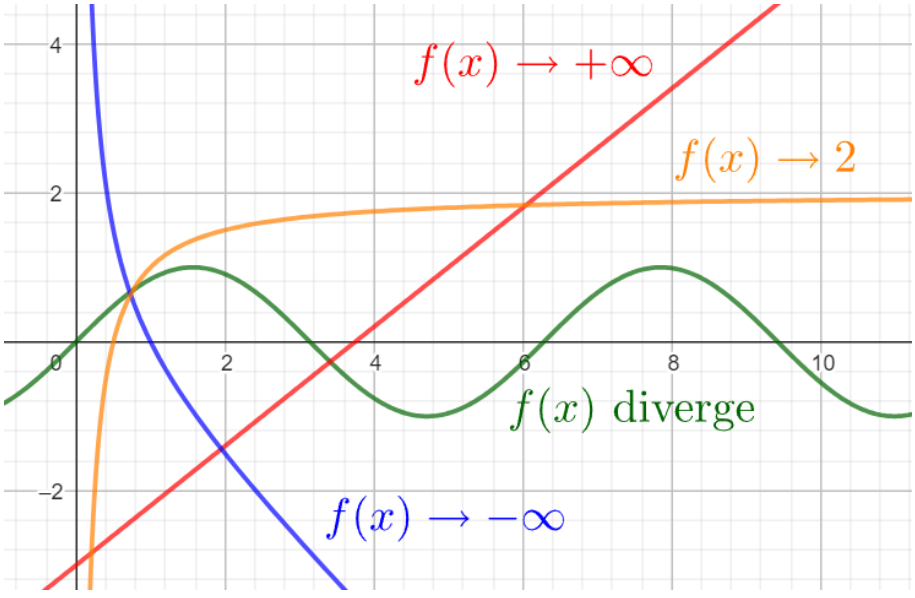
1. $f(x)$ se rapproche d'un certain réel L : dans ce cas on dit que $f(x)$ converge vers L, lorsque x tend vers a, ou $\pm\infty$. Si ce n'est pas le cas, on dit que $f(x)$ diverge lorsque x tend vers a, ou $\pm\infty$.

2. $f(x)$ croît "sans plafond", auquel cas on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a, ou $\pm\infty$.

3. On a le même comportement vers $-\infty$, où l'on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a, ou $\pm\infty$.

4. Le comportement de $f(x)$ ne correspond à aucun des 3 cas précédents, et l'on dit simplement que $f(x)$ diverge lorsque x tend vers a, ou $\pm\infty$.

Voici quelques exemples (en $+\infty$) représentés par les courbes (on détaillera un peu plus loin les conséquences sur les courbes).



30.1.2 Définitions

Donnons maintenant une définition précise de ces notions de limites de fonctions. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Définition (Limites en $+\infty$)

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si pour tout réel M, il existe un réel A tel que, si $x \geq A$, alors $f(x) \geq M$.
  On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si pour tout réel m, il existe un réel A tel que, si $x \geq A$, alors $f(x) \leq m$.
  On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers un réel L lorsque x tend vers $+\infty$, si pour n'importe quel intervalle ouvert I centré en L, donc de la forme $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, il existe un réel A tel que, si $x \geq A$, alors $f(x) \in I$.
  On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.

La première condition énonce que pour chaque "plafond" M, $f(x)$ finit par le dépasser (sans retomber en dessous), à condition de dépasser un certain réel A. La seconde est analogue à la première, avec un "plancher" m.

La troisième condition est à comprendre ainsi : peu importe la précision ε (la moitié de la longueur de l'intervalle I) que l'on souhaite autour de L, $f(x)$ finit par être proche de L (au sens que $|f(x) - L| < \varepsilon$), à condition de dépasser un certain réel A.

On a bien sûr des définitions analogues pour des limites en $-\infty$.

Définition (Limites en $-\infty$)

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si pour tout réel M, il existe un réel A tel que, si $x \leq A$, alors $f(x) \geq M$.
  On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ si pour tout réel m, il existe un réel A tel que, si $x \leq A$, alors $f(x) \leq m$.
  On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers un réel L lorsque x tend vers $-\infty$, si pour n'importe quel intervalle ouvert I centré en L, donc de la forme $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, il existe un réel A tel que, si $x \leq A$, alors $f(x) \in I$.
  On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} L$.

Pour des limites lorsque x tend vers un réel a, il suffit de modifier la condition "$x \geq A$" ou "$x \leq A$", qui exprimait le fait que x tende vers $+\infty$ ou $-\infty$. On peut la remplacer par "pour x assez proche de a", que l'on peut formaliser en disant qu'il existe une distance $\delta > 0$ telle que $|x - a| < \delta$, c'est-à-dire $x \in]a-\delta, a+\delta[$.

Définition (Limites en a)

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si pour tout réel M, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta, a+\delta[$, alors $f(x) \geq M$.
  On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si pour tout réel m, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta, a+\delta[$, alors $f(x) \leq m$.
  On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers un réel L lorsque x tend vers a, si pour n'importe quel intervalle ouvert I centré en L, donc de la forme $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, si $x \in]a-\delta, a+\delta[$, alors $f(x) \in I$.
  On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$.

Cette condition "il existe un $\delta > 0$ tel que $x \in]a-\delta, a+\delta[$" peut être remplacée par "il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $x \in J$".

30.1.3 Opérations

On considère deux fonctions réelles f et g, et deux réels L et L'. Les trois propositions suivantes sont valables pour des limites en a, ou en $\pm\infty$.

Proposition (admise)(Somme)

$\lim f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f+g)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Proposition (admise)(Produit)

$\lim f$	L	L	$\pm\infty$	0
$\lim g$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim(fg)$	LL'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Proposition (admise)(Quotient) On suppose que $L' \neq 0$.

$\lim f$	L	L	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	L'	0	$\pm\infty$	L'	$\pm\infty$	0
$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	FI	FI

Les signes $\pm$ sont à déterminer en utilisant les règles des signes sur les produits et les quotients (attention, quand la limite vaut 0, il faut faire attention au signe). La sigle "FI" signifie "forme indéterminée". Cela veut dire que la seule connaissance des limites de f et g ne permet pas de conclure.

30.2 Limites et courbes représentatives

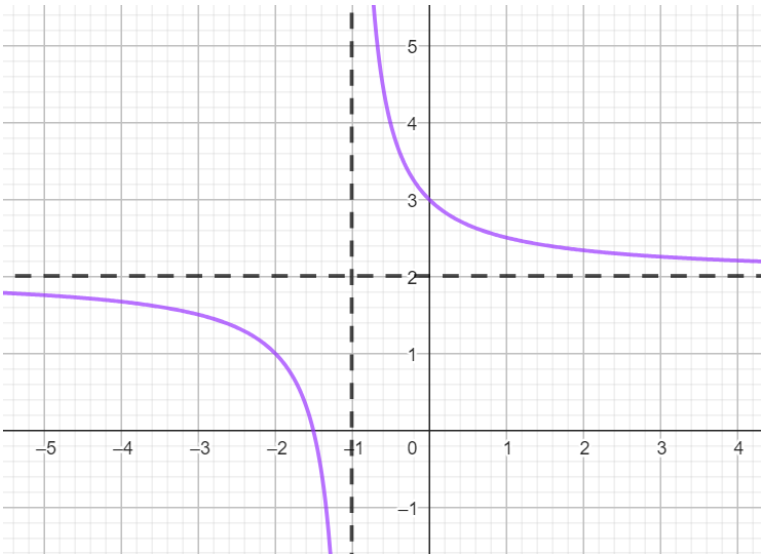
Nous avons déjà aperçu quelques exemples d'interprétations graphiques de limites de fonctions. Il existe deux cas particuliers intéressants.

Définition On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- On dit que la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale $y = L$, si cette courbe se "rapproche" de la droite d'équation $y = L$. Cela signifie que $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} L$.
- On dit que la courbe représentative de f admet une asymptote verticale $x = a$, si cette courbe se "rapproche" de la droite d'équation $x = a$. Cela signifie que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$.

Remarque Pour les asymptotes verticales, le résultat reste vrai si la limite n'est vérifié que pour $x < a$ ou $x > a$.

Ce type de considération est particulièrement utile pour tracer des courbes représentatives. Voici un exemple avec la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x+1} + 2$, qui admet $x = -1$ comme asymptote verticale et $y = 2$ comme asymptote verticale.



Remarque Il est également possible d'avoir des asymptotes obliques d'équations $y = ax + b$. Dans ce cas, il faut que $f(x) - (ax + b) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$. On peut en fait généraliser cela à n'importe quelle fonction, en utilisant la notion d'équivalents.

30.3 Techniques de calculs de limites

Voyons à présent certaines techniques de calculs de limites. On a déjà vu comment utiliser les opérations algébriques usuelles.

30.3.1 Composition

Commençons par un rappel. Du point de vue des limites de fonctions, on peut réinterpréter le continuité ainsi : une fonction réelle f est continue sur un intervalle I si pour tout $a \in I$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

Proposition Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$ deux fonctions et $a \in J$, $b \in I$. Si f est continue en b et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$, alors $f\big(g(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} f(b)$.

Démonstration *C'est une simple application de la caractérisation de la continuité par les limites de fonctions, énoncée plus tôt.* ◈

Cela donne accès à des calculs de limites de fonctions bien plus complexes que les fonctions usuelles.

30.3.2 Plus haut degré

Cette technique est utile pour déterminer des limites de fonctions rationnelles, c'est-à-dire des quotients de fonctions polynomiales.

Proposition Soit f une fonction polynomiale que l'on écrit sous la forme $f : x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, avec n son degré et $a_0, \ldots, a_n$ des réels. Alors la limite en $\pm\infty$ de f est la même que celle de $x \mapsto a_n x^n$.

Démonstration *On remarque que $a_n \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \cdot \frac{1}{x^n}\right)$$

Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\frac{1}{x^k} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, donc le facteur de droite tend vers 1, d'où le résultat. ◈

Proposition Soient f et g deux fonctions polynomiales que l'on écrit $f : x \mapsto a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ et $g : x \mapsto b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0$, où n et m sont les degrés de f et g, et $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$ sont des réels. Alors la limite de $\frac{f}{g}$ en $\pm\infty$ est la même que $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$.

Démonstration *Il suffit d'utiliser la proposition précédente et la tableau sur la limite d'un quotient.* ◈

30.3.3 Comparaison

Tout comme pour les suites, on dispose de théorèmes de comparaison. Les deux théorèmes suivants sont valables pour des limites en a, ou en $\pm\infty$.

Théorème Soient f et g deux fonctions réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq f(x)$.

- Si $g(x) \to +\infty$, alors $f(x) \to +\infty$.
- Si $f(x) \to -\infty$, alors $g(x) \to -\infty$.

Démonstration

- *Supposons que $g(x) \to +\infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Alors au voisinage de $\pm\infty$ (donc pour $x \geq A$ ou $x \leq A$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$), ou au voisinage de a (donc pour $x \in]a-\delta, a+\delta[$ pour un certain $\delta > 0$), on a $g(x) \geq M$. Or dans ce voisinage, $f(x) \geq g(x) \geq M$, d'où le résultat.*
- *Il suffit de considérer le cas précédent et de multiplier par -1, donc de l'appliquer à $-f$ et $-g$.*

◈

Théorème (Théorème des gendarmes) Soient f, g, h trois fonctions réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Si il existe un réel L tel que $f(x) \to L$ et $h(x) \to L$, alors $g(x) \to L$.

Démonstration *Soit I un intervalle contenant L. Par hypothèse, il existe un voisinage de $\pm\infty$ (donc pour $x \geq A$ ou $x \leq A$ pour un certain $A \in \mathbb{R}$), ou un voisinage de a (donc pour $x \in]a-\delta, a+\delta[$ pour un certain $\delta > 0$), tel que pour x dans ce voisinage, on ait $f(x) \in I$ et $h(x) \in I$. Comme $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et comme I est un intervalle, on a $g(x) \in I$, d'où le résultat.* ◈

Remarque On peut en réalité affaiblir un peu les hypothèses en supposant les inégalités vraies seulement au voisinage de a, ou de $\pm\infty$.

30.3.4 Croissances comparées

On a vu comment comparer des fonctions polynomiales avec la règle du plus haut degré. Les théorèmes de croissances comparées nous permettent de rajouter à cette famille de fonctions les fonctions exponentielles et logarithmes.

Théorème Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

$$\frac{e^x}{x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad x^n e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

Démonstration *On remarque en écrivant pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:*

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = n^n \times \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)$$

qu'il suffit de démontrer le cas $n = 1$, puis de l'appliquer à $y = \frac{x}{n}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$. Celle-ci est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = e^x - x \qquad \text{et} \qquad f''(x) = e^x - 1$$

On a donc $f''(x) > 0$ pour $x > 0$, donc f' est croissante sur $]0, +\infty[$. Or, $f'(0) = 1$, donc f' est positive sur $]0, +\infty[$, et f y est croissante. On a $f(0) = 1$, donc f est positive sur $]0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $e^x \geq \frac{x^2}{2}$, donc $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$, d'où le résultat par comparaison.

Pour la seconde limite, on remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$x^n e^x = (-1)^n \frac{(-x)^n}{e^{-x}}$$

Or, par le premier point, $\frac{e^{-x}}{(-x)^n} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, d'où la seconde limite. ◈

Théorème Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

$$\frac{\ln(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad x^n \ln(x) \xrightarrow[x\to0,\ x>0]{} 0$$

Démonstration *On remarque qu'en écrivant pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$*

$$\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}} \qquad \text{et} \qquad x^n \ln(x) = x^{n-1} \times x \ln(x)$$

il suffit de prouver le résultat pour $n = 1$.

On commence par la première limite. On définit sur $]1, +\infty[$ la fonction f par $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$. Celle-ci est dérivable et pour $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Pour $x \geq 1$, $f'(x) \geq 0$, donc f est décroissante sur $]1, +\infty[$. Or, $f(1) = -2 < 0$, donc pour tout $x \geq 1$, $\ln(x) \leq 2\sqrt{x}$. Ainsi, $0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Pour la seconde, on remarque que pour $x > 0$, on a

$$x \ln(x) = -x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to0,\ x>0]{} +\infty$, on déduit du premier point que $x \ln(x) \xrightarrow[x\to0,\ x>0]{} 0$. ◈

30.3.5 Approximation affine

Un cas particulier de limites de fonctions est la cas des nombres dérivés. En effet, la définition de la dérivabilité d'une fonction fait effectivement apparaître le nombre dérivé comme une limite de fonction '"taux d'accroissement". Cela permet de déterminer certaines limites. Donnons quelques exemples :

- On a $\cos' = -\sin$, donc
$$\frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} -\sin(0) = 0$$
- On a $\sin' = \cos$, donc
$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \cos(0) = 1$$
- On a $\exp' = \exp$, donc
$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x-e^0}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 = 1$$

Ce type de procédé revient à remplacer une fonction f dérivable par son approximation affine $f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)$. ce procédé d'approximation d'une fonction par des fonctions polynomiales peut se poursuivre avec des degrés plus élévés (sous certaines hypothèses de régularité sur f) via les formules de Taylor, qui amènent à des développements limités.

30.3.6 Règle de l'Hôpital

La règle de l'Hôpital est une technique de calcul de limites non étudiée au lycée, mais dont l'utilisation est accessible.

Théorème (Règle de l'Hôpital) Soient f et g deux fonctions réelles dérivables en $a \in \mathbb{R}$ et telles que $f(a) = g(a) = 0$. Si g et g' ne s'annulent pas au voisinage de a, et si le quotient $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ converge vers un réel L quand x tend vers a, alors il en est de même de $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Démonstration *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ distinct de a, par le théorème des accroissements finis (appliqué à f et g), il existe c compris entre a et x tel que*
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$
Puisque c est compris entre x et a, lorsque x tend vers a, il en est de même de c, d'où le résultat. ◈

Un exemple d'application de cette règle est la détermination de la limite de $x-\sqrt{x^2-x}$ quand x tend vers $+\infty$. Puisque l'on s'intéresse à une limite en $+\infty$, on peut supposer $x > 0$ et considérer $h = \frac{1}{x}$. On cherche alors la limite quand h tend vers 0, $h > 0$. L'expression précédente devient alors :
$$x-\sqrt{x^2-x} = \frac{1}{h} - \sqrt{\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h}} = \frac{1}{h} - \frac{\sqrt{1-h}}{h} = \frac{1-\sqrt{1-h}}{h}$$
On pose alors $f(h) = 1-\sqrt{1-h}$ et $g(h) = h$. Ces fonctions sont dérivables en 0 et vérifient $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. Pour $h > 0$, on a
$$\frac{f'(h)}{g'(h)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-h}}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{1-h}} \xrightarrow[h\to 0,\ h>0]{} \frac{1}{2}$$
On en déduit que
$$x-\sqrt{x^2-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

31 Théorème des valeurs intermédiaires

- **Niveau :** Terminale spécialité, Terminale complémentaire
- **Pré-requis :** fonctions, injections, surjections, bijections, continuité, intervalles, dérivation, limites de fonctions

31.1 Rappels sur la continuité

La notion de fonction continue est centrale dans cette leçon. Nous faisons donc quelques rappels en premier lieu.

Définition Soit f une fonction réelle. On dit que f est continue en un réel a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

On dit que f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout réel a de I.

Proposition (admise) Soient f, g deux fonctions réelles, a un réel et λ, μ deux réels. On suppose que f et g sont continues en a. Alors :

- $\lambda f + \mu g$ est continue en a.
- fg est continue en a.
- Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition (admise) Soient f et g deux fonctions réelles, a un réel. On suppose que f est continue en a et que g est continue en $f(a)$.
Alors, $g \circ f$ est continue en a.

La définition des limites de fonctions au lycée (sans quantificateurs) ne permet pas de démontrer ces propositions.

Remarque Ces deux propositions rendent continues la grande majorité des fonctions étudiées au lycée, et ce, sur leur domaine de définition.

31.2 Théorème des valeurs intermédiaires

31.2.1 Théorème et équations

Dans cette partie, on considère un segment $[a, b]$ tel que $a < b$.

Théorème Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration

Commençons par remarquer que si $f(a) = 0$, ou $f(b) = 0$, le résultat est trivial. On suppose donc à présent que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. En effet, le théorème appliqué à f est équivalent au théorème appliqué à $-f$.

Le principe de la démonstration se base sur la méthode de dichotomie. On va s'en servir pour construire un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.
On définit deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par récurrence comme suit :

- *On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.*
- *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(m_n) \geq 0$, on définit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$, et si $f(m_n) < 0$, on définit $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.*

On va prouver que ces deux suites vérifient les conditions suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a \leq a_n \leq b_n \leq b$
- $f(a_n) \leq 0$ *et* $f(b_n) \geq 0$
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

Pour cela, on procède par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \text{"} a \leq a_n \leq b_n \leq b,\ f(a_n) \leq 0,\ f(b_n) \geq 0,\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \text{"}$$

- ***Initialisation :*** *Pour $n = 0$, on a $a_0 = a$ et $b_0 = b$, donc le résultat est trivial.*
- ***Hérédité :*** *Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie. Si $f(m_n) \geq 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$. Comme $a_n \leq b_n$ par hypothèse de récurrence, on a $a_n \leq m_n \leq b_n$, donc*

  $$a \leq a_{n+1} = a_n \leq b_{n+1} = m_n \leq b_n \leq b$$

  On a également par hypothèse de récurrence $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq 0$ et $f(b_{n+1}) = f(m_n) \geq 0$, et

  $$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

  Si $f(m_n) < 0$, on a $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$. On démontre de la même façon les propriétés précédentes. $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie, et la propriété est héréditaire.
- ***Conclusion :*** *Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq m_n \leq b_n$, donc la suite $(a_n)_n$ est croissante et la suite (b_n) est décroissante. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, on a $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

On a donc construit deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que :

- *$(a_n)_n$ est croissante et $(b_n)_n$ est décroissante.*
- $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

Ces deux suites sont donc adjacentes. On en déduit qu'elles sont toutes deux convergentes, et ce, vers une même limite c telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c \leq b_n$. En particulier, $c \in [a,b]$.
On a $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c$, et f est continue en c, donc $(f(a_n))_n$ est $(f(b_n))_n$ convergent toutes les deux vers $f(c)$. Or, par définition de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$. On en déduit, en passant à la limite que $f(c) \leq 0 \leq f(c)$, et donc que $f(c) = 0$.

◈

Remarque Ce théorème assure l'existence de solutions pour de nombreuses équations de la forme $f(x) = 0$. Toutefois, il ne donne pas de façon explicite ces solutions. On peut tout de même les approcher par balayage ou par dichotomie par exemple.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration
Soit k compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On remarque que la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - k$ est continue sur $[a, b]$. De plus, comme k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, $g(a)$ et $g(b)$ sont de signes contraires.
D'après le théorème précédent, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(x) = k$.

◈

Le premier théorème est en fait un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, qui lui est équivalent.

Remarque Une autre formulation de ce théorème est de dire que $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ est surjective (si $f(a) \leq f(b)$, sinon le deuxième intervalle est dans l'autre sens).

Remarques
- ❖ La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par 0 en 0 vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sur $\mathbb{R}$. Pourtant, elle n'est pas continue en 0. Il existe donc des fonctions non continues qui vérifient ce théorème. Il ne s'agit donc pas d'une équivalence.
- ❖ Il est important de supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est cela qui permet de construire c à l'aide des suites adjacentes. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{ix}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, est continue sur $[0, \pi]$, vérifie $e^{i\times 0} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, et pourtant cette fonction ne s'annule pas sur cet intervalle.

31.2.2 Corollaire

Proposition Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est injective sur I.

Démonstration
Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Par monotonie stricte de f sur I, on a soit $f(x) < f(y)$, soit $f(x) > f(y)$. Dans les deux cas, $f(x) \neq f(y)$, donc f est injective sur I.

◈

Corollaire (du théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors, pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration
Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $c \in [a, b]$. Comme f est strictement monotone sur $[a, b]$, elle y est injective, ce qui prouve l'unicité de c.

◈

Ce corollaire est donc une version plus forte du théorème des valeurs intermédiaires, qui assure l'unicité de solutions à certaines équations de la forme $f(x) = k$.

31.3 Applications

31.3.1 Image d'un intervalle et d'un segment

Proposition L'image d'un intervalle (respectivement d'un segment) par une fonction réelle continue est un intervalle (respectivement un segment).

Démonstration

Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. On rappelle que l'image de I par f est

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in I, y = f(x)\}$$

$f(I)$ est clairement non vide. Si $f(I)$ est un singleton, c'est en particulier un intervalle (et un segment). Sinon, on peut considérer $y_1, y_2 \in f(I)$ distincts. Par définition, il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Soit y compris entre y_1 et y_2 (qui existe car y_1 et y_2 sont distincts). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x compris entre y_1 et y_2 tel que $y = f(x)$, ce qui assure que $y \in f(I)$. $f(I)$ est donc un intervalle.

Au lycée, on admettra la suite de cette preuve. On suppose maintenant que I est un segment de la forme $[a, b]$, avec $a < b$. On vient de voir que $f([a, b])$ est un intervalle. Comme f est continue, d'après le théorème des bornes atteintes, f est bornée sur $[a, b]$ (ce qui assure que $f(I)$ est bornée), et atteint ses bornes (ce qui assure que $f(I)$ est fermé). On en déduit que $f(I)$ est un segment.

◈

31.3.2 Théorème de la bijection

Théorème (Théorème de la bijection) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$, selon le signe de $f(b) - f(a)$.

Démonstration

f vérifie les hypothèses du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Elle est donc surjective à valeurs dans $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, et injective sur $[a, b]$ car strictement monotone. Elle réalise donc une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$.

◈

Remarque Ce théorème s'applique également aux cas où a, b, $f(a)$ ou $f(b)$ valent $+\infty$ ou $-\infty$, quitte à considérer des limites de f en $+\infty$ ou $-\infty$.

31.3.3 Un théorème du point fixe

Théorème (Théorème du point fixe de Brouwer) Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Alors f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Démonstration

On définit sur $[a, b]$ la fonction g par $g(x) = f(x) - x$. g est alors continue sur $[a, b]$. Comme f est à valeurs dans $[a, b]$, on a en particulier $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$. Ainsi, $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

◈

31.4 Un théorème de Darboux

Nous allons présenter dans cet appendice un théorème de Darboux qui généralise le théorème des valeurs intermédiaires. Cependant, pour le démontrer, nous aurons besoin du théorème des accroissements finis, qui est hors programme. On le donne donc sans démonstration.

Théorème (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Théorème (Théorème de Darboux) Soit $f : [a,b] \in \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = k$.

Démonstration

Soit k compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Si $k = f'(a)$ ou $k = f'(b)$, le résultat est trivial. On supopse désormais que k est distinct de $f'(a)$ et $f'(b)$.

On définit deux fonctions g et h sur $[a,b]$ comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

On a ainsi $g(a) = f'(a)$, et $h(b) = f'(b)$.

Remarquons que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = g(b) = h(a)$. Ainsi, ce taux d'accroissements appartient aux images de $[a,b]$ par g et par h. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ces deux images sont des intervalles. Puisqu'ils contiennent un point en commun, leur réunion est encore un intervalle.

Cet intervalle contient les deux réels $f'(a) = g(a)$ et $f'(b) = h(b)$. Comme k est compris entre ces deux valeurs, il appartient à cet intervalle. Il existe donc un réel $d \in [a,b]$ tel que $k = g(d)$ ou $k = h(d)$. Puisque k est distinct de $f'(a)$ et $f'(b)$, d est distinct de a et b.

Ainsi, k est de la forme $\frac{f(d)-f(a)}{d-a} = g(d)$ ou $\frac{f(d)-f(b)}{d-b} = h(d)$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe donc $c \in]a,d[$ ou $c \in]d,b[$, donc dans les deux cas dans $[a,b]$, tel que $f'(c) = k$.

◈

Ce théorème affirme donc que les fonctions qui sont des dérivées vérifient le théorème des valeurs intermédiaires, qu'elles soient continues ou non. De plus, d'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions continues sur un segment y admettent des primitives, donc sont des dérivées. En cela, ce théorème de Darboux est une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires.

Remarque Ce théorème énonce donc que certaines fonctions potentiellement non continues vérifient le théorème des valeurs intermédiaires. Mais de telles fonctions, dérivables mais de dérivées non continues existent-elles ? C'est par exemple le cas de la fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, prolongée par 0 en 0. On peut montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ entier (car $\frac{f(x)}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0), mais sa dérivée n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

32 Nombre dérivé. Fonction dérivée.

- **Niveau :** Première spécialité, Terminale spécialité, Terminale complémentaire
- **Pré-requis :** fonctions, équations de droite, taux d'accroissement d'une fonction, limites de fonctions, tangente à une courbe, continuité, binôme de Newton

32.1 Différentes représentations

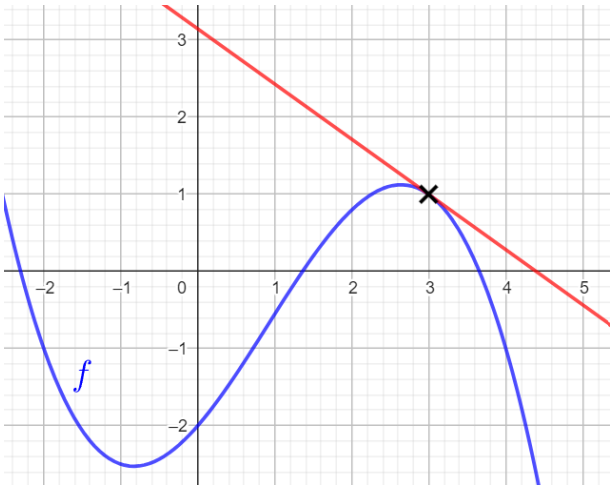
Dans toute cette leçon, on considère un intervalle I, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, et un réel $x_0 \in I$.

On sait que l'on peut quantifier la croissance de f entre deux points. Cependant, peut-on le faire en un seul point ? C'est ce que nous allons étudier ici.

32.1.1 Approche géométrique

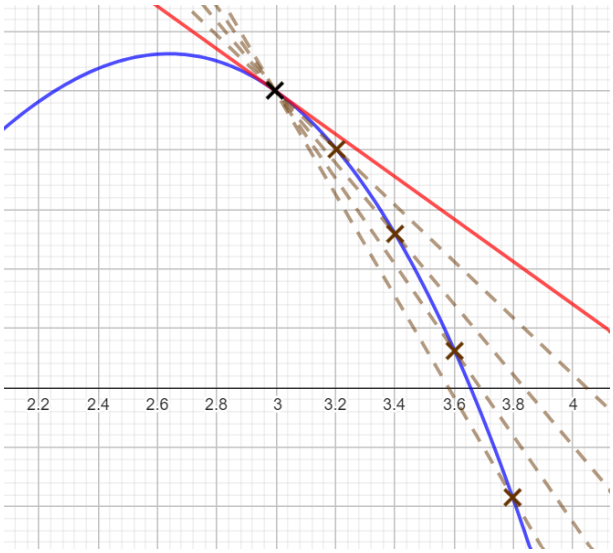
On cherche une façon de quantifier la "vitesse" de croissance de f en x_0, c'est-à-dire la "vitesse" d'évolution de sa courbe en $(x_0, f(x_0))$. Pour cela, on remarque que la tangente à cette courbe en ce point donne une "direction" vers laquelle la courbe évolue.

On va alors définir cette "vitesse" de croissance comme le coefficient directeur de cette tangente. C'est ce nombre que l'on va appeler nombre dérivé de f en x_0. On le note $f'(x_0)$.



On peut "approcher" cette tangente par des sécantes successives entre le point $(x_0, f(x_0))$ et des points $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, avec h de plus en plus petit.

On peut alors approcher le nombre dérivé par les taux d'accroissements successifs de ces tangentes.



On va à présent définir plus rigoureusement le nombre dérivé, en accord avec cette première approche géométrique.

32.1.2 Définition

Définition On dit que f est dérivable en x_0 si l'expression

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite lorsque $h \to 0$.
Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivée de f en x_0, et est noté $f'(x_0)$.

Remarque On remarque que l'expression $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est le taux d'accroissement de la sécante à la courbe représentative de f passant par les points d'abscisses x_0 et $x_0 + h$, ce qui est en accord avec l'approche géométrique.

Proposition On suppose f dérivable en x_0. Alors la tangente à la courbe représentative de f en x_0 a pour équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Démonstration *On note $y = ax + b$ l'équation de cette tangente, avec a et b des réels. On a alors $a = f'(x_0)$, au vu de l'approche géométrique. On a également :*

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

d'où

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

ce qui assure que l'équation de la tangente est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

◈

32.1.3 Approximation affine

Proposition On suppose f dérivable en x_0. Il existe alors une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varphi(h)$$

Démonstration *Pour tout $h \in \mathbb{R}$ non nul tel que $x_0 + h \in I$, on définit*

$$\varphi(h) = f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

de sorte que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$$

Il reste donc à démontrer que $\lim_{h\to} \varphi(h) = 0$, c'est-à-dire que

$$\lim_{h\to 0} f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

Or, ceci est vrai puisque f est dérivable en x_0, d'où le résultat. ◈

Remarque On en déduit que pour $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0)$$

Ainsi, lorsque x est proche de x_0, $f(x)$ est proche de $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. On approxime alors f localement comme une fonction affine, d'où le nom d'approximation affine.
Cela revient à approcher la courbe représentative de f autour de $(x_0, f(x_0))$ par sa tangente en ce point.

De plus, l'erreur d'approximation est $(x - x_0)\varphi(x - x_0)$. Comme $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, cette approximation est donc la meilleure approximation par une fonction affine possible.

32.2 Fonction dérivée

32.2.1 Dérivabilité

Définition On dit que f est dérivable sur I si elle l'est en tout point de I.

Définition On suppose f dérivable sur I. On définit la fonction dérivée de f sur I comme la fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Proposition Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Démonstration
Comme f est dérivable en x_0, on peut écrire, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x - x_0)$$

Puisque $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$, on a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

donc f est continue en x_0.

◈

Remarque La dérivabilité est donc une propriété plus forte que la continuité. La réciproque de ce résultat est faux. Par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0, mais n'y est pas dérivable.
En effet, les taux d'accroissements limites sont différents à gauche et à droite.

Proposition On considère $u, v : I \to \mathbb{R}$ dérivables en x_0, et un réel λ. Alors

1. λu est dérivable en x_0 et
$$(\lambda u)'(x_0) = \lambda u'(x_0)$$

2. $u+v$ est dérivable en x_0 et
$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

3. uv est dérivable en x_0 et
$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

4. Si $v(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable en x_0 et
$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

5. Si $v(x_0) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en x_0 et
$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

Démonstration

1. *On a*
$$(\lambda u)(x_0+h) - (\lambda u)(x_0) = \lambda(u(x_0+h) - u(x_0))$$
Donc
$$\frac{(\lambda u)(x_0+h) - (\lambda u)(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \lambda u'(x_0)$$
d'où le résultat.

2. *On a*
$$(u+v)(x_0+h) - (u+v)(x_0) = (u(x_0+h) - u(x_0)) + (v(x_0+h) - v(x_0))$$
Donc
$$\frac{(u+v)(x_0+h) - (u+v)(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} u'(x_0) + v'(x_0)$$
d'où le résultat.

3. *On a*
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\Big(u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)\Big)\\
&= \frac{1}{h}\Big(u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0+h) + u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)\Big)\\
&= v(x_0+h)\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} + u(x_0)\frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h}
\end{aligned}$$
Comme v est continue en x_0, car dérivable en x_0, $\lim_{h\to 0} v(x_0+h) = v(x_0)$. Ainsi
$$\frac{(uv)(x_0+h) - (uv)(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$
d'où le résultat.

4. *On a*
$$\frac{\frac{1}{v(x_0+h)} - \frac{1}{v(x_0)}}{h} = \frac{v(x_0) - v(x_0+h)}{hv(x_0)v(x_0+h)} = -\frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \times \frac{1}{v(x_0)v(x_0+h)}$$
Comme v est continue en x_0, car dérivable en x_0, on a $\lim_{h\to 0} v(x_0+h) = v(x_0)$, d'où
$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(x_0+h) - \left(\frac{1}{v}\right)(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$
d'où le résultat.

5. *Pour cette dernière proposition, on combine les deux précédentes, en remarquant que* $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) &= u'(x_0)\left(\frac{1}{v}\right)(x_0) + u(x_0)\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0)\\ &= \frac{u'(x_0)}{v(x_0)} - u(x_0)\frac{v'(x_0)}{v(x_0)^2}\\ &= \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}\end{aligned}$$

◈

De cette proposition résulte que toute combinaison linéaire de fonctions dérivables est également dérivable.

Proposition Soient $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in I$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en $u(x_0)$.
Alors $v \circ u : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 et

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$$

Démonstration

Si il existe un intervalle de la forme $]x_0 - a, x_0 + a[$ *sur lequel* u *est constante, alors* $v \circ u$ *y est également constante. Leur taux d'accroissement entre deux points de cet intervalle est alors nul, si bien que* $v \circ u$ *est dérivable en* x_0*, et que* $u'(x_0) = (v \circ u)'(x_0) = 0$.
En particulier, $(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'(u(x_0))$.
Supposons à présent que u *n'est constante sur aucun intervalle de la forme* $]x_0 - a, x_0 + a[$*. Pour* $h \in \mathbb{R}$ *assez proche de* 0*, on a donc* $u(x_0 + h) \neq u(x_0)$*. On a alors*

$$\frac{(v \circ u)(x_0 + h) - (v \circ u)(x_0)}{h} = \frac{v(u(x_0 + h)) - v(u(x_0))}{u(x_0 + h) - u(x_0)} \times \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} v'(u(x_0)) \times u'(x_0)$$

◈

32.2.2 Fonctions usuelles

On va étudier la dérivabilité des fonctions usuelles.

Proposition (Dérivées usuelles)

Fonction $x \mapsto \ldots$	**Dérivée** $x \mapsto \ldots$	**Intervalle**
a (réel)	0	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Démonstration

Dans chaque cas on notera f la fonction considérée, définie sur le domaine de définition approprié.

❖ *Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$:*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a-a}{h} = 0$$

Donc f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.

❖ *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$:*

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k} - x^n\right) \\ &= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k} \\ &= nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}x^{n-k}\end{aligned}$$

Comme pour tout $2 \leq k \leq n-1$, $k-1 \geq 1$, le terme de droite tend vers 0 quand h tend vers 0. Ainsi, f est dérivable en x et $f'(x) = nx^{n-1}$.

❖ *La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto 1$. Le résultat découle alors de la règle de dérivation d'un quotient.*

❖ *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x^n}$ et $g(x) = x^n$. f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x)g(x) = 1$, donc*

$$\begin{aligned}(fg)'(x) = 0 &\Rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0 \\ &\Rightarrow f'(x)x^n + \frac{1}{x^n}nx^{n-1} = 0 \\ &\Rightarrow f'(x)x^n = -\frac{n}{x} \\ &\Rightarrow f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}\end{aligned}$$

❖ *Pour tous $x > 0$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $x + h > 0$, on a*

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Comme f est continue sur $[0, +\infty[$, on en déduit qu'elle est dérivable en $x > 0$ et que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

On remarque que

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}}\xrightarrow[h\to 0^+]{}+\infty$$

f n'est donc pas dérivable en 0.

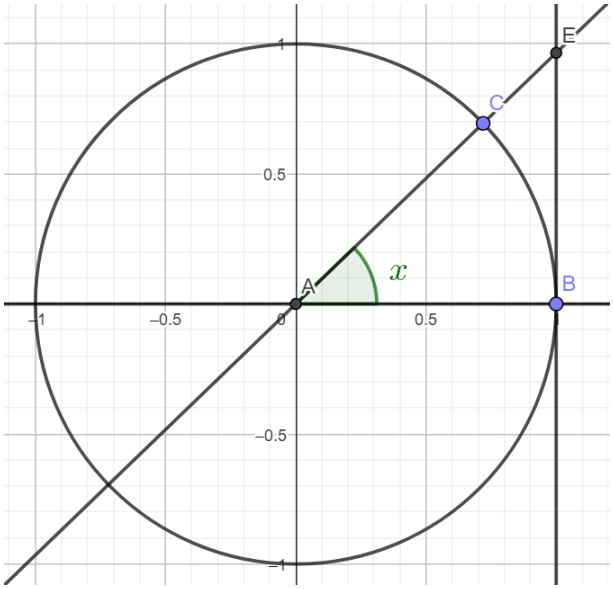
La dérivabilité des fonctions sinus et cosinus est admise au lycée. On en expose tout de même une preuve ici. On commence par étudier la dérivabilité en 0, et tout d'abord du sinus. Il s'agit alors de montrer que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

Pour cela, on va démontrer que pour tout $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ non nul, on a

$$\cos(x)\leq\frac{\sin(x)}{x}\leq 1$$

Soit $0<x<\frac{\pi}{2}$. On trace le cercle trigonométrique et on place l'angle x dans ce cercle de cette façon :



On remarque alors que l'aire de ACB est inférieure à l'aire du secteur angulaire du disque délimité par $\widehat{BAC}$, qui est-elle même inférieure à l'aire de AEB. On en déduit que

$$\frac{1}{2}\sin(x)\leq\frac{1}{2}x\leq\frac{1}{2}\tan(x)$$

On a donc d'une part

$$\sin(x)\leq x\Rightarrow\frac{\sin(x)}{x}\leq 1$$

et d'autre part

$$x\leq\tan(x)\Rightarrow x\cos(x)\leq\sin(x)\Rightarrow\cos(x)\leq\frac{\sin(x)}{x}$$

d'où

$$\cos(x)\leq\frac{\sin(x)}{x}\leq 1$$

Or, les fonctions $\cos$ et $x\mapsto\frac{\sin(x)}{x}$ sont paires, donc cette égalité reste vraie pour $-\frac{\pi}{2}<x<0$, ce que l'on voulait démontrer.

Comme $\cos$ est continue en 0, $\lim_{h\to 0}\cos(h)=\cos(0)=1$, d'où par le théorème des gendarmes

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$$

Montrons maintenant que $\cos$ est dérivable en 0, de dérivée 0, c'est-à-dire que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$$

Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(h) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)$$

d'où

$$\frac{\cos(h)-1}{h} = -\sin\left(\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \xrightarrow[h\to 0]{} -0\times 1 = 0$$

On passe au cas général maintenant. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)\Big)\\ &= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\\ &\xrightarrow[h\to 0]{} \sin(x)\times 0+\cos(x)\times 1 = \cos(x)\end{aligned}$$

Donc $\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\cos$. De même

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{1}{h}\Big(\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)\Big)\\ &= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\\ &\xrightarrow[h\to 0]{} \cos(x)\times 0-\sin(x)\times 1 = -\sin(x)\end{aligned}$$

Donc $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $-\sin$.

◈

Si l'on combine ces dérivées usuelles avec la règle de dérivation d'une composée, on obtient les dérivées composées usuelles.

Proposition (Dérivées composées usuelles)
Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable.

Fonction $x \mapsto \dots$	**Dérivée** $x \mapsto \dots$	**Conditions**
$u(x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'(x)u(x)^{n-1}$	Aucune
$\frac{1}{u(x)}$, là où u ne s'annule pas	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$	sur un intervalle où u ne s'annule pas
$\frac{1}{u(x)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{nu'(x)}{u(x)^{n+1}}$	sur un intervalle où u ne s'annule pas
$\sqrt{u(x)}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	sur un intervalle où $u > 0$
$\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(x)$	Aucune
$\cos(u(x))$	$-u'(x)\sin(x)$	Aucune

32.3 Étude de fonctions

La dérivée d'une fonction encode donc les informations de croissance de la fonction. L'étude de la dérivée va alors permettre d'étudier les variations d'une fonction.

32.3.1 Variations

On suppose à présent f dérivable sur I.

Théorème (admis) Si f' est positive (respectivement négative) sur I, alors f est croissante (respectivement décroissante) sur I.
Si f' est strictement positive ou négative, alors la monotonie est stricte.

Démonstration
Ce théorème est admis puisqu'il utilise le théorème des accroissements finis, qui n'est pas à l'étude au lycée.

Supposons f' positive sur I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Comme f est dérivable sur I, elle l'est également sur $[a, b]$. Ainsi, par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Comme f est positive et $a < b$, on a $f(b) \geq f(a)$, ce qui assure que f est croissante sur I.
Si f est strictement positive sur I, on en déduit que $f(b) > f(a)$ et donc que f est strictement croissante sur I.

Si f est négative, ou strictement négative, on montre de la même façon que f est décroissante, ou strictement décroissante, sur I.

◈

Ce théorème admet une réciproque partielle.

Théorème Si f est croissante (respectivement décroissante) sur I, alors f' est positive (respectivement négative) sur I

Démonstration
Supposons f croissante sur I. Soit $x \in I$, et soit $h \in \mathbb{R}^*$.

- *Si $h > 0$, alors $x + h > x$, et par croissance de f, $f(x + h) - f(x) \geq 0$. Ainsi*
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$
- *Si $h < 0$, alors $x + h < x$, et par croissance de f, $f(x + h) \leq f(x)$. Ainsi*
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

Par passage à la limite quand h tend vers 0, on en déduit que $f'(x) \geq 0$. f' est donc positive sur I.

Si f est décroissante, les inégalités entre $f(x + h)$ et $f(x)$ changent de sens, d'où le résultat.

◈

Remarque Attention, ce résultat n'est pas vraie pour la monotonie stricte. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, alors que sa dérivée s'annule.
Cela est dû au fait que le passage à la limite quand h tend vers 0 ne conserve pas les inégalités strictes, mais les rend larges.

Pour étudier les variations d'une fonction dérivable, il est donc d'usage de calculer sa dérivée, puis d'en étudier son signe.

32.3.2 Extrema

Définition On dit que f admet un maximum local (respectivement un minimum local) en x_0 si il existe un intervalle de la forme $]x_0-a,x_0+a[$ inclus dans I, tel que pour tout $x\in]x_0-a,x_0+a[$ on ait $f(x)\leq f(x_0)$ (respectivement $f(x)\geq f(x_0)$).

On dit que f admet un extremum (au pluriel extrema) local en x_0 si elle y admet un maximum ou un minimum local. Cet extremum est alors $f(x_0)$.

Remarque Attention, un extremum local n'est pas nécessaire global : il ne l'est que sur un intervalle de la forme $]x_0-a,x_0+a[$, c'est-à-dire localement.

Théorème Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0)=0$.

Démonstration
Supposons que f admet un maximum local en x_0. La preuve dans le cas d'un minimum est similaire. Il existe alors un réel $a>0$ tel que pour tout $x\in]x_0-a,x_0+a[$, $f(x)\leq f(x_0)$. On en déduit que

- *pour $0<h<a$*
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\leq 0$$
- *pour $-a<h<0$*
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$$

Comme f est dérivable en 0, par passage à la limite, on doit avoir $f'(x_0)\leq 0$ et $f'(x_0)\geq 0$: nécessairement $f'(x_0)=0$.

◈

Remarque La réciproque de ce résultat est fausse. La fonction $x\mapsto x^3$ donnée en contre-exemple plus haut en est encore un ici : sa dérivée s'annule en 0, mais elle n'y admet pas d'extremum.
On peut également citer la fonction $x\mapsto \sin(x)+x$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et dont la dérivée s'annule en $(2k+1)\pi$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

Il existe tout de même une réciproque partielle.

Proposition Si $f'(x_0)=0$ et si f' change de signe en x_0, alors f' admet un extremum local en x_0.

Démonstration
Supposons que f' est positive avant x_0, puis négative. Il existe alors $a>0$ tel que f' est positive sur $]x_0-a,x_0]$ et négative sur $[x_0,x_0+a[$.
On en déduit que f est croissante sur $]x_0-a,x_0]$, puis décroissante sur $[x_0,x_0+a[$. Ainsi, pour $x\in]x_0-a,x_0]$, $f(x)\leq f(x_0)$, et pour $x\in[x_0,x_0+a[$, $f(x)\leq f(x_0)$. f admet donc un maximum local en x_0.
Si f' est négative avant x_0, puis positive, on montre de la même manière qu'elle admet alors un minimum local en x_0.

◈

Ainsi, l'étude du signe de la dérivée d'une fonction permet non seulement de donner ses variations, mais également ses extrema locaux.

32.4 Accroissements finis

Nous présentons maintenant certains résultats essentiels en analyse qui traitent de la notion de dérivée, bien que hors programme. Les preuves seront donc données à titre indicatif.

On considère une fonction f définie sur un intervalle $[a,b]$, avec $a<b$. Pour donner une démonstration des résultats sur la dérivation, nous aurons besoin d'un théorème important sur les fonctions continues, que nous admettrons.

Théorème (Théorème des bornes atteintes) Si f est continue sur $[a,b]$, alors elle y est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'elle admet un maximum et un minimum.

Remarque La démonstration de ce résultat fondamental nécessite d'autres résultats forts d'analyse que sont la propriété de complétude de $\mathbb{R}$ (à travers la propriété de la borne supérieure), et le théorème de Bolzano-Weierstrass sur les suites. Il demande également des connaissances sur les notions de bornes supérieures et inférieures.

Passons maintenant à un théorème important sur la dérivation.

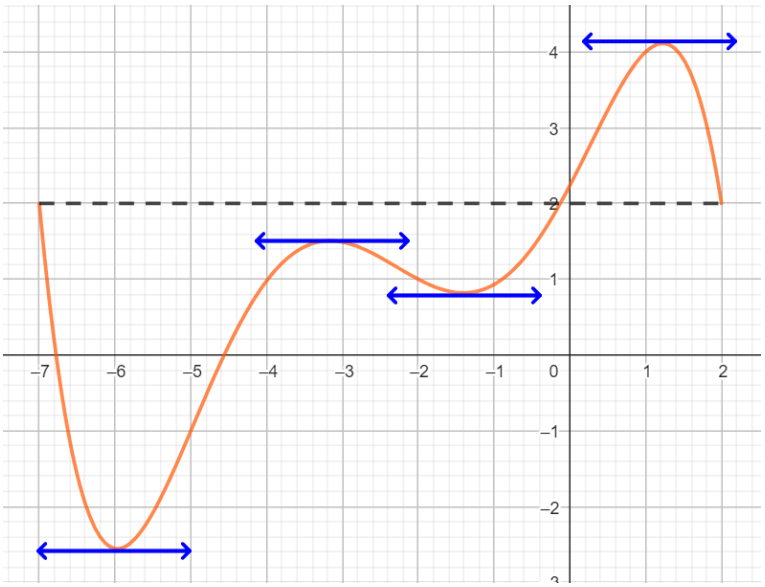
Théorème (Théorème de Rolle) Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration

On suppose f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$.
Comme f est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème des bornes atteintes, elle y est bornée et atteint ses bornes. Si $\max_{[a,b]}(f)=\min_{[a,b]}(f)$, alors f est constante sur $[a,b]$. Dans ce cas, sa dérivée s'annule sur $]a,b[$ tout entier et le résultat est vrai.

Supposons maintenant que $\max_{[a,b]}(f)>\min_{[a,b]}$. Comme $f(a)=f(b)$, au moins l'un de ces deux extrema est atteint en un point $c\in]a,b[$. Puisque f est dérivable sur $]a,b[$, on en déduit que $f'(c)=0$. ◈

On peut interpréter graphiquement ce résultat de la façon suivante : la courbe représentative de f admet une tangente horizontale.



Ce théorème est souvent appelé lemme de Rolle car il sert de base à la preuve du théorème suivant, qui en est une généralisation.

Théorème (Théorème des accroissements finis) Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Démonstration

On considère la fonction g définie sur $[a,b]$ par

$$g(x) = f(x) - x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Alors g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et l'on a

$$\begin{aligned} g(b)-g(a) &= f(b) - b\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f(a) + a\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= f(b) - f(a) + (a-b)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= f(b) - f(a) - (f(b)-f(a)) \\ g(b)-g(a) &= 0 \end{aligned}$$

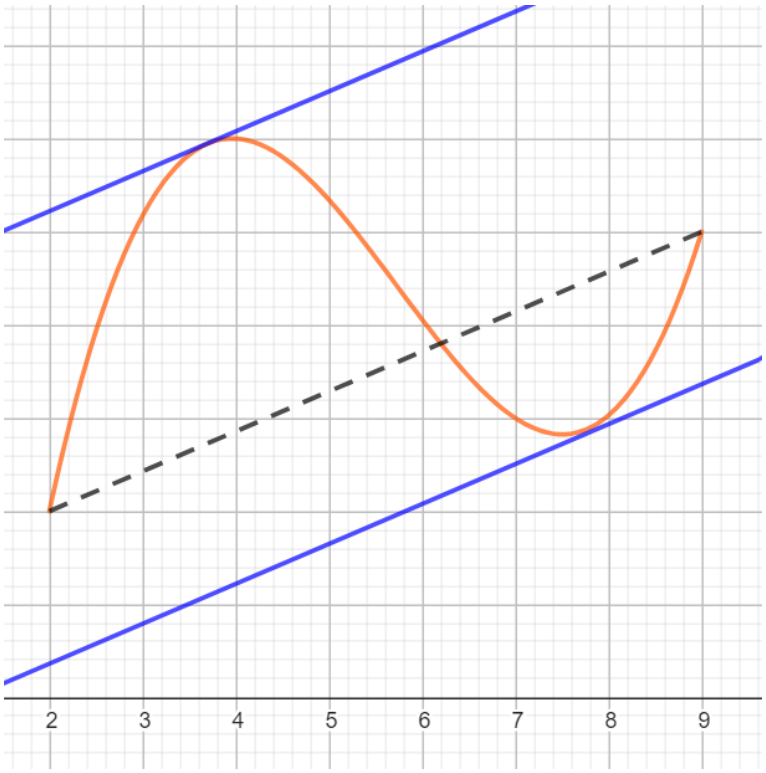
Ainsi $g(a) = g(b)$, donc g satistfait les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, donc tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

◈

Remarque On remarque qu'il s'agit d'une généralisation du théorème de Rolle au cas où $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas nécessairement égaux.

La quantité $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le taux d'accroissement de la droite reliant les points d'abscisses a et b, ce qui donne une interprétation géométrique : la courbe de f admet au moins une tangente parallèle à cette droite.



Théorème (Inégalité des accroissements finis) On suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in]a,b[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Démonstration

Il suffit de remarquer que l'inégalité à prouver est équivalente à

$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$$

puis d'écrire ce taux d'accroissement comme $f'(c)$, avec $c \in]a,b[$ par le théorème des accroissements finis.

◈

Cette inégalité peut notamment servir à borner f dès lors que l'on arrive à borner sa dérivée.

33 Fonctions exponentielles

- **Niveau :** Première spécialité, Terminale complémentaire, Terminale spécialité
- **Pré-requis :** dérivation, limite de fonction, primitives, théorème des valeurs intermédiaires, équations différentielles, variables aléatoires

33.1 Définitions et propriétés

33.1.1 Défintions

Théorème (admis) Il existe une solution sur $\mathbb{R}$ à l'équation différentielle $y' = y$ vérifiant $y(0) = 1$.

Remarque Le théorème de Cauchy-Lipschitz apporte une preuve non constructive de ce résultat. Sans invoquer des arguments aussi sophistiqués, il suffit de montrer que la série entière $x \mapsto \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$ est de rayon de convergence infini et vérifie l'équation différentielle ci-dessus. Cela donne alors une expression explicite de la fonction exponentielle, mais cela est bien sûr admis au lycée.

Proposition L'équation différentielle $y' = y$ admet une unique solution telle que $y(0) = 1$. Cette fonction est appelée fonction exponentielle, et est notée $\exp$.

Démonstration *On admet l'existence, mais démontrons l'unicité. Soit f une fonction vérifiant ce problème de Cauchy. Commençons par justifier qu'elle ne s'annule pas. On considère $g : x \mapsto f(x)f(-x)$, qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

car $f' = f$. Ainsi, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, g y est constante. Or, $g(0) = f(0)^2 = 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$. Il est donc impossible que f s'annule.

Démontrons maintenant l'unicité. On considère une seconde fonction h vérifiant le problème de Cauchy, et on s'intéresse à la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{h(x)}$ (qui existe bien car h ne s'annule pas). Celle-ci est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables, et de dérivée :

$$x \mapsto \frac{f'(x)h(x) - f(x)h'(x)}{h(x)^2} = \frac{f(x)h(x) - f(x)h(x)}{h(x)^2} = 0$$

car $f' = f$ et $h' = h$. Ainsi, comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, cette fonction y est constante. Or $\frac{f(0)}{h(0)} = 1$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{f(x)}{h(x)} = 1$, d'où $f = h$. ◈

33.1.2 Propriétés algébriques

Proposition Soient a, b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$. Alors

1. $\exp(a) > 0$
2. $\exp(a+b) = \exp(a) + \exp(b)$
3. $\exp(-b) = \frac{1}{\exp(b)}$
4. $\exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$
5. $\exp(na) = \exp(a)^n$

Démonstration

1. $\exp$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$. *Elle est continue et vérifie* $\exp(0) = 1 > 0$, *on a* $\exp(a) > 0$.
2. *On considère la fonction* $g : x \mapsto \frac{\exp(a+x)}{\exp(x)}$. *Alors* g *est bien définie et dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a*
$$g'(x) = \frac{\exp(x+a)\exp(x) - \exp(x+a)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$$
Ainsi, comme $\mathbb{R}$ *est un intervalle,* g *est constante. Or,* $g(0) = \frac{\exp(a)}{\exp(0)} = \exp(a)$, *donc*
$$g(b) = \frac{\exp(a+b)}{\exp(b)} = \exp(a)$$
d'où le résultat.
3. *On a* $\exp(a) \times \exp(-a) = \exp(a-a) = \exp(0) = 1$, *d'où le résultat.*
4. *Il suffit de combiner les points 2 et 3.*
5. *Il suffit de procéder par récurrence à partir du point 2.*

◈

On note habituellement $e = \exp(1)$. Le point 4 assure que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $\exp(x) = e^x$. Le point 3 permet d'étendre ce résultat à $\mathbb{Z}$. Pour un rationnel $\frac{p}{q}$, on a
$$\exp\left(\frac{p}{q}\right)^q = \exp\left(\frac{p}{q} \times q\right) = \exp(p) = e^p$$
Ainsi, $\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \left(e^p\right)^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{p}{q}}$. Cela étend le résultat à $\mathbb{Q}$.

L'extension de ce résultat à $\mathbb{R}$ se fait par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On considère une suite $(x_n)_n$ de rationnels qui converge vers $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\exp(x_n) = e^{x_n}$, donc par continuité de la fonction exponentielle (car elle est dérivable), on a $\exp(x) = e^x$.

33.1.3 Fonction exponentielle

Proposition
- ❖ La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ❖ On a la limite suivante : $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

Démonstration

- ❖ *La fonction exponentielle est strictement positive sur* $\mathbb{R}$, *et sa propre dérivée, donc elle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- ❖ *Comme la fonction exponentielle est dérivable en 0 et est sa propre dérivée, on a*
$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} e^0 = 1$$

◈

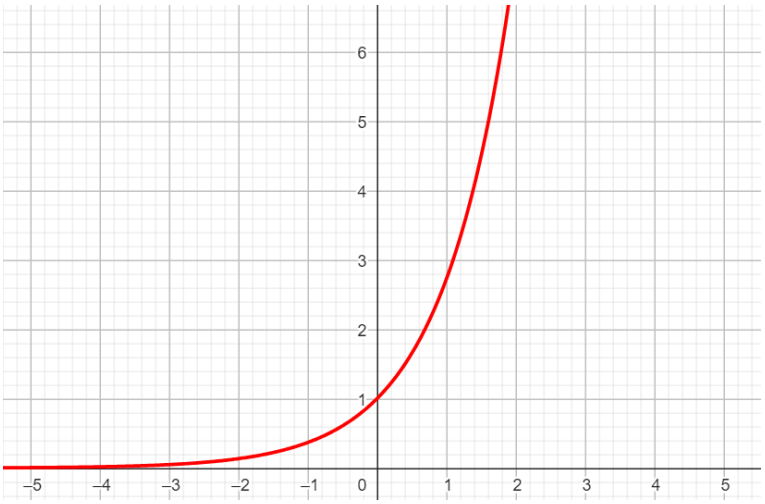
Proposition On a les limites suivantes :

$$e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

Démonstration *On considère la fonction* $f : x \mapsto e^x - (x+1)$. *Elle est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour* $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$. *Ainsi, pour* $x > 0$, *par croissance de l'exponentielle,* $f'(x) \geq 0$, *donc* f *est croissante sur* $]0, +\infty[$. *Or,* $f(0) = e^0 - (0+1) = 0$, *donc* f *est positive sur* $]0, +\infty[$. *On en déduit que pour* $x > 0$, $e^x \geq x + 1$, *d'où la première limite.*

Pour $x \in \mathbb{R}^*$, *on a* $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$, *d'où la seconde limite.* ◈

Voici la courbe représentative de cette fonction :



Théorème (Croissances comparées) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

$$\frac{e^x}{x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad x^n e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

Démonstration *On remarque en écrivant pour tous* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = n^n \times \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)$$

qu'il suffit de démontrer le cas $n = 1$, *puis de l'appliquer à* $y = \frac{x}{n}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$ *définie sur* $\mathbb{R}$. *Celle-ci est deux fois dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et pour* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$f'(x) = e^x - x \qquad \text{et} \qquad f''(x) = e^x - 1$$

On a donc $f''(x) > 0$ *pour* $x > 0$, *donc* f' *est croissante sur* $]0, +\infty[$. *Or,* $f'(0) = 1$, *donc* f' *est positive sur* $]0, +\infty[$, *et* f *y est croissante. On a* $f(0) = 1$, *donc* f *est positive sur* $]0, +\infty[$. *Ainsi, pour tout* $x > 0$, *on a* $e^x > \frac{x^2}{2}$, *donc* $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$, *d'où le résultat par comparaison.*

Pour la seconde limite, on remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in \mathbb{R}^*$, *on a*

$$x^n e^x = (-1)^n \frac{(-x)^n}{e^{-x}}$$

Or, par le premier point, $\frac{e^{-x}}{(-x)^n} \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, *d'où la seconde limite.* ◈

33.1.4 Logarithme et exponentielle de base a

Proposition La fonction exponentielle établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$.

Démonstration *On a vu que cette fonction est bien strictement positive. Comme elle est continue, et possède les limites* $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ *et* $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$*, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle est surjective de* $\mathbb{R}$ *dans* $]0,+\infty[$*. De plus, étant strictement croissante, elle est injective, donc bijective.* ◈

La bijection réciproque la fonction exponentielle est appelée logarithme néperien.

Remarque Bien que l'on définisse ici le logarithme à partir de l'exponentielle (comme c'est le cas au lycée), historiquement ce sont les logarithmes qui ont été étudiés en premier.

Pour tout réel $a>0$, on définit l'exponentielle de base a comme la fonction $x\mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$. En dehors du cas $a=1$, ces fonctions sont aussi des bijections de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$, dont les bijections réciproques sont appelées logarithmes de base a, et notées $\log_a$.

Les propriétés de ces exponentielles découlent de celles de la fonction exponentielle $\exp$, qui n'est autre que celle de base $e=\exp(1)$.

33.2 Équations différentielles

Une des applications fondamentales de la fonction exponentielle est la résolution d'équations différentielles.

33.2.1 Ordre 1

Définition On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme $y'+ay=b$, où a et b sont des fonctions continues, et a non nulle.
Lorsque a et b sont des constantes, on dit que l'équation est à coefficients constants.

Théorème Les solutions de l'équation homogène $y'+ay=0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto Ce^{-ax}$, où C est un réel.

Démonstration
Commençons par vérifier que les fonctions de cette forme sont effectivement des solutions de l'équation homogène. Soit C *un réel. La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x\mapsto Ce^{-ax}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *comme produit de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$*, et de dérivée :* $x\mapsto -aCe^{-ax}$*.*
Pour tout $x\in\mathbb{R}$*, on a :*

$$-aCe^{-ax} + a\times Ce^{-ax} = 0$$

Ainsi, les fonctions de cette forme sont bien solutions de l'équation homogène.

Maintenant, démontrons que toute solution de l'équation homogène s'écrit sous cette forme. Soit f *une solution (sur* $\mathbb{R}$*) de l'équation* $y'+ay=0$*. On définit la fonction* g *sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x)=f(x)e^{ax}$*, pour tout* $x\in\mathbb{R}$*.* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *en tant que produit de fonctions dérivables sur* $\mathbb{R}$*, et pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, on a :*

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} \\ &= -af(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} \quad \text{car } f \text{ est solution de } y'+ay=0 \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

g' est nulle sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle), donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)e^{ax} = C$, ie $f(x) = Ce^{-ax}$. f est donc bien de la forme recherchée.

◈

Proposition On considère une équation différentielle $y' + ay = b$. Soit y_p une solution particulière de cette équation. Alors y est une solution de cette équation si et seulement si $y - y_p$ est solution de l'équation homogène associée.

Démonstration

Soit y une fonction définie sur un intervalle I.

Supposons que y est solution de $y' + ay = b$. En particulier, elle est dérivable sur I, donc $y - y_p$ également.

Pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned}(y - y_p)'(x) &= y'(x) - {y_p}'(x) \\ &= b - ay(x) - (b - ay_p(x)) \quad \textit{car } y \textit{ et } y_p \textit{ sont solutions de l'équation différentielle} \\ (y - y_p)'(x) &= a(y_p(x) - y(x))\end{aligned}$$

Ainsi, $(y - y_p)'(x) + a(y - y_p)(x) = 0$, donc $y - y_p$ est solution de l'équation homogène.

Réciproquement, supposons que $y - y_p$ est solution de l'équation homogène. Cela implique en particulier que y est dérivable sur I. On a alors pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}y'(x) &= (y - y_p)'(x) + {y_p}'(x) \\ &= -a(y - y_p)(x) + {y_p}'(x) \quad \textit{car } y - y_p \textit{ est solution de l'équation homogène} \\ &= -a(y - y_p)(x) + b - ay_p(x) \quad \textit{car } y_p \textit{ est solution de } y' + ay = b \\ y'(x) &= b - ay(x)\end{aligned}$$

Par conséquent, $y'(x) + ay(x) = b$, donc y est solution de $y' + ay = b$.

◈

Remarque Ainsi, si l'on connait une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$, il suffit de résoudre l'équation homogène pour trouver toutes les solutions de $y' + ay = b$.

33.2.2 Ordre 2

Définition On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 une équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = c$, où a, b et c sont des fonctions continues.
Lorsque a, b et c sont des fonctions constantes, on dit que l'équation est à coefficients constants.

L'étude systématique de ce type d'équation n'est pas au programme au lycée. Toutefois, on peut en étudier certains exemples. De plus, la structure linéaire de ces équations amène au même résultat que pour l'ordre 1.

Si l'on considère une solution particulière y_p de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$, alors y est une solution de cette équation si, et seulement si, $y - y_p$ est solution de l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$. La preuve de ce résultat est en tout point analogue au cas de l'ordre 1.

Ainsi, moyennant la connaissance d'une solution particulière, il suffit de résoudre l'équation homogène. On donne ici à titre indicatif la méthode de résolution pour de telles équations, résultat qui n'est bien sûr pas attendu en terminale.

Théorème (admis) On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $y''+ay'+by=0$. On appelle équation caractéristique associée l'équation d'inconnue r : $r^2+ar+b=0$.

- Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{-r_1 x} + De^{-r_2 x}$, où C et D sont des réels.

- Si l'équation caractéristique admet une unique racine réelle r_0, alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto (C+Dx)e^{-r_0 x}$, où C et D sont des réels.

- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha+i\beta$ et $\alpha-i\beta$, alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{\alpha x}\cos(\beta x)+De^{\alpha x}\sin(\beta x)$, où C et D sont des réels.

33.3 Probabilités

La fonction exponentielle intervient dans une loi à densité qui porte son nom : la loi exponentielle.
Soit $\lambda > 0$.

Définition On dit qu'une variable aléatoire réelle suit la exponentielle de paramètre λ si elle est à densité sur $[0,+\infty[$, de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0$$

On note alors $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition La fonction définie par $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité sur $[0,+\infty[$.

Démonstration *f est continue et positive sur $[0,+\infty[$. Soit $x \geq 0$. On a*

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x \\ &= 1-e^{-\lambda x}\end{aligned}$$

Comme $\lambda > 0$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$, d'où le résultat. ◈

Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition La fonction de répartition de X est donnée par

$$F(x) = 1-e^{-\lambda x}, \forall x \geq 0$$

Démonstration *C'est une conséquence immédiate du calcul effectué pour démontrer la proposition précédente.* ◈

Proposition X admet une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Démonstration *Soit $x \geq 0$. On calcule $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt$ en intégrant par parties.*

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt &= \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x -e^{-\lambda t} dt \\ &= -xe^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^x \quad \text{car } \lambda > 0 \\ &= -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}(e^{-\lambda x} - 1)\end{aligned}$$

Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} -xe^{-\lambda x} = 0$, et d'autre part, $\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$. On en déduit que X admet une espérance et que

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}}$$

Maintenant, on calcule $\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt$ en intégrant par parties.

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt &= \left[-t^2 e^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x -2te^{-\lambda t} dt \\ &= -x^2 e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt \quad \text{car } \lambda > 0\end{aligned}$$

Par croissance comparée, $\lim_{x\to+\infty} -x^2 e^{-\lambda x} = 0$. D'autre part, comme X admet une espérance, le terme de droite converge vers $\frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(X)$. Ainsi, X^2 admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(X^2) = 0 + \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Par conséquent, X admet une variance et

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}}$$

◈

Proposition Pour tous réels positifs s et t, on a

$$\mathbb{P}_{(X\geq s)}(X \geq t+s) = \mathbb{P}(X \geq t)$$

On dit que la loi exponentielle est sans mémoire.

Démonstration *Commençons par remarquer que pour tout $x \geq 0$, on a*

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

En particulier, $\mathbb{P}(X \geq x) > 0$, ce qui assure que la probabilité conditionnelle de la proposition est bien définie.

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{(X\geq s)}(X \geq t+s) &= \frac{\mathbb{P}\Big((X \geq s) \cap (X \geq t+s)\Big)}{\mathbb{P}(X \geq s)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X \geq t+s)}{\mathbb{P}(X \geq s)} \quad \text{car comme } t \geq 0,\ (X \geq t+s) \subset (X \geq s) \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} \\ &= e^{-\lambda(t+s)+\lambda s} \\ &= e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{(X\geq s)}(X \geq t+s) = \mathbb{P}(X \geq t)}$$

◈

Remarque Cette propriété fait de la loi exponentielle une loi sans mémoire, tout comme la loi géométrique pour les lois discrètes. Cette appellation vient du fait que la probabilité que la variable X "survive" un temps t ne dépend pas de son "temps de survie" précédent s. Contrairement au cas discret, on a même un résultat plus fort, bien que hors programme, qui est le suivant.

Proposition La loi exponentielle est la seule loi à densité sur $[0,+\infty[$ sans mémoire.

Démonstration *Soit X une variable aléatoire réelle à densité sur $[0,+\infty[$. On note F sa fonction de répartition, et G sa fonction de survie, c'est-à-dire la fonction définie pour tout $x \in I$ par*

$$G(x) = 1 - F(x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X \geq x)$$

Nous allons démontrer que cette fonction de survie est nécessairement de la forme de celle d'une loi exponentielle.

Commençons par remarquer que $G(0) = \mathbb{P}(X \geq 0) = 1$. Comme X est sans mémoire, on a pour tous s et t réels positifs

$$G(s+t) = \mathbb{P}(X \geq s+t) = \mathbb{P}(X \geq s)\mathbb{P}(X \geq t) = G(s)G(t) \quad (*)$$

d'après le calcul effectué dans la preuve de la proposition précédente. On remarque également que pour tous x, y réels positifs tels que $x \geq y$, on a $(X \geq y) \subset (X \geq x)$, donc $G(y) \geq G(x)$. Ainsi, G est décroissante.
De la relation $(*)$, on déduit facilement que $G(2) = G(1)^2$, puis par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G(n) = G(1)^n$. De plus, pour tous $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$, on a $G\left(\frac{p}{q}\right)^q = G\left(\frac{p}{q}q\right) = G(p) = G(1)^p$, donc $G\left(\frac{p}{q}\right) = G(1)^{\frac{p}{q}}$. Ainsi, pour tout rationnel positif r, on a

$$G(r) = G(1)^r$$

Montrons que $G(1) \in]0,1[$. On a clairement $G(1) \in [0,1]$. Si $G(1) = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G(n) = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} G(n) = 1$, alors que

$$\lim_{n\to+\infty} G(n) = 1 - \lim_{n\to+\infty} F(n) = 0$$

Si $G(1) = 0$, alors on démontre facilement que $G(\frac{1}{2}) = 0$, et par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G(\frac{1}{2^n}) = 0$. On a donc une suite croissante d'évènements $(X \geq \frac{1}{2^n})_n$ dont l'union est $(X > 0)$. Ainsi,

$$G(0) = \lim_{n\to+\infty} G\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$$

ce qui est contradictoire. On en déduit que $G(1) \in]0,1[$.
Soit $x \in [0,+\infty[$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe deux suites de rationnels $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ qui convergent vers x, avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x \leq b_n$ (il suffit de considérer les approximations décimales par défaut et par excès de x successives par exemple). Par décroissance de G, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} G(a_n) \geq G(x) \geq G(b_n) &\Rightarrow G(1)^{a_n} \geq G(x) \geq G(1)^{b_n} \\ &\Rightarrow e^{a_n \ln(G(1))} \geq G(x) \geq e^{b_n \ln(G(1))} \quad \text{car } G(1) \in]0,1[\end{aligned}$$

Comme $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers x, par continuité de l'exponentielle et par le théorème des gendarmes, on en déduit que $G(x) = e^{x\ln(G(1))}$. On remarque que comme $G(1) \in]0,1[$, $\ln(G(1)) < 0$, ce qui correspond donc bien à la fonction de survie d'une loi exponentielle.
Puisque la fonction de survie de X est celle d'une loi exponentielle, c'est aussi le cas de sa fonction de répartition, donc X suit une loi exponentielle. ◈

34 Fonctions logarithmes

- **Niveau :** Terminale complémentaire, Terminale spécialité
- **Pré-requis :** fonctions, primitives, fonctions exponentielles, intégrales, dérivation, limite de fonction

34.1 Définitions et propriétés

34.1.1 Logarithme néperien

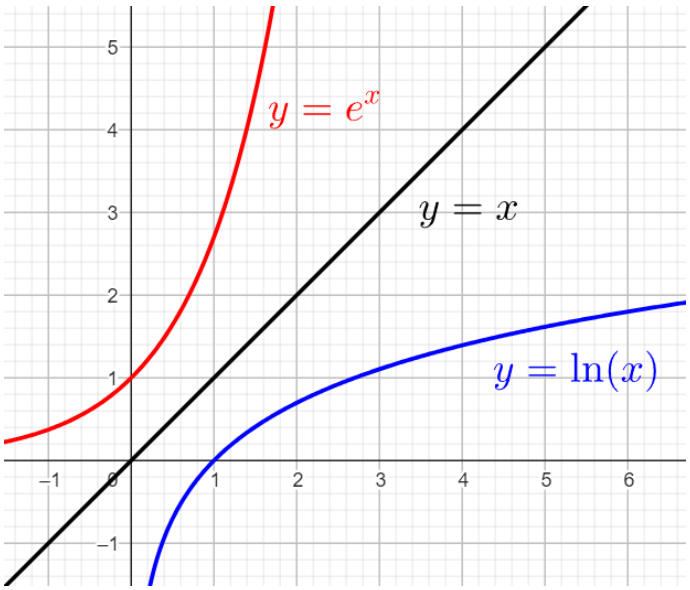
On rappelle que la fonction exponentielle (de base e) $\exp$ forme une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$.

Définition On appelle logarithme néperien, et on note $\ln$, la bijection réciproque de la fonction exponentielle (de base e).
Il s'agit donc d'une bijection $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ e^{\ln(x)} = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln\left(e^x\right) = x$$

Cette fonction porte le nom de logarithme néperien en l'honneur de l'écossais John Néper, francisé en John Napier, qui est reconnu comme l'inventeur des logarithmes. Nous reviendrons un peu plus loin sur l'approche historique de ces fonctions.

Puisque $\ln$ est la bijection réciproque de $\exp$, leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



34.1.2 Propriétés

Proposition ❖ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.
❖ Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$.

Démonstration *C'est une conséquence immédiate du fait que* $\ln$ *et* $\exp$ *sont des bijections réciproques : il faut juste faire attention au domaine de définition auquel doit appartenir* x. ◈

Proposition Soient $a, b \in]0, +\infty[$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors

1. $\ln(1) = 0$.
2. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
3. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
5. $\ln\left(a^k\right) = k\ln(a)$

Démonstration

1. *On a* $e^0 = 1 > 0$, *donc* $\ln(1) = \ln(e^0) = 0$.
2. *On note* $x = \ln(a)$ *et* $y = \ln(b)$, *de sorte que* $a = e^x$ *et* $b = e^y$. *On sait que* $e^x \times e^y = e^{x+y}$, *ce qui donne :*
$$\ln(ab) = \ln(e^x \times e^y) = \ln\left(e^{x+y}\right) = x + y = \ln(a) + \ln(b)$$
3. *En utilisant les points 1 et 2, on a*
$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b) = \ln\left(\frac{1}{b} \times b\right) = \ln(1) = 0$$
d'où $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.
4. *En combinant les points 2 et 3, on a*
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$
5. *Il suffit de raisonner par récurrence à partir du point 2.*

◈

Remarque Du fait que $\ln$ soit la bijection réciproque de $\exp$, cette fonction possède les propriétés "réciproques" de la fonction exponentielle (de base e) : elle "transforme" les produits en sommes.

34.1.3 Logarithme de base a

Définition Soit $a > 0$ différent de 1. On appelle logarithme de base a, et on note $\log_a$, la bijection réciproque de l'exponentielle de base a, c'est-à-dire de la fonction $x \mapsto a^x = e^{x\ln(a)}$. Elle est donc définie sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque Le logarithme néperien est donc le logarithme de base e.
Le cas $a = 1$ donne pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1^x = e^{x\ln(1)} = e^0 = 1$, donc cette fonction n'est pas bijective.

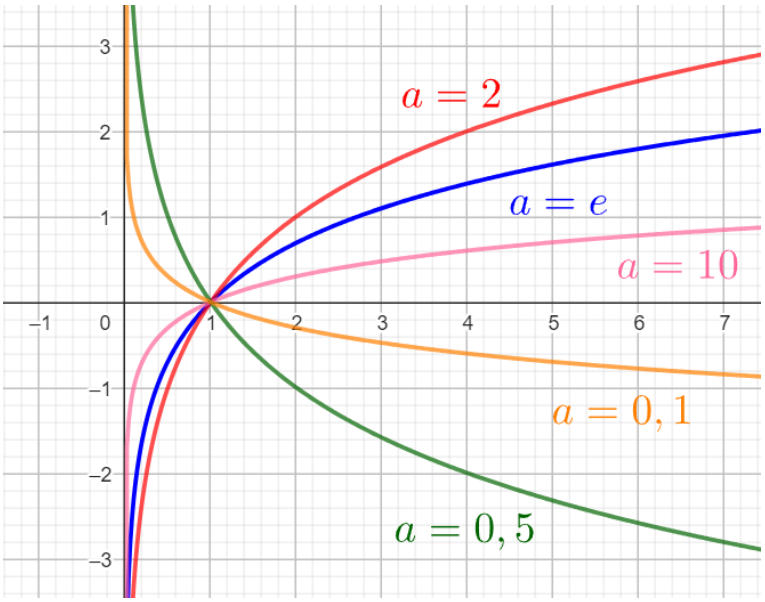
Proposition Soit $a > 0$ différent de 1. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a
$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Démonstration *Soit* $x \in]0,+\infty[$. *On a*

$$a^{\log_a(x)} = x \Rightarrow e^{\log_a(x)\cdot\ln(a)} = x \Rightarrow \log_a(x)\ln(a) = \ln(x) \Rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

car comme $\ln$ *est bijective et* $a \neq 1$, $\ln(a) \neq 0$. ◈

Voici les courbes représentatives de certains logarithmes de différentes bases.



La proposition précédente permet de ramener l'étude de toutes les fonctions logarithmes à celle du logarithme néperien. On ne détaillera donc que l'étude de ce dernier.

34.2 Fonction logarithme

34.2.1 Régularité

Théorème (admis) La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.

Remarque La continuité est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction exponentielle. La preuve se fait en utilisant la définition "ε/δ" de la continuité.
Pour la dérivabilité, on considère $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \in]0,+\infty[\setminus\{e^{x_0}\}$, on a

$$\frac{\ln(y) - \ln\left(e^{x_0}\right)}{y - e^{x_0}} = \frac{\ln(y) - x_0}{e^{\ln(y)} - e^{x_0}}$$

Comme $\exp$ est dérivable en x_0 et que sa dérivée en x_0 est non nulle, par continuité de $\ln$, le rapport précédent admet une limite finie quand y tend vers e^{x_0}, ce qui assure que $\ln$ est dérivable en e^{x_0}.

Proposition Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration *Pour tout* $x \in]0,+\infty[$, *on a* $e^{\ln(x)} = x$, *donc en dérivant on obtient que :*

$$\ln'(x) \times e^{\ln(x)} = 1 \Rightarrow \ln'(x) \times x = 1 \Rightarrow \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

◈

Remarque On en déduit que pour tout $a > 0$ différent de 1, $\log_a$ est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$, et pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \times \frac{1}{x}$$

Cette propriété de $\ln$ est extrêmement utile pour le calcul intégral. En effet, on dispose ainsi d'une primitive de $x \mapsto x^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

- ❖ Si $k \neq 1$, une primitive est $x \mapsto \frac{x^{k+1}}{k+1}$.
- ❖ Si $k = 1$, une primitive est $\ln$.

34.2.2 Signe et variations

Proposition $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Démonstration *$\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ est strcitement positive sur cet intervalle, donc $\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.* ◈

Proposition Pour $x \in]0, 1[$, $\ln(x) < 0$ et pour $x \in]1, +\infty[$, $\ln(x) > 0$.

Démonstration *$\ln$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc pour $x \in]0, 1[$, $\ln(x) < \ln(1) = 0$ et pour $x \in]1, +\infty[$, $\ln(x) > \ln(1) = 0$.* ◈

Proposition On a les limites suivantes :

$$\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \ln(x) \xrightarrow[x\to 0,\ x>0]{} -\infty$$

Démonstration *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(2^n) = n\ln(2)$, avec $\ln(2) > 0$. Ainsi, $\ln(2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit $M > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\ln(2^n) \geq M$. Par croissance de la fonction $\ln$, pour tout $x \geq 2^N$, on a $\ln(x) \geq \ln\left(2^N\right) \geq M$. Par conséquent, $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.*

Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. Or, $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0,\ x>0]{} +\infty$, donc $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0,\ x>0]{} -\infty$. ◈

On en déduit le tableau de variations de $\ln$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

34.2.3 Propriétés supplémentaires

Théorème (Croissances comparées) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les limites suivantes :

$$\frac{\ln(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad x^n \ln(x) \xrightarrow[x\to 0,\ x>0]{} 0$$

Démonstration *On remarque qu'en écrivant pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$,*

$$\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{1}{x^{n-1}} \qquad \text{et} \qquad x^n \ln(x) = x^{n-1} \times x\ln(x)$$

il suffit de prouver le résultat pour $n = 1$.

On commence par la première limite. On définit sur $[1, +\infty[$ la fonction f par $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$. Celle-ci est dérivable et pour $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Pour $x \geq 1$, $f'(x) \geq 0$, donc f est décroissante sur $]1, +\infty[$. Or, $f(1) = -2 < 0$, donc pour tout $x \geq 1$, $\ln(x) \leq 2\sqrt{x}$. Ainsi, $0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Pour la seconde, on remarque que pour $x > 0$, on a

$$x\ln(x) = -x\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Comme $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0,\ x>0]{} +\infty$, on déduit du premier point que $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0,\ x>0]{} 0$. ◈

Proposition On a la limite suivante :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Démonstration *La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$, et de dérivée $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. Le rapport*

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0}$$

est le taux d'accroissement de cette fonction entre x et 0. Lorsque x tend vers 0, ce rapport converge donc vers l'image de 0 par la dérivée de cette fonction, c'est-à-dire $\frac{1}{1+0} = 1$. ◈

Proposition La fonction $\ln$ est concave sur $]0,+\infty[$.

Démonstration *$\ln$ est dérivable de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est décroissante sur $]0,+\infty[$, d'où le résultat.* ◈

Remarque Un corollaire important de ce résultat est l'inégalité de Hölder : pour tous réels (ou complexes) $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$, et pour tous $p,q>1$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Celle-ci est un lemme fondamental pour démontrer, notamment, l'inégalité de Minkowski : pour $p \geq 1$ et des réels (ou complexes) $x_1,\dots,x_n$ et $y_1,\dots,y_n$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ce qui est l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_p$ dans $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^p$).

34.3 Applications

34.3.1 Approche historique

Les logarithmes ont en effet une propriété de morphisme de transformer les produit en sommes : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Cette correspondance entre un monde "additif" et un monde "multiplicatif" est connu des mathématiciens depuis des siècles, mais le premier à en avoir fait l'étude systématique est l'écossais John Napier, dans sa publication de 1614 intitulée *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*.

L'apport de Napier est une vision continue entre une progression arithmétique et une progression géométrique des nombres. Ses travaux sont poursuivis par Edward Wright les années suivantes, si bien que c'est lui qui établit les premières tables de logarithmes, qui donnent des correspondances entre le monde "multiplicatif" et le monde "additif".

Ces logarithmes sont particulièrement utiles dans de nombreux domaines ou des calculs lourds sont à effectuer. Pour multiplier deux nombres, on cherche leurs logarithmes, et on les additionne, puis on cherche le nombre correspondant par "l'antilogarithme".

C'est à Wright que l'on doit le nom de "logarithme", qui vient de "logos" (*rapport*) et "arithmos" (*nombre*).

Ces travaux sont également poursuivis par l'anglais Henry Briggs, de qui on tient un algorithme permettant d'approcher le logarithme d'un nombre. Prenons l'exemple du logarithme en base 10 de 2.

On commence par encadrer 2 entre deux puissances de 10 : $1 \leq 2 \leq 10$. Ainsi, $\log_{10}(1) \leq \log_{10}(2) \leq \log_{10}(10)$, donc $0 \leq \log_{10}(2) \leq 1$.

Maintenant, si l'on connaît un encadrement de la forme $10^k \leq 2^{10} \leq 10^{k+1}$, on a alors $k \leq 10\log_{10}(2) \leq k+1$, donc

$$\frac{k}{10} \leq \log_{10}(2) \leq \frac{k+1}{10}$$

En continuant ainsi avec 2^{100}, 2^{1000}, ..., on peut obtenir des approximations décimales de $\log_{10}(2)$.

34.3.2 Physique

Le logarithme est un outil particulièrement utile pour modéliser le niveau sonore. En effet, un modèle proportionnel n'est pas adapté : par exemple, le bruit de deux voitures n'est pas ressenti deux fois plus "fort" que le bruit d'une seule voiture.

Le niveau sonore est aujourd'hui modélisé par la relation :

$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où L est le niveau sonore en décibel (dB), I l'intensité sonore, et I_0 une intensité sonore de référence.

Ce niveau sonore est construit de sorte qu'en multipliant par 10^n l'intensité sonore, on augmente le niveau sonore de $10n$ dB :

$$L' = 10\log_{10}\left(10^n \times \frac{I}{I_0}\right) = 10\log_{10}(10^n) + 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \times n + L$$

Comme $2 \approx 10^{0,3}$, multiplier une intensité sonore par 2 augmente le niveau sonore d'environ 3 dB.

34.3.3 Chimie

Potentiel Hydrogène (pH) :

En chimie de l'eau, on utilise le potentiel hydrogène (pH) pour caractériser l'acidité d'une solution, à travers l'activité des ions hydronium H_3O^+. Plus précisément, on mesure cela grâce à la concentration $[H^+]$ d'ions hydrogènes H^+ dans une solution. On modélise le pH par le relation :

$$pH = -\log_{10}\Big([H^+]\Big)$$

Pour des solutions aqueuses avec des concentrations en ions assez faibles, ce pH varie usuellement entre 0 et 14 (voire entre 2 et 12) :

- Entre 0 et 7, la solution est dite acide, et l'est d'autant plus que le pH est bas.
- Entre 7 et 14, elle est dit basique, et l'est d'autant plus que le pH est élevé.
- Un pH de 7 correspond à une solution neutre, comme de l'eau pure.

Datation au carbone 14 :

Le carbone 14 est un isotope radioactif de l'atome de carbone. Il est présent et produit en quantité stable dans chaque être vivant, et sa concentration décroît dans le temps à partir de la mort de cet être. Cette décroissance suit la loi de décroissance radioactive, c'est-à-dire que le nombre $N(t)$ de noyaux de carbone 14 en fonction du temps t écoulé est donnée par :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où N_0 est la quantité initiale et $\lambda > 0$ est une constante caractéristique du noyau considéré, dite constante de désintégration.

Il est habituel de considérer un temps dit de "demi-vie" pour ce type de décroissance, c'est-à-dire le temps qui doit s'écouler pour que la moitié des noyaux soient désintégrés. Ce temps t vérifie alors

$$N(t) = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Pour le carbone 14, il est d'environ 5730 années.

34.4 Constante d'Euler-Mascheroni

Cette section est un appendice sur une constante mathématique reliée de près au logarithme néperien.

Commençons par intuiter le résultat que l'on va montrer ensuite. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^n = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

Ainsi, $\ln(n)$ représente l'aire sous l'hyperbole représentant la fonction inverse, sur l'intervalle $[1, n]$. Cette aire peut être approchée par la méthode des rectangles, avec des rectangles de largeur 1, par la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Les suites $(\ln(n))_n$ et $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)_n$ ont donc le même comportement (elles sont en réalité équivalentes), donc la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_n$ doit converger vers un certain réel. Démontrons cela.

Pour alléger les écritures, on notera pour tout $n \in \mathbb{N}$* :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

La fonction inverse est décroissante et positive sur $]0, +\infty[$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$$

et en intégrant sur $[k, k+1]$

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$$

Soit $n \geq 2$. D'une part pour $k \geq 1$, on a

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$$

donc en sommant pour les entiers $1 \leq k \leq n$, on a

$$H_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

D'autre part, pour $k \geq 2$, on a

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$$

donc en sommant pour les entiers $2 \leq k \leq n$, on a

$$H_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^n = \ln(n)$$

et

$$H_n \leq \ln(n) + 1$$

Finalement, on a pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \ln(n+1) \leq H_n &\leq \ln(n) + 1 \\ \ln(n+1) - \ln(n) \leq H_n - \ln(n) &\leq 1 \\ 0 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq H_n - \ln(n) &\leq 1 \end{aligned}$$

La suite $(H_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ est donc bornée.

Or, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 0 \quad \text{par concavité de } \ln \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(H_n - \ln(n))_n$ est décroissante. Puisqu'elle est bornée par 0 et 1, elle converge donc vers un réel $\gamma \in [0, 1]$.

Cette constante γ, appelée constante d'Euler-Mascheroni, est liée à d'autres fonctions (fonction Γ, fonction logarithme intégral li, fonction ζ de Riemann, etc.), mais sa nature "arithmétique" reste floue : on ne sait par exemple toujours pas si elle est rationnelle ou irrationnelle !

35 Fonctions convexes

- **Niveau :** Terminale spécialité, Terminale complémentaire
- **Pré-requis :** dérivation, tangentes à une courbe, intervalles, théorème de Thalès, fonctions exponentielles et logarithmes, raisonnement par récurrence, théorème des valeurs intermédiaires

35.1 Fonctions convexes

Dans toute cette leçon, on considèrera des fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

35.1.1 Définitions, propriétés

Définition f est convexe sur un intervalle I si pour tous $x, y \in I$, et pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$f\Big(tx + (1-t)y\Big) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I.

Proposition (admise) f est convexe (resp. concave) sur I si, et seulement si, pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, le segment d'extrémités $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ est au-dessus (resp. en-dessous) de la courbe représentative de f sur $[x, y]$.

Démonstration

En utilisant la définition de la concavité, on remarque qu'il suffit de démontrer la propriété pour les fonctions convexes.

Commençons par démontrer un résultat intermédiaire. On considère $x, y \in I$ tels que $x < y$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$x = (1-t)x + tx \leq (1-t)x + ty \leq (1-t)y + ty = y$$

car $t \in [0,1]$, $1-t \in [0,1]$ et $x < y$. Ainsi, pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in [x, y]$.

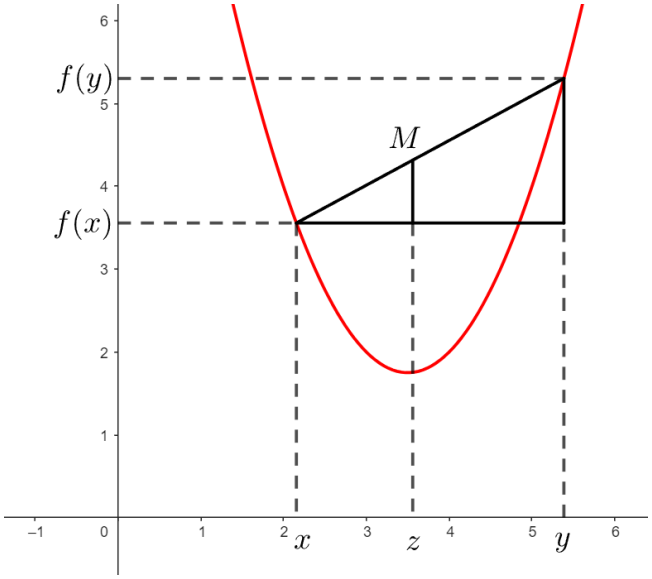
Réciproquement, soit $z \in [x, y]$. On a, pour $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} z = (1-t)x + ty &\Leftrightarrow z = t(y-x) + x \\ &\Leftrightarrow z - x = t(y-x) \\ &\Leftrightarrow \frac{z-x}{y-x} = t \quad \text{car } x < y \end{aligned}$$

Comme $x \leq z \leq y$, on a $\frac{z-x}{y-x} \in [0,1]$. Ainsi, tout réel $z \in [x, y]$ peut s'écrire sous la forme $(1-t)x + ty$, avec $t \in [0,1]$.

Il y a donc une correspondance bijective entre $[x, y]$ et l'ensemble des $(1-t)x + ty$, avec $t \in [0,1]$.

Supposons f convexe sur I. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. On considère un réel $z \in [x, y]$, donc de la forme $z = (1-t)x + ty$ avec $t \in [0, 1]$. On note M le point du segment d'extrémités $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ d'abscisse $(1-t)x + ty$. On note y_M son ordonnée.



En appliquant le théorème de Thalès, il vient alors que

$$\frac{z-x}{y-x} = \frac{y_M - f(x)}{f(y) - f(x)}$$

c'est-à-dire que

$$y_M = (1-t)f(x) + tf(y)$$

Ainsi, par convexité de f, $f\Big((1-t)x + ty\Big) \leq y_M$, donc M est au-dessus de $(z, f(z))$.
Le sens réciproque se montre à partir de la même construction, en utilisant cette fois la réciproque du théorème de Thalès. On démontre ainsi l'inégalité de convexité en comparant les ordonnées, après avoir montré que le point de coordonnées $\Big((1-t)x + ty, (1-t)f(x) + tf(y)\Big)$ est bien le point M.

◈

Cette proposition est admise au lycée. On a donc donné ici uniquement une idée de preuve, qui n'étudie par rigoureusement tous les cas. En effet, il faut soit étudier différents cas possibles, selon le signe de $f(x) - f(y)$, soit utiliser le théorème de Thalès avec des longueurs algébriques.

Au passage, la représentation graphique donnée ci-dessus donne à voir l'aspect d'une courbe représentative d'une fonction convexe (et donc d'une fonction concave).

35.1.2 Exemples

On donne ici quelques propriétés de convexité/concavité de fonctions usuelles.

Proposition On considère la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- ❖ Si n est pair, alors cette fonction est convexe sur $\mathbb{R}$.
- ❖ Si n est impair, alors cette fonction est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$.

Proposition La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pourra démontrer ces résultats plus tard, lorsque nous disposerons d'une caractérisation des fonctions convexes/concaves dans le cas où elles sont dérivables. Ces résultats sont donc données ici uniquement à titre d'exemples classiques.

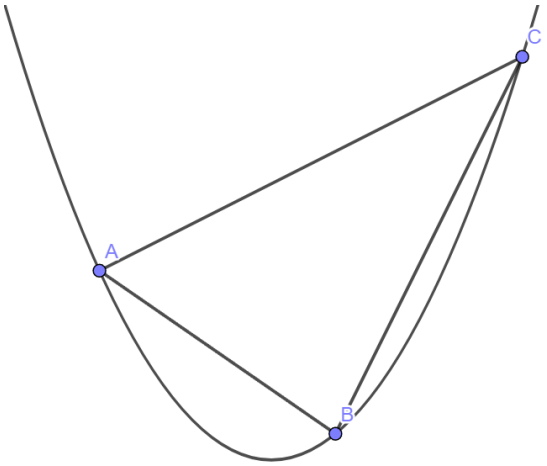
35.1.3 Compléments

On présente ici quelques compléments sur la convexité. Ils ne sont pas étudiés de manière systématique au lycée, mais peuvent faire l'objet d'exercices.

Proposition (Inégalité des pentes) On suppose f convexe sur un intervalle I, et on considère $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$. Alors

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Remarque Cette inégalité porte ce nom puisque les trois rapports ci-dessus désignent des pentes de sécantes à la courbe représentative de f.



Démonstration

Soit $x \in I$. On considère la fonction $f_x : s \mapsto \frac{f(s)-f(x)}{s-x}$ définie sur $I \setminus \{x\}$. Soient $y, z \in I$ distincts de x tels que $x < y < z$. Alors $y \in]x, z[$, donc il existe $t \in]0, 1[$ tel que $y = (1-t)x + tz$. Par convexité de f sur I, on a alors

$$f(y) \leq (1-t)f(x) + tf(z) \Rightarrow f(y) - f(x) \leq t(f(z) - f(x))$$

D'autre part, on a vu que nécessairement $t = \frac{y-x}{z-x}$. Ainsi, on a

$$f(y) - f(x) \leq \frac{y-x}{z-x}(f(z) - f(x))$$

et comme $y - x > 0$

$$f_x(y) \leq f_x(z)$$

De la même manière, on démontre que cette égalité est vraie pour tous $y, z \in I$ distincts de x. f_x est donc croissante sur $I \setminus \{x\}$

On remarque ensuite que pour tous $x, y \in I$ distincts, on a $f_x(y) = f_y(x)$. On déduit donc de la croissance de ce type de fonction les deux inégalités à démontrer.

◈

Proposition (Inégalité de Jensen) On suppose f convexe sur I. On considère $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$. Alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$$

Démonstration

On procède par récurrence sur n. Pour $n \in N^*$, on note $P(n)$ la propriété :

"Pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$, et pour tous $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, on a $f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i)$."

- ❖ ***Initialisation :*** *Pour $n = 1$, on a une égalité trivialement vraie. Pour $n = 2$, il s'agit de la définition de la convexité de f sur I. $P(1)$ et $P(2)$ sont donc vraies.*
- ❖ ***Hérédité :*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque et fixé. Supposons $P(n)$ vraie. Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ et $t_1, \dots, t_{n+1} \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1$.*

  Si $t_{n+1} = 1$, alors les autres t_i sont nuls. Dans ce cas, les sommes se réduisent à un seul terme et l'inégalité est trivialement vraie.

  On suppose à présent que $t_{n+1} \neq 1$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i + t_{n+1} x_{n+1} = (1 - t_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{1 - t_{n+1}} x_i + t_{n+1} x_{n+1}$$

  En notant pour tout $1 \leq i \leq n$, $s_i = \frac{t_i}{1-t_{n+1}}$, on a alors

$$\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i = (1 - t_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} s_i x_i + t_{n+1} x_{n+1}$$

  On admet que $\sum_{i=1}^n s_i x_i \in I$ (c'est un résultat de convexité des intervalles). On peut donc appliquer $P(2)$, ce qui donne

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq (1 - t_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right) + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

  On remarque maintenant que les réels s_i sont tous dans $[0,1]$ et de somme 1. Ainsi, d'après $P(n)$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} s_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} s_i f(x_i)$$

  Par conséquent, comme $1 - t_{n+1} \geq 0$

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq (1 - t_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} s_i f(x_i) + t_{n+1} f(x_{n+1})$$

  d'où

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i)$$

  $P(n+1)$ est alors vraie et la propriété est héréditaire.

- ❖ ***Conclusion :*** *La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$, et est héréditaire pour $n \geq 1$. Par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.*

◈

35.2 Dérivation et convexité

Maintenant, on étudie différentes caractérisations des fonctions convexes et concaves pour les fonctions dérivables, ainsi que certaines interprétations de ces propriétés.

35.2.1 Dérivée

Proposition (admise) Soit f dérivable sur I. Alors f est convexe (respectivement concave) sur I si, et seulement si, f' est croissante (respectivement décroissante) sur I.

Démonstration

On ne démontrera que le cas où f est convexe, le cas concave étant analogue.

Supposons f convexe sur I. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Pour tout $t \in [a, b]$, on a d'après l'inégalité des pentes :

$$\frac{f(a) - f(t)}{a - t} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(t)}{b - t}$$

En faisant tendre t vers a dans la première inégalité, comme f est dérivable en a, on en déduit que :

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

De même, en faisant tendre t vers b dans la seconde inégalité, comme f est dérivable en b, on a :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$$

Par conséquent, $f'(a) \leq f'(b)$, et f' est donc croissante sur I.

Supposons maintenant f' croissante sur I, et montrons que f est convexe sur I. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$, et $t \in [0, 1]$.

Comme $t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)y \in [x, y]$. Puisque f est dérivable sur I, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $a \in [tx + (1 - t)y, y]$ tel que :

$$f'(a) = \frac{f(y) - f(tx + (1 - t)y)}{y - (tx + (1 - t)y)} = \frac{f(y) - f(tx + (1 - t)y)}{t(y - x)}$$

c'est-à-dire

$$f(y) = f(tx + (1 - t)y) + tf'(a)(y - x)$$

De même, puisque f est dérivable sur I, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $b \in [x, tx + (1 - t)y]$ tel que :

$$f'(b) = \frac{f(tx + (1 - t)y) - f(x)}{(tx + (1 - t)y) - x} = \frac{f(tx + (1 - t)y) - f(x)}{(1 - t)(y - x)}$$

c'est-à-dire

$$f(x) = f(tx + (1 - t)y) - (1 - t)f'(b)(y - x)$$

On en déduit que :

$$tf(x) + (1 - t)f(y) = f(tx + (1 - t)y) + t(1 - t)(y - x)(f'(a) - f'(b))$$

Comme $t \in [0, 1]$, $t(1 - t) \geq 0$, et puisque $x < y$, $y - x > 0$. Par définition, $b \in [x, tx + (1 - t)y]$ et $a \in [tx + (1 - t)y, y]$, donc $a \geq b$. Par croissance de f' sur I, on en déduit donc que $f'(a) - f'(b) \geq 0$, et ainsi que

$$tf(x) + (1 - t)f(y) \geq f(tx + (1 - t)y)$$

f est donc convexe sur I.

◈

Cette caractérisation des fonctions convexes (et concaves) pour les fonctions dérivables est très utile en pratique. Sa démonstration demande l'usage du théorème des accroissements finis, ce qui nécessite de l'admettre au lycée.

Proposition Soit f dérivable et convexe (respectivement concave) sur I. Alors la courbe représentative de f est au-dessus (respectivement en-dessous) de ses tangentes sur I.

Démonstration
La démonstration dans le cas concave est similaire à celle dans le cas convexe.

Soit $x_0 \in I$. On pose, pour tout $x \in I$, $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Alors g est bien définie sur I et dérivable sur cet intervalle, en tant que somme de fonctions dérivables sur I. Pour tout $x \in I$, on a

$$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$$

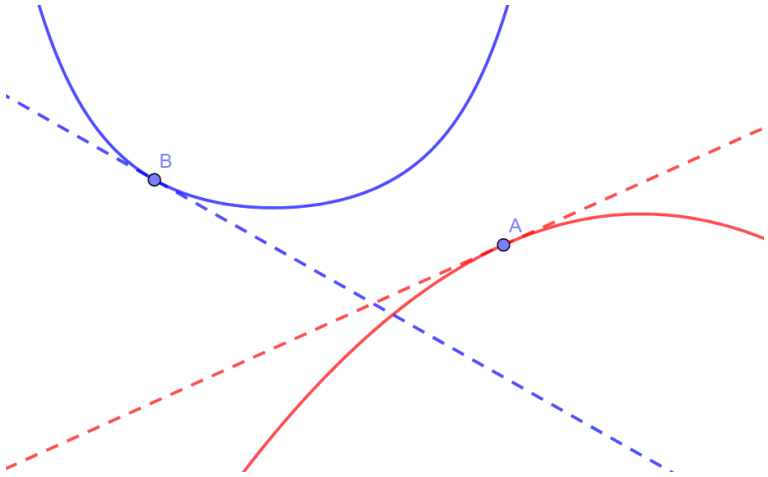
Comme f est convexe sur I, on a $g'(x) \geq 0$ si $x \geq x_0$ et $g'(x) \leq 0$ si $x \leq x_0$. On en déduit que g admet un minimum sur I en x_0. Or

$$g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) = 0$$

Par conséquent, g est positive sur I, ce qui prouve que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I.

◈

Cette propriété donne une caractérisation géométrique et visuelle du caractère convexe/concave d'une fonction. Par exemple, ci-dessous, en bleu la courbe représentative d'une fontion convexe et en rouge celle d'une fonction concave.



35.2.2 Dérivée seconde

Définition On dit que f est deux fois dérivable sur I si elle est dérivable sur I, et f' est également dérivable sur I. Dans ce cas, la dérivée $(f')'$ de f' est appelée dérivée seconde de f sur I, et est notée f''.

Proposition Soit f deux fois dérivable sur I. Alors f est convexe (respectivement concave) sur I si, et seulement si, f'' est positive (respectivement négative) sur I.

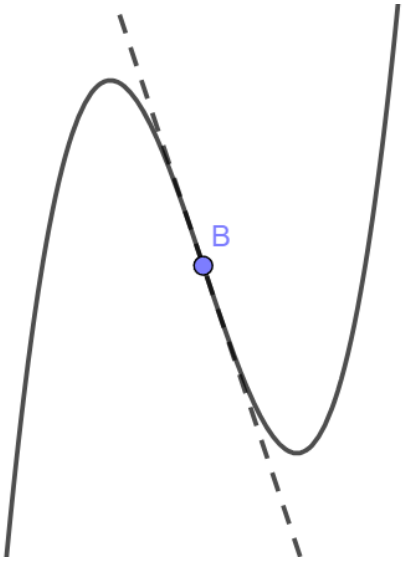
Démonstration *On sait que f'' est positive (respectivement négative) sur I si, et seulement si, f' est croissante (respectivement décroissante) sur I. On conclut en utilisant la caractérisation précédente pour les fonctions dérivables.* ◈

Cette caractérisation est très utile en pratique, puisqu'elle se ramène, pour les fonctions deux fois dérivables, à une étude de signe.

Remarque On peut utiliser cette caratérisation pour démontrer facilement les propriétés de convexité et de concavité des exemples donnés au 1.2.

35.2.3 Courbe représentative

Définition Soit f deux fois dérivable sur I, et soit $x_0 \in I$. On dit que $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f si la tangente en ce point traverse la courbe.



Proposition Soit f deux fois dérivable sur I, et soit $x_0 \in I$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f
2. f' change de sens de variation en x_0
3. f'' s'annule en changeant de signe en x_0

Démonstration

- $(2 \Leftrightarrow 3)$ *C'est une conséquence immédiate de la caractérisation des variations d'une fonction dérivable par le signe de sa dérivée.*
- $(1 \Leftrightarrow 2)$ *Dire que la tangente à la courbe représentative de f coupe cette courbe en $(x_0, f(x_0))$ revient à dire que sur un certain intervalle centré en x_0, cette tangente est au-dessus de la courbe puis en-dessous, ou inversement. D'après une des caractérisations précédentes, cela revient à dire que f' est décroissante puis croissante, ou inversement. Dans les deux cas, elle change de sens de variation.*

◈

Proposition Soit f deux fois dérivable sur I telle que f'' soit continue sur I. Alors f est convexe/concave par morceaux, c'est-à-dire que l'on peut subdiviser I en intervalles sur lesquels f est alternativement convexe/concave.

Démonstration *Puisque f'' est continue sur l'intervalle I, on peut subdiviser I en intervalles sur lesquels f'' est positive ou négative. En effet, comme f'' est continue sur I, par un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, entre deux points d'annulation, f'' reste de signe constant. D'après la caractérisation des fonctions convexes/concaves pour les fonctions deux fois dérivables, on en déduit que sur chacun de ces intervalles f est soit concave, soit convexe, ce que l'on voulait démontrer.* ◈

Remarque Si l'on subdivise l'intervalle I de cette façon, les points de raccordement entre deux sous-intervalles sont alors des points d'inflexions de la courbe représentative de f.

Pour tracer la courbe représentative d'une fonction deux fois dérivable et de dérivée seconde continue (ce qui est le cas de la majorité des fonctions étudiées au lycée), il peut donc être intéressant d'étudier les intervalles sur lesquels cette fonction est convexe/concave, ainsi que ses points d'inflexions (en plus des points d'annulations et des variations).

35.3 Applications

35.3.1 Inégalités usuelles

Proposition ❖ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$
❖ $\forall x \in]0,+\infty[, \ln(x) \leq 1+x$

Démonstration
Bien que l'on puisse démontrer ces inégalités classiques par une étude de signe d'une fonction, les propriétés de convexité et de concavité des fonctions exponentielles et logarithmes permettent de conclure plus facilement.
Tout d'abord, la dérivée seconde de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ est elle-même, et est donc positive sur $\mathbb{R}$, ce qui rend la fonction exponentielle convexe sur $\mathbb{R}$. La dérivée seconde de $\ln$ sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, et est donc négative sur cet intervalle. $\ln$ est donc concave sur $]0,+\infty[$.
On remarque que la droite d'équation $y = 1+x$ est la tangente à la courbe représentative de l'exponentielle en 0, et la tangente à la courbe représentative de $\ln$ en 1. On en déduit alors les inégalités souhaitées en examinant la position de cette tangente par rapport aux courbes, donnée par la convexité/concavité. ◈

Proposition (Inégalité de Bernouilli) Pour tous $x \geq -1$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Démonstration
On peut démontrer cette inégalité par récurrence sur n en fixant x. On va la prouver ici en utilisant une propriété de convexité.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, l'inégalité est trivialement vérifiée pour tout $x \geq -1$. Soit $n \geq 2$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^n$. f est alors deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions deux fois dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

On en déduit que pour tout $x \geq -1$, $f''(x) \geq 0$, et que f est convexe sur $[-1,+\infty[$. La tangente à f en $0 \in [-1,+\infty[$ a pour équation

$$y = n(1+0)^{n-1}(x-0) + (1+0)^n = 1+nx$$

Ainsi, pour tout $x \geq -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$. ◈

Remarque Cette inégalité est un lemme très utile à la démonstration des limites de suites géométriques.

35.3.2 Inégalité arithmético-géométrique

Proposition Pour tous réels positifs x et y, on a

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Démonstration

Soient x et y deux réels positifs. On a :

$$\begin{aligned}(x-y)^2 \geq 0 &\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0\\ &\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy\\ &\Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy\\ &\Rightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \quad \textit{car } x \textit{ et } y \textit{ sont positifs}\\ &\Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}\end{aligned}$$

◈

Remarque Cette inégalité porte le nom d'inégalité arithmético-géométrique (ou plutôt en est un cas particulier), car elle donne une inégalité entre la moyenne arithmétique de deux grandeurs et leur moyenne géométrique.

Cette inégalité est généralisable à plus de deux grandeurs, et sa preuve utilise la concavité de $\ln$.

Proposition (Inégalité arithmético-géométrique) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous réels $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs, on a

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$$

Démonstration

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. On note $m = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$. La tangente à la courbe représentative de $\ln$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$. Par concavité de $\ln$, on a pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$\ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \frac{x_k}{m} - 1$$

En sommant ces inégalités, il suit que

$$\ln\left(\frac{x_1}{m}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{x_n}{m}\right) \leq \frac{x_1}{m} + \ldots + \frac{x_n}{m} - n$$

En utilisant les propriétés usuelles du logarithme, on a alors

$$\begin{aligned}&\ln\left(\frac{x_1 \ldots x_n}{m^n}\right) \leq \frac{x_1}{m} + \ldots + \frac{x_n}{m} - n\\ \Rightarrow &\ln\left(\frac{x_1 \ldots x_n}{m^n}\right) \leq \frac{mn}{m} - n\\ \Rightarrow &\ln\left(\frac{x_1 \ldots x_n}{m^n}\right) \leq 0\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\frac{x_1 \ldots x_n}{m^n} \leq 1$$

puis que

$$x_1 \ldots x_n \leq m^n$$

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq m$$

ce que l'on voulait démontrer.

◈

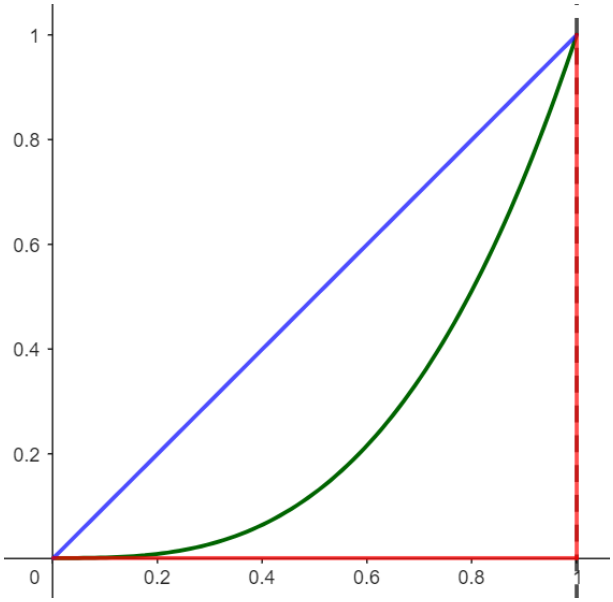
35.3.3 Courbe de Lorenz et indice de Gini

Définition On appelle courbe de Lorenz toute courbe représentative d'une fonction $L : [0,1] \mapsto [0,1]$ telle que :

- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$
- L est croissante sur $[0,1]$
- L est convexe sur $[0,1]$
- Pour tout $x \in [0,1]$, $L(x) \leq x$

Remarque De telles fonctions apparaissent lorsque l'on étudie la répartition d'une certaine donnée statistique dans un certain milieu, ou une population (distribution de richesses par exemple).
Par exemple, dans ce cas de répartition des richeses, on peut interpréter $L(0,4) = 0,2$ comme "les 40% les moins riches de la population possèdent 20% de la richesse totale". C'est ce type d'interprétation qui induit l'hypothèse de convexité.

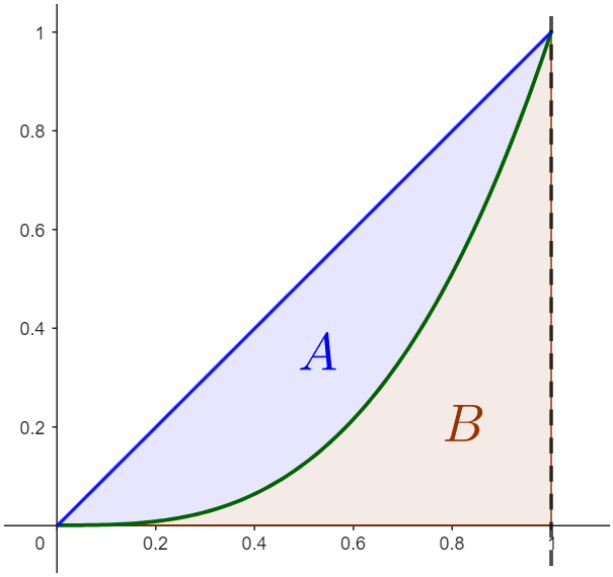
Les cas extrêmes $L(x) = x$ et $L(x) = 1$ si $x = 1$, $L(x) = 0$ sinon, représentent respectivement une répartition parfaitement égale des richesses, et une répartition parfaitement inégale (100% de la richesse détenue par une seule personne).



Définition On considère une courbe de Lorenz, représentative d'une fonction L. On appelle indice de Gini (ou coefficient de Gini) associé à la grandeur en question le coefficient suivant :

$$G = 2\int_0^1 (x - L(x))dx$$

Cet indice de Gini est à interpréter comme le rapport entre l'aire sous la courbe de Lorenz et l'aire sous la droite d'équation $y = x$, qui représente une répartition parfaitement égale.



L'indice de Gini est la rapport $\frac{A}{A+B}$. On a $A+B=\frac{1}{2}$, et $A=\int_0^1(x-L(x))dx$, d'où la définition ci-dessus.

Il varie entre 0 et 1. Plus il est proche de 0, plus le domaine A est petit et plus les richesses sont équitablement réparties (le cas $A=0$ se produisant uniquement pour $L(x)=x$). Plus il se rapproche de 1, plus le domaine A est grand et plus les inégalités de répartition sont grandes (le cas $A=1$ correspond au cas où une personne détient 100% des richesses).

36 Primitives, équations différentielles

- **Niveau :** Terminale spécialité, Terminale complémentaire
- **Pré-requis :** notions de fonction, dérivation, intervalles de $\mathbb{R}$, continuité, notion d'intégrale, équations du second degré, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques

36.1 Équations différentielles et primitives

36.1.1 Définitions

Définition Une équation différentielle est une équation fonctionnelle (dont l'inconnue est donc une fonction) qui relie la fonction à ses dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre maximal de dérivation qui intervient dans l'équation.

Exemples
- $y' = y + 2$ est une équation différentielle d'ordre 1.
- $2y^{(3)} + y^2 = 8y' - \frac{2}{x}$ est une équation différentielle d'ordre 3.

Définition Résoudre une équation différentielle sur un intervalle I revient à trouver toutes les fonctions dérivables (éventuellement plusieurs fois selon l'ordre de l'équation différentielle) qui vérifient l'équation pour tout x dans I.

Exemples
- Résoudre $y' = y + 2$ sur $\mathbb{R}$ revient à trouver toutes les fonctions y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$: $y'(x) = y(x) + 2$.
- Résoudre $2y^{(3)} + y^2 = 8y' - \frac{2}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ revient à trouver toutes les fonctions y dérivables 3 fois sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$: $2y^{(3)}(x) + y(x)^2 = 8y'(x) - \frac{2}{x}$.

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit qu'une fonction F, définie sur I, est une primitive de f sur I si elle est dérivable sur I, et si pour tout x dans I : $F'(x) = f(x)$.

Remarque Chercher une primitive d'une fonction f sur un intervalle I revient donc à résoudre, sur l'intervalle I, l'équation différentielle $y' = f$.

Exemples
- $x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.
- $x \mapsto \frac{1}{3x-2}$ est une primitive de $x \mapsto \frac{-3}{(3x-2)^2}$ sur $\left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$.

36.1.2 Propriétés

Proposition Soient f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Soit G une fonction définie et dérivable sur I. Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si il existe un réel C tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$: $G(x) = F(x) + C$.

Démonstration *Supposons que G est une primitive de f sur I. Alors pour tout $x \in I$:*

$$\begin{aligned} G'(x) = f(x) &\Rightarrow G'(x) = F'(x) \\ &\Rightarrow G'(x) - F'(x) = 0 \\ &\Rightarrow (G-F)'(x) = 0 \end{aligned}$$

La dérivée de $G-F$ est nulle sur l'intervalle I, donc $G-F$ est constante sur I (il est important de se placer sur un intervalle). Il existe donc un réel C tel que pour tout $x \in I$, $G(x)-F(x) = C$, ie $G(x) = F(x)+C$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réel C tel que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + C$. Alors, comme G et F sont dérivables sur I, on a pour tout $x \in I$, $G'(x) = F'(x) = f(x)$, car F est une primitive de f sur I. Par conséquent, G est une primitive de f sur I.

◈

Remarque Cette proposition implique que si une fonction admet une primitive sur un intervalle, alors elle en admet une infinité. Ces primitives ne diffèrent alors que d'une constante. Ainsi, si l'on connaît une primitive de la fonction sur un intervalle, on peut toutes les connaitre.
On en déduit deux autres propositions importantes.

Proposition Si deux primitives d'une même fonction sur un même intervalle coïncident en une valeur, alors elles sont identiques sur cet intervalle.

Démonstration
Soient F et G deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$, et supposons que $G(x_0) = F(x_0)$. D'après la proposition précédente, il existe un réel C tel que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + C$. En particulier, $G(x_0) = F(x_0) + C = F(x_0)$, donc $C = 0$. On en déduit que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x)$, donc G et F coïncident sur I.

◈

Proposition Soient f une fonction définie sur un intervalle I, admettant des primitives sur cet intervalle, et soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
On appelle souvent la condition $F(x_0) = y_0$ une condition initiale.

Démonstration
Soit G une primitive quelconque de f sur I. On définit la fonction F par : $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$, pour tout $x \in I$. Comme G est une primitive de f sur I, c'est également le cas de F. De plus, $F(x_0) = G(x_0) + y_0 - G(x_0) = y_0$, ce qui prouve l'existence.
Supposons que f admet une primitive H sur I telle que $H(x_0) = y_0$. Alors $F(x_0) = H(x_0)$, donc d'après la proposition précédente, F et H coïncident sur I, ce qui prouve l'unicité.

◈

Remarque Il est important de préciser que la fonction doit admettre des primitives. En effet, certaines fonctions n'admettent pas de primitives sur certains intervalles.
Toutefois, le résultat suivant permet de prouver l'existence de primitives dans de nombreux cas.

Théorème Toute fonction continue sur un segment admet une primitive sur ce segment.

Remarques

❖ Ce théorème est un corollaire immédiat du théorème fondamental de l'analyse. Celui-ci précise même la forme de cette primitive, qui s'écrit comme une intégrale.

❖ Toutefois, la réciproque de ce théorème est fausse. : certaines fonctions non continues admettent tout de même des primitives. La fonction $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par $0 \mapsto 0$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ est de dérivée non continue (hors programme). Sa dérivée est donc non continue sur $\mathbb{R}$, mais en tant que dérivée, elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$.

❖ La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Pourtant, cette primitive ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

36.1.3 Primitives usuelles

Remarque En s'appuyant sur les règles de dérivation et en lisant les tableaux de dérivées usuelles à l'envers, on obtient les règles et tableaux de primitives suivants.

Proposition (Primitives usuelles)

Fonction $x \mapsto \ldots$	Primitive $x \mapsto \ldots$	Intervalle
a (réel)	ax	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0,\ n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$, $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Proposition Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soient F et G des primitives respectives de f et g sur I. Alors :

❖ $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

❖ Pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Remarque Attention, FG n'est pas nécessairement une primitive de fg. De manière générale, il n'existe pas de formule permettant de calculer la primitive de fg ou de $\frac{f}{g}$ à partir de F et G.

Proposition (Primitives composées) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction $x \mapsto \ldots$	Primitive $x \mapsto \ldots$	Conditions
$u'u^n$	u^{n+1}	si $n < -1$, $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, ou $u(x) < 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$u'e^u$	e^u	
$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u$	v est une fonction dérivable sur un intervalle J et pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$

36.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

36.2.1 Définitions

Définition On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme $y' + ay = b$, où a et b sont des fonctions continues, et a non nulle.
Lorsque a et b sont des constantes, on dit que l'équation est à coefficients constants.

Remarque Au lycée, on se restreint à l'étude approfondie des équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Certaines à coefficients non constants peuvent toutefois faire l'objet d'exercices. Sauf indication contraire, on supposera par la suite que a et b sont constantes.

Définition Lorsque l'on demande en plus que la solution recherchée vérifie une condition initiale, on dit qu'il s'agit d'un problème de Cauchy.

36.2.2 Équation homogène

Définition On considère une équation différentielle de la forme $y'+ay = b$. L'équation homogène associée est l'équation différentielle $y' + ay = 0$.

Théorème Les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{-ax}$, où C est un réel.

Démonstration
Commençons par vérifier que les fonctions de cette forme sont effectivement des solutions de l'équation homogène. Soit C un réel. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et de dérivée : $x \mapsto -aCe^{-ax}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$-aCe^{-ax} + a \times Ce^{-ax} = 0$$

Ainsi, les fonctions de cette forme sont bien solutions de l'équation homogène.

Maintenant, démontrons que toute solution de l'équation homogène s'écrit sous cette forme. Soit f une solution (sur $\mathbb{R}$) de l'équation $y' + ay = 0$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{ax}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} \\ &= -af(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} \quad \text{car } f \text{ est solution de } y' + ay = 0 \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

g' est nulle sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle), donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)e^{ax} = C$, ie $f(x) = Ce^{-ax}$. f est donc bien de la forme recherchée.

◈

36.2.3 Cas général

Proposition On considère une équation différentielle lde la forme $y' + ay = b$. Soit y_p une solution particulière de cette équation. Alors y est une solution de cette équation si et seulement si $y - y_p$ est solution de l'équation homogène associée.

Démonstration

Soit y une fonction définie sur un intervalle I.

Supposons que y est solution de $y' + ay = b$. En particulier, elle est dérivable sur I, donc $y - y_p$ également.

Pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} (y - y_p)'(x) &= y'(x) - {y_p}'(x) \\ &= b - ay(x) - (b - ay_p(x)) \quad \text{car } y \text{ et } y_p \text{ sont solutions de l'équation différentielle} \\ (y - y_p)'(x) &= a(y_p(x) - y(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, $(y - y_p)'(x) + a(y - y_p)(x) = 0$, donc $y - y_p$ est solution de l'équation homogène.

Réciproquement, supposons que $y - y_p$ est solution de l'équation homogène. Cela implique en particulier que y est dérivable sur I. On a alors pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (y - y_p)'(x) + {y_p}'(x) \\ &= -a(y - y_p)(x) + {y_p}'(x) \quad \text{car } y - y_p \text{ est solution de l'équation homogène} \\ &= -a(y - y_p)(x) + b - ay_p(x) \quad \text{car } y_p \text{ est solution de } y' + ay = b \\ y'(x) &= b - ay(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, $y'(x) + ay(x) = b$, donc y est solution de $y' + ay = b$.

◈

Remarque Ainsi, si l'on connait une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$, il suffit de résoudre l'équation homogène pour trouver toutes les solutions de $y' + ay = b$.

Théorème Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$, où C est un réel.

Démonstration

Montrons que la fonction $x \mapsto \frac{b}{a}$ est une solution particulière de $y' + ay = b$. En tant que fonction constante, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée la fonction nulle sur $\mathbb{R}$. Or, $\frac{b}{a} \times a = b$, donc cette fonction est bien solution de $y' + ay = b$.

D'après la proposition précedente, une fonction y définie sur $\mathbb{R}$ est solution de $y' + ay = b$ si et seulement si $y - \frac{b}{a}$ est solution de l'équation homogène associée. Or, les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{-ax}$. Ainsi, y est solution de $y' + ay = b$ si et seulement si $y - \frac{b}{a}$ est de la forme $x \mapsto Ce^{-ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$, ie il existe un réel C tel que pour tout $x \in I$, $y(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$.

◈

Corollaire Pour tous réels x_0 et y_0, le problème de Cauchy $y' + ay = b$, avec $y(x_0) = y_0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Soient x_0 et y_0 deux réels. Soit f une solution de l'équation $y' + ay = b$. D'après le théorème précédent, il existe un réel C tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Ce^{-ax} - \frac{b}{a}$.

Supposons que $f(x_0) = y_0$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x_0) = y_0 &\Rightarrow Ce^{-ax_0} - \frac{b}{a} = y_0 \\ &\Rightarrow Ce^{-ax_0} = y_0 + \frac{b}{a} \\ &\Rightarrow \boxed{C = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{ax_0}} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x_0 - x)} - \frac{b}{a}$. Ceci prouve l'unicité de la solution.

D'autre part, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(x_0 - x)} - \frac{b}{a}$ est une solution de $y' + ay = b$ qui vérifie $f(x_0) = y_0$, ce qui assure l'existence.

◈

36.3 Résolution approchée

On vient de voir comment résoudre de manière exacte les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Toutefois, il n'est pas toujours possible de résoudre des équations différentielles de manière exacte, même d'ordre 1, notamment lorsque celles-ci ne sont pas linéaires. On peut alors les résoudre de manière approchée en utilisant la méthode d'Euler.

On considère une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $y' = g(y, x)$, et l'on fixe une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$.

Soit $h > 0$. On a alors l'approximation affine : $y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hy'(x_0)$. Or, si y est solution de $y' = g(y, x)$, on a alors : $y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hg(y(x_0), x_0)$. Cela permet alors de calculer une valeur approchée de $y(x_0 + h)$.

Il suffit alors de recommencer le processus en partant de $y(x_0+h)$, ce qui permet d'approximer $y(x_0+2h)$. On recommence ensuite à partir de $y(x_0 + 2h)$, et ainsi de suite. Cette méthode est d'autant plus précise que h est petit, puisque les approximations affines sont alors meilleures.

On peut alors implémenter cet algorithme en langage Python. Voyons cela sur un exemple. On considère l'équation différentielle $y' + y^2 = 1$, avec la condition initiale $y(0) = 0$ Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a :

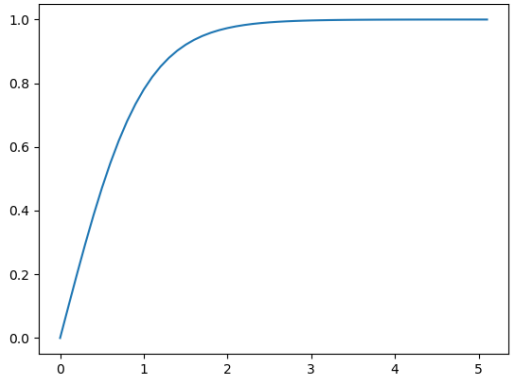
$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) = y(x) + h(1 - y(x)^2)$$

ce qui donne une "relation de récurrence", entre $y(x)$ et $y(x+h)$.

On a $y(0) = 0$, puis avec la relation précédente, $y(h) = y(0) + h(1 - y(0)^2) = h$, et ensuite $y(2h) = y(h) + h(1 - y(h)^2) = h + h(1 - h^2) = -h^3 + 2h$, et ainsi de suite. La courbe représentative de l'approximation passe donc par les points $(0, 0)$, (h, h) et $(2h, -h^3 + 2h)$.

On peut alors créer une fonction Python *euler*(x_0,y_0,b,h), qui donne l'approximation souhaitée sur l'intervalle $[x_0, b]$, avec un pas h.

```
def euler(x0,y0,b,h):
    x=x0
    y=y0
    X=[x]
    Y=[y]
    while x<b:
        y=y+h*(1-y**2)
        x+=h
        X.append(x)
        Y.append(y)
    plt.plot(X,Y)
    plt.show()
    return(X,Y)
```



Ici, *euler*(0,0,5,0.1) donne la courbe ci-dessus.

36.4 Autres types d'équations différentielles

Nous abordons dans cette dernière partie certains types d'équations différentielles qui ne sont pas étudiées de manière systématique au lycée, mais qui peuvent figurer dans certains exercices.

36.4.1 Équation logistique

Définition On appelle équation logistique une équation différentielle de la forme $y' = ay(1 - by)$, où a et b sont des réels.

Remarque Bien qu'elles soient d'ordre 1, les équations logistiques ne sont pas linéaires. Elles interviennent souvent lors de l'étude de populations en milieu fermé.

Proposition On considère une équation logistique $y' = ay(1 - by)$. Soient I un intervalle, et y une fonction définie et dérivable sur I, qui ne s'annule pas sur I. On pose $z = \frac{1}{y}$. Alors y est solution de $y' = ay(1 - by)$ si et seulement si z est solution de $z' = -az + ab$.

Démonstration

Avec $z = \frac{1}{y}$, on a $y = \frac{1}{z}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$ et $y' = -\frac{z'}{z^2}$. On a alors :

$$\begin{aligned} y' = ay(1-by) &\Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{a}{z}\left(1-\frac{b}{z}\right) \\ &\Leftrightarrow -z' = a(z-b) \quad \textit{en multipliant chaque membre par } z^2 \\ &\Leftrightarrow z' = -az + ab \end{aligned}$$

◈

Remarque Ainsi, bien qu'une équation logistique ne soit pas linéaire, un changement de variable permet de se ramener à l'étude d'une équation différentielle liéaire d'ordre 1 à coefficients constants.

36.4.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Définition On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 une équation différentielle de la forme $y'' + ay' + by = c$, où a, b et c sont des fonctions continues.
Lorsque a, b et c sont des fonctions constantes, on dit que l'équation est à coefficients constants.

Remarque On se restreint au cas où a, b et c sont des constantes. Même dans ce cas, la résolution détaillée de ce type d'équations est en dehors du programme du lycée. Toutefois, la résolution se fait de la même manière que pour l'ordre 1 : on cherche une solution particulière et on se ramène à l'étude de l'équation homogène associée. Pour l'équation homogène, on a le résultat suivant, qui est hors programme et donné à titre indicatif.

Théorème (admis) On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $y'' + ay' + by = 0$. On appelle équation caractéristique associée l'équation d'inconnue r : $r^2 + ar + b = 0$.

- Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2, alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{-r_1 x} + De^{-r_2 x}$, où C et D sont des réels.
- Si l'équation caractéristique admet une unique racine réelle r_0, alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto (C + Dx)e^{-r_0 x}$, où C et D sont des réels.
- Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, alors les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{\alpha x}\cos(\beta x) + De^{\alpha x}\sin(\beta x)$, où C et D sont des réels.

36.4.3 Équations à variables séparables

Définition On appelle équation à variables séparables toute équation différentielle d'ordre 1 de la forme $y' = h(y)g(x)$, où g et h sont des fonctions continues.

Proposition On suppose que h ne s'annule pas sur un certain intervalle J, et qu'elle y est continue. Soit I un intervalle sur lequel g est continue. On note G une primitive de g sur I et W une primitive de $\frac{1}{h}$ sur J. Alors y est solution de l'équation $y' = h(y)g(x)$ si et seulement si elle est solution de $W(y) = G(x) + C$, où C est un réel.

Démonstration

Pour tout $x \in I$, on a, par hypothèse, $h(y)(x) \neq 0$. Ainsi :

$$y'(x) = h(y)(x)g(x) \Rightarrow \frac{y'(x)}{h(y)(x)} = g(x)$$

Soit $x_0 \in I$. Par hypothèse, les fonctions $t \mapsto \frac{y'(t)}{h(y)(t)}$ et $t \mapsto g(t)$ sont continues sur $[x_0, x]$ ou $[x, x_0]$ (selon si $x > x_0$ ou $x < x_0$). On a alors :

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{h(y)(t)} dt = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

W est une primitive de $\frac{1}{h}$ sur J, donc en utilisant le tableau de primitives composées, la fonction $W(y)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{y'(t)}{h(y)(t)}$ sur I, donc sur $[x_0, x]$ ou $[x, x_0]$ également. C'est également le cas pour G, puisqu'il s'agit d'une primitive de g sur I. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a donc :

$$W(y)(x) - W(y)(x_0) = G(x) - G(x_0) \Rightarrow \boxed{W(y)(x) = G(x) + C} \quad \text{avec } C = W(y)(x_0) - G(x_0)$$

Réciproquement, pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} W(y)(x) = G(x) + C &\Rightarrow y'(x)W'(y)(x) = G'(x) \quad \text{par la formule de dérivation d'une composée} \\ &\Rightarrow \frac{y'(x)}{h(y)(x)} = g(x) \quad \text{par définition de } W \text{ et } G \\ &\Rightarrow y'(x) = h(y)(x)g(x) \end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence souhaitée.

◈

Remarque Cette proposition permet de se ramener à l'étude d'une autre équation différentielle, qui selon les cas, peut être plus facile à résoudre (tout du moins sur un intervalle où h ne s'annule pas).

37 Intégrales, primitives

- **Niveau :** Terminale spécialité, Terminale complémentaire
- **Pré-requis :** dérivation, continuité, intervalles, suites, limites

Dans toute cette leçon, sauf mention contraire, on considère une fonction f définie sur une segment $[a,b]$, avec $a<b$.

37.1 Primitive d'une fonction

37.1.1 Définition et propriétés

Définition On dit qu'une fonction F définie sur $[a,b]$ est une primitive de f sur $[a,b]$ si elle y est dérivable et si $F'=f$ sur cet intervalle..

Remarque Le concept de primitive d'une fonction est donc le concept "réciproque" de la dérivée d'une fonction. De ce fait, il y a un lien étroit entre ces deux concepts.

Proposition On suppose que f admet des primitives sur $[a,b]$, et on considère F une de ces primitives. Soit $G:[a,b]\to\mathbb{R}$. Alors G est une primitive de f sur $[a,b]$ si, et seulement si, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in[a,b]$, $G(x)=F(x)+C$.

Démonstration

($\Longleftarrow$) On suppose qu'il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in[a,b]$, $G(x)=F(x)+C$. Puisque F est dérivable sur $[a,b]$, G l'est aussi, et pour tout $x\in[a,b]$:

$$G'(x)=F'(x)=f(x)$$

G est donc une primitive de f sur $[a,b]$.

($\Longrightarrow$) Supposons que G est une primitive de f sur $[a,b]$. Alors pour tout $x\in[a,b]$, $G'(x)=F'(x)=f(x)$. Ainsi

$$(G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=0$$

La fonction $G-F$ est de dérivée nulle sur l'intervalle $[a,b]$, donc elle y est constante. Il existe alors $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x\in[a,b]$, $G(x)-F(x)=C$, c'est-à-dire

$$G(x)=F(x)+C$$

◈

Autrement dit, les primitives de f sur $[a,b]$ diffèrent d'une constante.

Remarques
- ❖ Cela implique en particulier que, si f admet une primitive, alors elle en admet une infinité.
- ❖ Une autre conséquence importante est la suivante. On considère F et G deux primitives de f sur un intervalle I. S'il existe $x_0 \in I$ tel que $F(x_0) = G(x_0)$, alors F et G sont identiques. En effet, on sait qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$, $F(x) = G(x) + C$. En particulier, on a $F(x_0) = G(x_0) + C = G(x_0)$, donc $C = 0$.
- ❖ Il est important de se placer sur un intervalle pour que cette propriété soit vraie. Si l'on se place sur une union d'intervalles, la propriété est vraie sur chacun d'entre eux, mais la constante C n'est pas nécessairement la même sur chaque intervalle.
- ❖ Il est également important de supposer que f admet des primitives, car certaines fonctions n'en admettent pas. Par exemple, la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongée par 1 en 0 n'admet pas de primitive sur $[-1,1]$.

Proposition On suppose que f admet des primitives sur $[a,b]$. Alors pour tous $x_0 \in [a,b]$, $y \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur $[a,b]$ telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration

Soit G une primitive de f sur $[a,b]$. On définit sur $[a,b]$ la fonction F par

$$F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$$

D'après la proposition précédente, F est une primitive de f sur $[a,b]$, et l'on a

$$F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$$

L'existence est donc assurée.

Si il existe une autre primitive de f sur $[a,b]$ qui vaut y_0 en x_0, alors d'après la remarque précédente, elle est identique à F, ce qui prouve l'unicité.

◈

Remarque La condition $F(x_0) = y_0$ est souvent appelée condition initiale. Elle porte notamment ce nom dans des modélisations de problèmes concrets, dans lesquels la variable x est un temps, et le temps x_0 (souvent 0) est l'instant initial du phénomène étudié.

37.1.2 Primitives usuelles

Tout comme il existe certaines règles de dérivation quant aux opérations algébriques usuelles, et des fonctions usuelles que l'on sait dériver, il existe des règles sur les primitives et les opérations algébriques, ainsi que des primitives usuelles. Pour trouver ces règles et primitives ususelles, il suffit de prendre les résultats correspondants sur les dérivées, et de les lire "dans l'autre sens".

Proposition (Primitives usuelles)

Fonction $x \mapsto \ldots$	**Primitive** $x \mapsto \ldots$	**Intervalle**
a (réel)	ax	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$, $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ si $n < -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Proposition Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soient F et G des primitives respectives de f et g sur I. Alors :

- ❖ $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- ❖ Pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Remarque Attention, FG n'est pas nécessairement une primitive de fg. De manière générale, il n'existe pas de formule permettant de calculer la primitive de fg ou de $\frac{f}{g}$ à partir de F et G.

Proposition (Primitives composées) Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

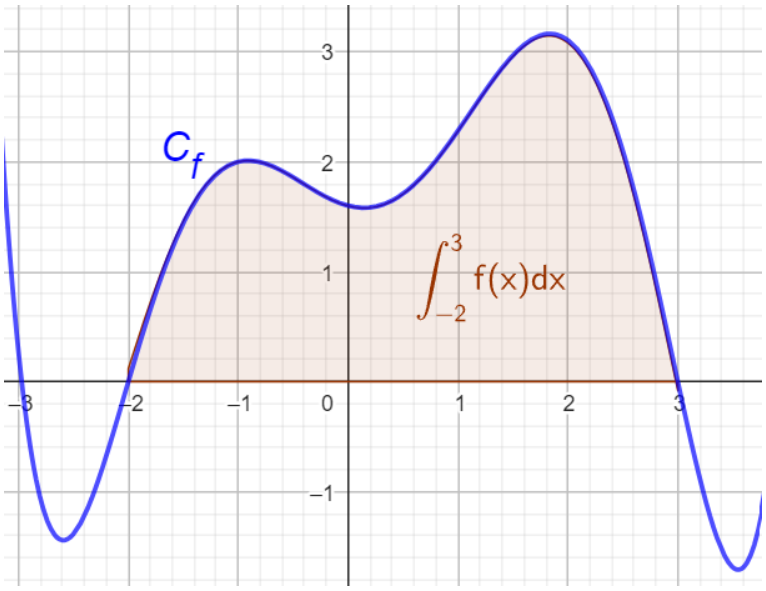
Fonction $x \mapsto \ldots$	**Primitive** $x \mapsto \ldots$	**Conditions**
$u'u^n$	u^{n+1}	si $n < -1$, $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u \rvert)$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, ou $u(x) < 0$ pour tout $x \in I$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x) > 0$ pour tout $x \in I$
$u'e^u$	e^u	
$u' \times (v' \circ u)$	$v \circ u$	v est une fonction dérivable sur un intervalle J et pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$

37.2 Intégrale et aire

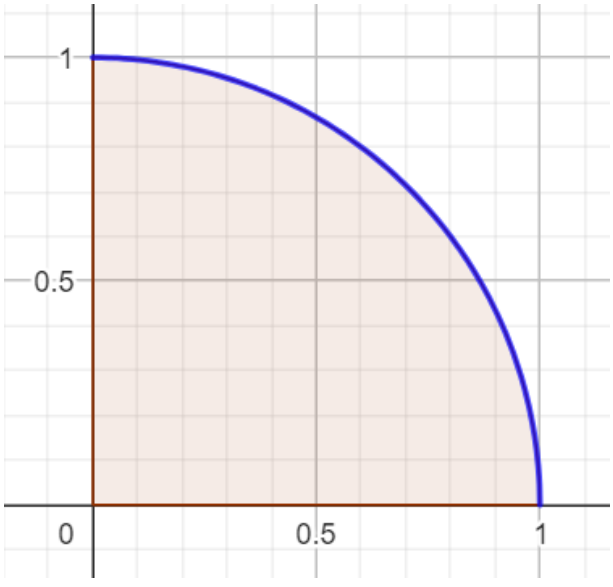
37.2.1 Approche intuitive

On va définir l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$ comme l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Pour définir cette quantité, nous allons approcher ce domaine par une réunion de rectangles. Nous verrons cela un peu plus loin.



Dans certains cas, ce domaine géométrique est assez simple pour que l'on puisse calculer son aire par des propriétés et outils de géométrie. C'est le cas des fonctions affines, pour lesquels ce type de domaine est un trapèze, ou par exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[0, 1]$.



En effet, le domaine en question est un quart de disque de rayon 1, donc son aire est $\frac{\pi}{4}$. Ainsi

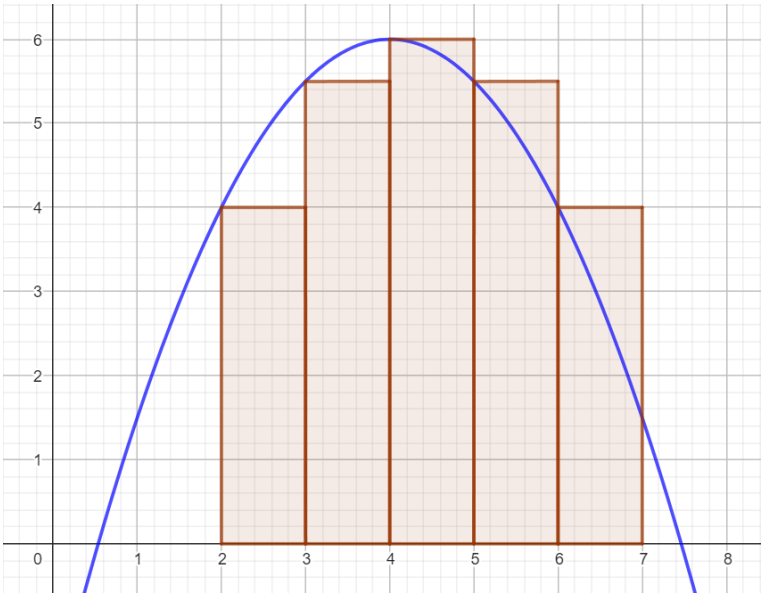
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

37.2.2 Définition

Comme dit précédemment, pour définir l'intégrale de f sur $[a,b]$, on va approcher le domaine sous la courbe par une réunion de rectangles.

Pour cela, on commence par partager l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles réguliers de longueur $\frac{b-a}{n}$. On construit sur chacun de ces segments un rectangle de hauteur l'image par f de la borne inférieure de ce segment.

On calcule la somme des aires de ces rectangles, puis on fait tendre n vers $+\infty$, ce qui produit des rectangles de plus en plus "fins".



Par exemple ici, on approxime l'intégrale de la fonction sur $[2,7]$, en partageant cet intervalle en $n=5$ sous-intervalles.

Il est également possible de construire des rectangles de hauteur l'image par f de la borne supérieure des sous-intervalles.

Proposition (admise) On suppose f continue et positive sur $[a,b]$. Alors les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$u_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)$$

convergent toutes deux vers une même limite.

Cette limite commune est appelée intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ et est notée

$$\int_a^b f(x)dx$$

Remarques

- ❖ Les sommes u_n et v_n sont appelées sommes de Riemann.
- ❖ La notation "$f(x)dx$" fait référence à ces sommes. En effet, lorsque le nombre n de rectangles augmente, l'aire de chacun de ces rectangles est de la forme $f(x)$ fois une petite variation de la variable x, notée dx. Le symbole "$\int$" est d'ailleurs à l'origine un "S", synonyme de somme.
- ❖ Dans l'expression $\int_a^b f(x)dx$, la variable x est muette : on peut remplacer x par n'importe quelle autre variable : t, s, u, etc.

Nous allons voir plus tard des méthodes de calculs d'intégrales (exactes et approchées), mais l'on peut déjà noter que pour approcher une intégrale, on peut calculer les valeurs des sommes de Riemann. Ce sont donc deux méthodes de calcul approché d'intégrale, dites méthodes des rectangles.

On suppose à présent f continue sur $[a,b]$.

Proposition (Relation de Chasles)(admise) Si f est positive sur $[a,b]$, alors pour tout $c \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Démonstration

On ne détaillera pas la preuve ici. Pour démontrer ce résultat, on partage l'intervalle $[a,b]$ en deux intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$. On construit alors des rectangles sur chacun de ces deux intervalles, ce qui permet d'approcher les intégrales de f sur ces deux intervalles.

Il reste ensuite à démontrer que la somme des aires de ces rectangles converge vers l'intégrale de f sur $[a,b]$, ce que la définition donnée ici ne permet pas de faire.

◈

Remarque Cette propriété porte naturellement le même nom que son analogue pour les vecteurs du plan ou de l'espace.

Définition Si f est négative sur $[a,b]$, on définit

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$$

L'intégrale d'une fonction négative représente donc également l'aire entre sa courbe représentative et l'axe des abscisses, mais comptée négativement.

Remarque Comme f est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut partager $[a,b]$ en sous-intervalles non réduits à des singletons sur lesquels f est de signe constant. Cela permet de donner la définition suivante.

Définition Si f n'est pas de signe constant sur $[a,b]$, on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ comme la somme des intégrales de f sur les segments sur lesquels elle est de signe constant.

Remarque Cette définition est compatible avec la relation de Chasles, ce qui la rend vraie indépendemment du signe de f.

Remarque Par convention, on définit $\int_a^a f(x)dx = 0$. En effet, il s'agit de l'aire d'un domaine géométrique réduit à un segment, ce qui n'est pas incohérent. De même par convention

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

ce qui est cohérent avec la relation de Chasles.

37.2.3 Propriétés

Proposition Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a,b]$ et tous réels λ, μ, on a

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Autrement dit, l'intégrale est linéaire.

Démonstration

On ne va faire la preuve que dans le cas positif. La définition dans le cas général est analogue. On suppose donc f et g positives sur $[a,b]$.

On définit les sommes de Riemann pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

On sait que par définition

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx \quad \text{et} \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b g(x)dx$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda f+\mu g)\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\lambda f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+\mu g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)\\ &= \lambda\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+\mu\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\\ &= \lambda u_n+\mu v_n\end{aligned}$$

Il vient donc, en passant à la limite dans chaque membre de l'égalité que

$$\int_a^b \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$$

◈

Proposition Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Alors

- Si $f \geq 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- Si $f \geq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Démonstration

- *Supposons f positive sur $[a,b]$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

  $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \geq 0$$

  Ainsi, par passage à la limite, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- *On suppose que $f \geq g$ sur $[a,b]$, c'est-à-dire que $f-g \geq 0$. Ainsi, par linéarité :*

  $$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f-g)(x)dx \geq 0$$

  car $f-g \geq 0$, d'où l'inégalité souhaitée.

◈

37.3 Lien entre primitive et intégrale

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse) Soit f continue sur $[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$, on définit

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Alors F est dérivable sur $[a,b]$, et pour tout $x \in [a,b]$, $F'(x) = f(x)$.

Démonstration

En terminale, on ne démontre ce résultat qu'avec une hypothèse supplémentaire : on suppose f croissante sur $[a,b]$. De plus, on ne démontrera la dérivabilité que sur $]a,b[$. Le cas général n'est pas accessible sans l'usage de quantificateurs.

Soit $x_0 \in]a,b[$. Soit $h>0$ tel que $x_0+h \in]a,b[$. Alors

$$\frac{1}{h}\Big(F(x_0+h)-F(x_0)\Big)=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(x)dx-\int_a^{x_0} f(x)dx\right)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$

par la relation de Chasles.

Comme f est croissante sur $[a,b]$, pour tout $t\in[x_0,x_0+h]$, on a

$$f(x_0)\leq f(t)\leq f(x_0+h)$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt\leq\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\leq\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0+h)dt$$

Les fonctions $t\mapsto f(x_0)$ et $t\mapsto f(x_0+h)$ sont constantes sur $[x_0,x_0+h]$, donc leur intégrale sur cet intervalle est l'aire d'un rectangle de largeur h et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$. Ainsi

$$hf(x_0)\leq\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt\leq hf(x_0+h)$$

Il suit donc, car $h>0$, que

$$f(x_0)\leq\frac{1}{h}\Big(F(x_0+h)-F(x_0)\Big)\leq f(x_0+h)$$

f est continue en x_0, donc $\lim_{h\to0^+} f(x_0+h)=f(x_0)$. On en déduit par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\Big(F(x_0+h)-F(x_0)\Big)=f(x_0)$$

On démontre de la même façon que

$$\lim_{h\to0^-}\frac{1}{h}\Big(F(x_0+h)-F(x_0)\Big)=f(x_0)$$

On en déduit que

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big(F(x_0+h)-F(x_0)\Big)=f(x_0)$$

ce qui prouve que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0)=f(x_0)$.

◈

Corollaire Toute fonction continue sur un segment y admet des primitives.

Remarque C'est un premier lien entre intégrales et primitives : l'étude d'intégrales permet de justifier de l'existence de primitives pour les fonctions continues sur un segment.

Corollaire Soient f continue sur $[a,b]$ et soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

On note cette quantité $[F(t)]_a^b$.

Démonstration

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$x\mapsto\int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a,b]$ et de dérivée f. Il s'agit donc d'une primitive de f sur $[a,b]$. Il existe donc une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in[a,b]$:

$$\int_a^x f(t)dt=F(x)+C$$

On remarque qu'alors

$$C=\int_a^a f(t)dt-F(a)=-F(a)$$

d'où le résultat, en appliquant l'égalité en $x=b$.

◈

Remarques ❖ Ce résultat reste vraie indépendemment de la primitive considérée. En effet, puisque deux primitives de f de diffèrent que d'une constante, la quantité $F(b) - F(a)$ reste inchangée.

❖ C'est ce lien entre intégrale et primitives qui permet de calculer la majorité des intégrales, et c'est à ce titre qu'il porte le nom de théorème fondamental de l'analyse. Il ramène le calcul d'une intégrale à la recherche d'une primitive. C'est d'ailleurs pour cela que l'on note parfois $\int f$ la primitive de f (à une constante près bien sûr).

Voici une conséquence intéressante de ce résultat.

Proposition Soit f continue et périodique sur $\mathbb{R}$, et dont $T > 0$ est une période. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_t^{t+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

Démonstration

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$F(t) = \int_t^{t+T} f(x)dx = \int_0^{t+T} f(x)dx - \int_0^t f(x)dx$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$F'(t) = f(t+T) - f(t) = 0$$

car f est T-périodique. On en déduit que F est constante sur $\mathbb{R}$ et donc que $F(t) = F(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

◈

Remarque Pour une fonction T-périodique, toutes les intégrales sur des segments de longueur T sont donc égales.

37.4 Calcul d'intégrales

On voit à présent des méthodes de calculs d'intégrales. Le théorème fondamental de l'analyse donne une méthode exacte, qui est la plus utilisée au lycée.

37.4.1 Méthodes approchées

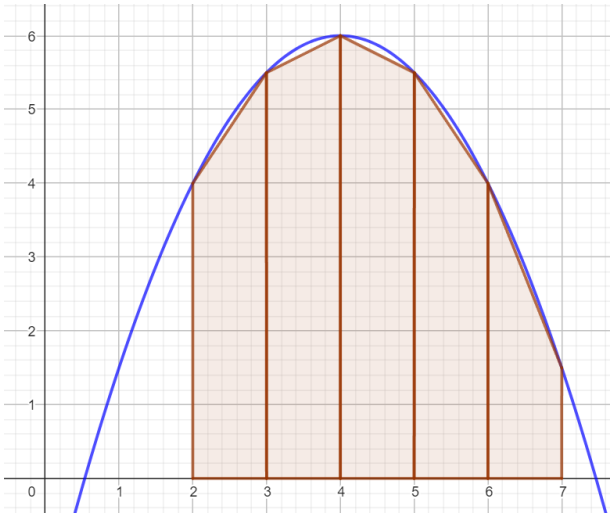
La méthode des rectangles vue précédemment est une méthode approchée de calcul d'intégrale. Plusieurs variantes existent, selon la hauteur du rectangle basé sur un intervalle $[a_i, a_{i+1}]$. On peut choisir $f(a_i)$, et l'on parle de méthode des rectangles à gauche, ou $f(a_{i+1})$ et l'on parle de méthode des rectangles à droite. On peut aussi choisir $f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)$, auquel cas on parle de méthode du point milieu.

Il existe bien sûr d'autres méthodes, dont deux que nous présentons rapidement ici.

Méthode des trapèzes :

Le principe de la méthode est de construire sous la courbe des trapèzes au lieu des rectangles. Cela revient à approximer f par une fonction affine par morceaux et continue, plutôt qu'une fonction en escalier.

Plus précisément, on construit, à chaque sous-intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, un trapèze de cette largeur et dont $(a_i, f(a_i))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1})$ sont deux sommets adjacents.



Méthode de Monte-Carlo :

Cette méthode se base sur l'aléatoire pour approcher l'intégrale. On commence par englober le domaine géométrique correspondant dans un rectangle, dont on peut donc calculer l'aire facilement. Puis l'on choisit aléatoirement un point (x, y) dans ce rectangle, et l'on regarde s'il est dans le domaine géométrique sous la courbe en examinant si $y > f(x)$ ou $y \leq f(x)$.

On répète cette expérience de nombreuses fois de manière indépendante, et la loi des grands nombres assure que le rapport du nombre de points dans le domaine sous la courbe par le nombre total de point approxime le rapport entre l'intégrale cherchée et l'aire du rectangle. On peut alors en déduire une valeur approchée de l'intégrale.

37.4.2 Intégration par parties

On voit à présent une technique de calcul d'intégrales très utile pour intégrer des produits.

Théorème (Intégration par parties) On considère deux fonctions u, v définies sur $[a, b]$, qui sont dérivables sur $[a, b]$ et dont la dérivée est continue sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration

On sait que pour tout $x \in [a, b]$,

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

On en déduit, comme uv *est une primitive de* $(uv)'$*, en intégrant, que*

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

◈

Remarque L'hypothèse de continuité sur u' et v' assure l'existence des intégrales.

Remarques ❖ Cette propriété permet de remplacer le calcul d'une intégrale par celui d'une autre intégrale, qui est plus simple. Par exemple, elle permet de trouver une primitive de $\ln$ sur $]0,+\infty[$, avec $u(x)=x$ et $v(x)=\ln(x)$.

❖ De par les propriétés cycliques de dérivation des fonctions trigonométriques, cette technique permet également de calculer des intégrales comportant ce type de fonctions. Par exemple, elle permet pour les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{2\pi} \cos(x)^n dx$$

de trouver une relation de récurrence d'ordre 2.

37.4.3 Changement de variables

On donne ici une dernière technique, qui n'est pas étudiée systématiquement en terminale, mais qui s'avère très utile en pratique.

Théorème (Changement de variable)(admis) Soient ϕ une fonction de $[a,b]$ dans un intervalle I, dérivable et de dérivée continue, et f continue sur I. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

Démonstration

On suppose que $\phi(a)<\phi(b)$. Soit F une primitive de f sur $[\phi(a),\phi(b)]$. On sait que pour tout $x\in[a,b]$, on a

$$(F\circ\phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt &= \Big[F(t)\Big]_{\phi(a)}^{\phi(b)}\\ &= F(\phi(b)) - F\phi(a))\\ &= \Big[(F\circ\phi)(x))\Big]_a^b\\ &= \int_a^b (F\circ\phi)'(x)dx\\ &= \int_a^b f(\phi(x)\phi'(x)dx\end{aligned}$$

◈

En pratique, on pose $t=\phi(x)$, on change les bornes d'intégration et l'on "remplace" dt par $\phi'(x)dx$.

Voici un exemple d'utilisation de cette technique.

Proposition Soit f continue sur $[-a,a]$, avec $a>0$.

❖ Si f est paire, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(x)dx$$

❖ Si f est impaire, alors

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

Démonstration

❖ *On suppose f paire. Alors*

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(t)dt &= \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(t)dt \quad \textit{par la relation de Chasles}\\ &= \int_{a}^{0} (-f(-x))dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad \textit{par le changement de variable } x=-t\\ &= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \quad \textit{par parité de } f\\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)dx\end{aligned}$$

❖ *On suppose f impaire. On a alors*

$$\int_{a}^{0} (-f(-x))dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

d'où le résultat, en faisant le même changement de variable $x=-t$.

◈

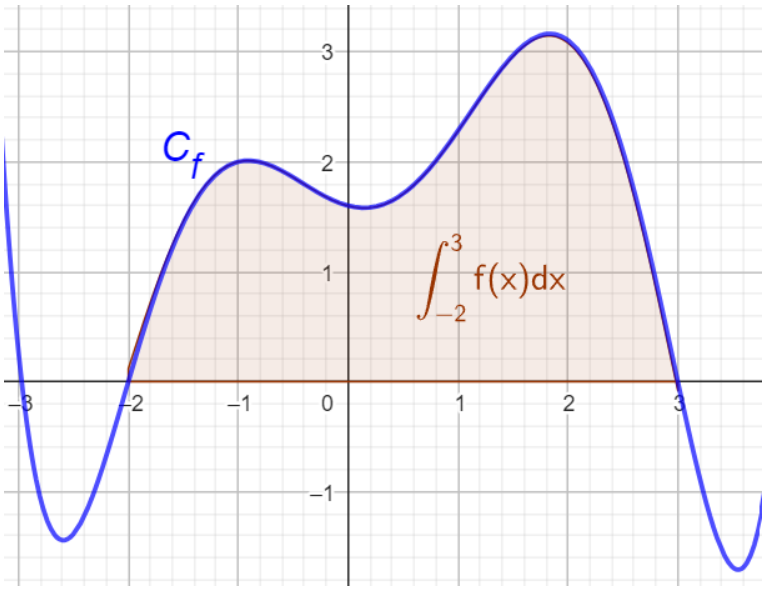
38 Exemples de calculs d'intégrales (méthodes exactes, méthodes approchées)

❖ **Niveau :** Terminale spécialité, Terminale complémentaire

❖ **Pré-requis :** intégrales, primitives, intervalles de $\mathbb{R}$, raisonnement par récurrence

38.1 Rappel sur les intégrales

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, (avec $a < b$). On rappelle que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ de f de a à b représente l'aire du domaine géométrique délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Donnons tout de même quelques précisions. Cette définition a du sens lorsque f est positive sur $[a, b]$. Si elle est négative, on définit son intégrale par $\int_a^b f(t)dt = -\int_a^b -f(t)dt$. Ainsi, cette intégrale est l'aire du même domaine, mais signée.

Si f change de signe sur $[a, b]$, comme elle y est continue, on peut découper l'intervalle $[a, b]$ en une subdivision d'intervalles sur lesquels f est de signe constant. On définit alors l'intégrale de f sur $[a, b]$ comme la somme des intégrales de sa restriction à ces différents intervalles. De cette façon, le relation de Chasles reste valable.

38.2 Méthodes exactes

38.2.1 Primitives

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse) Soit f continue sur $[a,b]$. Pour $x \in [a,b]$, on définit
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
Alors F est dérivable sur $[a,b]$, et pour tout $x \in [a,b]$, $F'(x) = f(x)$.

Démonstration

En terminale, on ne démontre ce résultat qu'avec une hypothèse supplémentaire : on suppose f croissante sur $[a,b]$. De plus, on ne démontrera la dérivabilité que sur $]a,b[$. Le cas général n'est pas accessible sans l'usage de quantificateurs.

Soit $x_0 \in]a,b[$. Soit $h > 0$ tel que $x_0 + h \in]a,b[$. Alors
$$\frac{1}{h}\Big(F(x_0+h) - F(x_0)\Big) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx\right) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$
par la relation de Chasles.

Comme f est croissante sur $[a,b]$, pour tout $t \in [x_0, x_0+h]$, on a
$$f(x_0) \leq f(t) \leq f(x_0+h)$$
Ainsi, par croissance de l'intégrale
$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0+h)dt$$
Les fonctions $t \mapsto f(x_0)$ et $t \mapsto f(x_0+h)$ sont constantes sur $[x_0, x_0+h]$, donc leur intégrale sur cet intervalle est l'aire d'un rectangle de largeur h et de hauteurs respectives $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$. Ainsi
$$hf(x_0) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt \leq hf(x_0+h)$$
Il suit donc, car $h > 0$, que
$$f(x_0) \leq \frac{1}{h}\Big(F(x_0+h) - F(x_0)\Big) \leq f(x_0+h)$$
f est continue en x_0, donc $\lim_{h\to 0^+} f(x_0+h) = f(x_0)$. On en déduit par le théorème des gendarmes que
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big(F(x_0+h) - F(x_0)\Big) = f(x_0)$$
On démontre de la même façon que
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\Big(F(x_0+h) - F(x_0)\Big) = f(x_0)$$
On en déduit que
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(F(x_0+h) - F(x_0)\Big) = f(x_0)$$
ce qui prouve que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

◈

Corollaire Soient f continue sur $[a,b]$ et soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
On note cette quantité $[F(t)]_a^b$.

Démonstration

D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur $[a,b]$ *et de dérivée* f*. Il s'agit donc d'une primitive de* f *sur* $[a,b]$*. Il existe donc une constante* $C \in \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $x \in [a,b]$ *:*

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

On remarque qu'alors

$$C = \int_a^a f(t)dt - F(a) = -F(a)$$

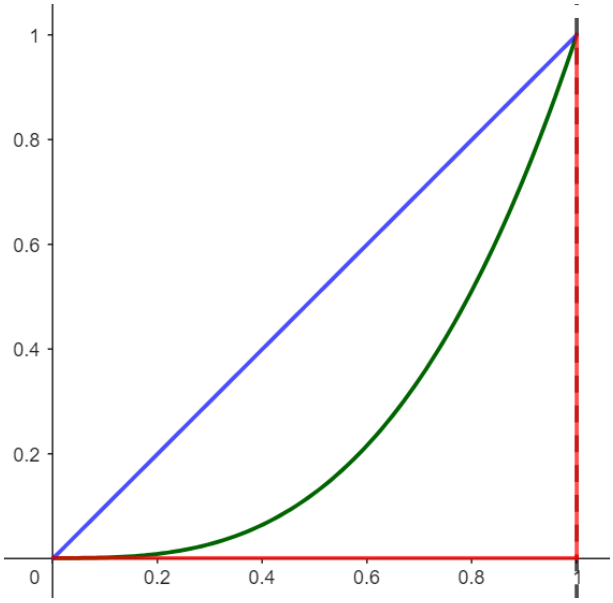
d'où le résultat, en appliquant l'égalité en $x = b$*.*

◈

De nombreux exercices de calcul d'intégrales peuvent se résoudre par cette méthode. Pour faire un lien avec l'économie, on peut en proposer un sur les courbes de Lorenz et l'indice de Gini.

Pour rappel, une courbe de Lorenz est la courbe représentative d'une fonction $L : [0,1] \mapsto [0,1]$ telle que :

- $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$
- L est croissante sur $[0,1]$
- L est convexe sur $[0,1]$
- Pour tout $x \in [0,1]$, $L(x) \leq x$



L'indice de Gini est alors défini comme le coefficient suivant : $G = 2\int_0^1 (x - L(x))dx$

Cet indice de Gini est à interpréter comme le rapport entre l'aire sous la courbe de Lorenz et l'aire sous la droite d'équation $y = x$.

De telles fonctions apparaissent lorsque l'on étudie la répartition d'une certaine donnée statistique dans un certain milieu, ou une population (distribution de richesses par exemple).

Par exemple, dans ce cas de répartition des richesses, on peut interpréter $L(0,4) = 0,2$ comme "les 40% les moins riches de la population possèdent 20% de la richesse totale". C'est ce type d'interprétation qui induit l'hypothèse de convexité.

L'indice de Gini évoque alors un "écart" avec une situation de répartition équitable.

En prenant l'exemple de $L : x \mapsto x^3$, on obtient que

$$G = 2\int_0^1 (x - x^3)dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1$$

38.2.2 Intégration par parties

Théorème (Intégration par parties) On considère deux fonctions u, v définies sur $[a, b]$, qui sont dérivables sur $[a, b]$ et dont la dérivée est continue sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration

On sait que pour tout $x \in [a, b]$,

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

On en déduit, comme uv *est une primitive de* $(uv)'$*, en intégrant, que*

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

◈

Voyons un exemple d'utilisation de ce théorème d'intégration par parties : le calcul explicite des intégrales de Wallis.

Exercice Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle n-ième intégrale de Wallis l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien définie.

2. Calculer I_0 et I_1.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

4. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \qquad \text{et} \qquad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \sin^n(t)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc I_n est bien définie.

2. On a

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

et

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(t) \cdot \sin(t)dt$$

Les fonctions $t \mapsto \sin^{n+1}(t)$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont dérivables et de dérivée continue sur $[0, 1]$. On peut alors intégrer par parties, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(t)\times(n+1)\cos(t)\sin^n(t)dt \\
&= \cos(0)\sin^{n+1}(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)\sin^n(t)dt \\
&= 0 - 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2(t)\right)\sin^n(t)dt \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(t)dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}(t)dt \\
I_{n+2} &= (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$.

4. On procède par récurrence sur p. Pour $p=0$, le résultat a été prouvé à la question 2. Soit $p \in \mathbb{N}$ quelconque, et supposons le résultat acquis pour p. Alors

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)} &= I_{2p+2} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2}I_{2p} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2}\times\frac{\pi}{2}\times\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \\
&= \frac{\pi}{2}\times\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\times\frac{(2p+1)(2p+2)}{2\times2\times(p+1)\times(p+1)} \\
&= \frac{\pi}{2}\times\frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}
\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}
I_{2(p+1)+1} &= I_{2p+3} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3}I_{2p+1} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3}\times\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\times\frac{2\times2\times(p+1)\times(p+1)}{(2p+2)(2p+3)} \\
&= \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}
\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient donc le résultat voulu.

Remarque Ces intégrales apparaissent dans différents problèmes où leur expression explicite est utile : approximation de π, problème de Bâle (par les intégrales), intégrale de Gauss ou encore détermination de la constante dans le formule de Stirling.

38.2.3 Changement de variable

Théorème (Changement de variable)(admis) Soient ϕ une fonction de $[a,b]$ dans un intervalle I, dérivable et de dérivée continue, et f continue sur I. Alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

Démonstration

On suppose que $\phi(a) < \phi(b)$. Soit F une primitive de f sur $[\phi(a), \phi(b)]$. On sait que pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$$

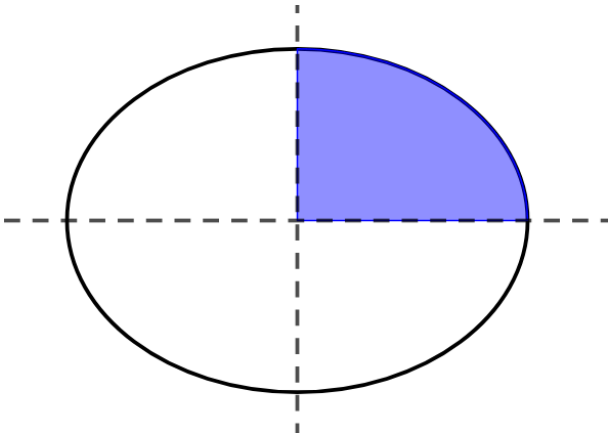
On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt &= \Big[F(t)\Big]_{\phi(a)}^{\phi(b)} \\ &= F(\phi(b)) - F\phi(a)) \\ &= \Big[(F \circ \phi)(x))\Big]_a^b \\ &= \int_a^b (F \circ \phi)'(x)dx \\ &= \int_a^b f(\phi(x)\phi'(x)dx\end{aligned}$$

◈

En pratique, on pose $t = \phi(x)$, on change les bornes d'intégration et l'on "remplace" dt par $\phi'(x)dx$.

Donnons un exemple d'utilisation de cette propriété de changement de variable. On considère une ellipse du plan définie par une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec a et b des réels positifs, et l'on veut calculer son aire.



Celle-ci est alors centrée en $(0, 0)$ (par parité de la fonction carrée) et chaque quadrant du plan contient un quart de cette ellipse. On va s'intéresser au premier quadrant, donc celui pour lequel $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Pour tout point (x, y) de l'ellipse dans ce quadrant, on a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

car $y \geq 0$. En observant que le membre de droite est définie pour $-a \leq x \leq a$, on en déduit que l'aire de la partie bleue est donnée par l'intégrale

$$I = \int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable $x = a\cos(u)$, ie $\phi(u) = a\cos(u)$. ϕ est dérivable et de dérivée continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $[0, a]$, et l'on a $\phi(0) = a$ et $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx \\
&= -b\int_a^0 \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx \\
&= -b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{a^2\cos^2(u)}{a^2}} \times (-a\sin(u))du \\
&= b\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin(u)\sqrt{1-\cos^2(u)}du \\
&= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)du \quad \text{car pour } 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2},\ \sin(u) \geq 0 \\
&= abI_2 \quad \text{où } I_2 \text{ est une intégrale de Wallis} \\
&= ab \times \frac{\pi}{2} \times \frac{2!}{2^2(1!)^2} \quad \text{par le résultat précédent sur ces intégrales} \\
I &= \frac{ab\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Par conséquent l'aire de l'ellipse est $ab\pi$.

Remarques
- ❖ Il est bien sûr possible de procéder sans connaître le résultat sur les intégrales de Wallis : il suffit de refaire l'intégration par parties ou de linéariser $\sin^2(u)$.
- ❖ Le changement de variable a un autre effet sur les intégrales de Wallis. En effet, procéder au changement de variable $t = \pi - x$ permet de justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

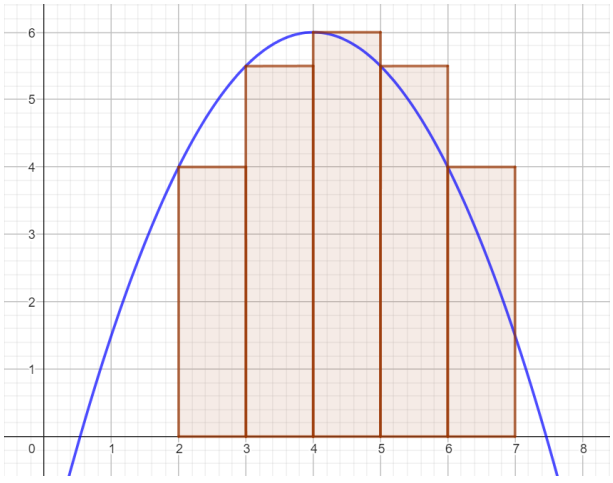
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$$

38.3 Méthodes approchées

38.3.1 Méthode des rectangles

La méthode des rectangles consiste à approcher le domaine géométrique dont l'intégrale désigne l'aire par une réunion de rectangles, de largeur donnée et de hauteur liée à la fonction considérée.

Pour cela, on commence par partager l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles réguliers de longueur $\frac{b-a}{n}$. On construit sur chacun de ces segments un rectangle de hauteur l'image par f de la borne inférieure de ce segment. On calcule la somme des aires de ces rectangles, puis on fait tendre n vers $+\infty$, ce qui produit des rectangles de plus en plus "fins".



Par exemple ici, on approxime l'intégrale de la fonction sur $[2,7]$, en partageant cet intervalle en $n=5$ sous-intervalles.

Il est également possible de construire des rectangles de hauteur l'image par f de la borne supérieure des sous-intervalles.

Proposition (admise) On suppose f continue et positive sur $[a,b]$. Alors les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$u_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\quad\text{et}\quad v_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)$$

convergent toutes deux vers une même limite.
Cette limite commune est appelée intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ et est notée

$$\int_a^b f(x)dx$$

Prenons un exemple. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x^2}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle y admet des primitives sur tout segment. Cependant, on peut montrer (c'est une conséquence d'un théorème de Liouville), que ces primitives n'admettent pas de formules fermées, c'est-à-dire qu'on ne peut pas les exprimer à l'aide des fonctions usuelles. On ne peut donc pas utiliser le théorème fondamental de l'analyse pour intégrer cette fonction.

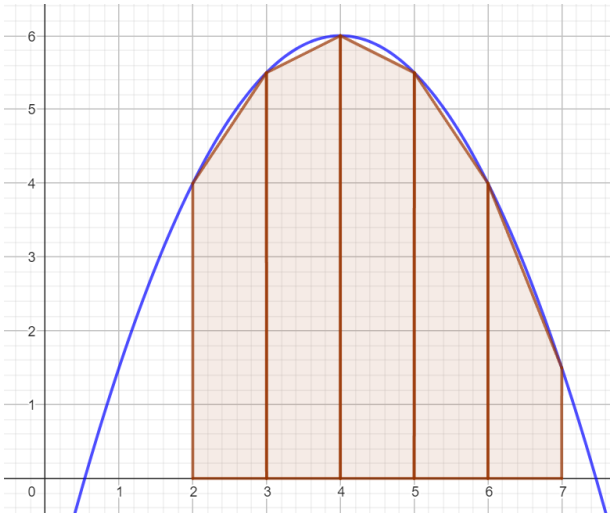
Pour un segment $[a,b]$ donné, on peut écrire un algorithme permettant de calculer les sommes de Riemann précédentes pour un certain entier n, ce qui donne un encadrement de $\int_a^b e^{-x^2}dx$.

```
def rectangle_gauss(a,b,n):
    x=a
    u=0
    v=0
    h=(b-a)/n
    for k in range (1,n+1):
        u=u+h*(1/sqrt(2*pi)*exp(-x**2/2))
        x=x+h
        v=v+h*(1/sqrt(2*pi)*exp(-x**2/2))
    print(u,v)
```

Remarque Comme dit précédemment, on ne dispose pas de formule close pour calculer $\int_a^b e^{-x^2}dx$. Il existe tout de même quelques cas particuliers pour lesquels cela est possible, notamment pour $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$, qui vaut $\sqrt{\pi}$ (il existe de nombreux moyens de démontrer ce résultat, mais aucun n'est accessible au lycée). Par parité, on a alors $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

38.3.2 Méthode des trapèzes

Le principe de la méthode est de construire sous la courbe des trapèzes au lieu des rectangles. Plus précisément, on construit, à chaque sous-intervalle $[a_i,a_{i+1}]$, un trapèze de cette largeur et dont $(a_i,f(a_i))$ et $(a_{i+1},f(a_{i+1})$ sont deux sommets adjacents.



Il semble intuitivement que ces trapèzes approchent mieux le domaine sous la courbe que les rectangles. On peut le justifier en changeant légèrement de point de vue.

On peut interpréter la méthode des rectangles d'une autre façon. Cela revient à approcher la fonction f par une fonction en escalier, c'est-à-dire constante par morceaux. L'intégrale de ce type de fonction est alors une somme d'aires de rectangles. De ce point de vue, la méthode des trapèzes consiste à approcher la fonction f par une fonction affine par morceaux (et continue). Cela donne donc (pour chaque sous-intervalle $[a_i, a_{i+1}]$) un paramètre de plus pour approcher f, donc nécessairement une meilleure approximation (qui dans le pire des cas est identique).

Voici un exemple d'algorithme donnant une approximation de $\int_a^b e^{\sqrt{x}}dx$ obtenue en subdivisant $[a, b]$ en n sous-intervalles.

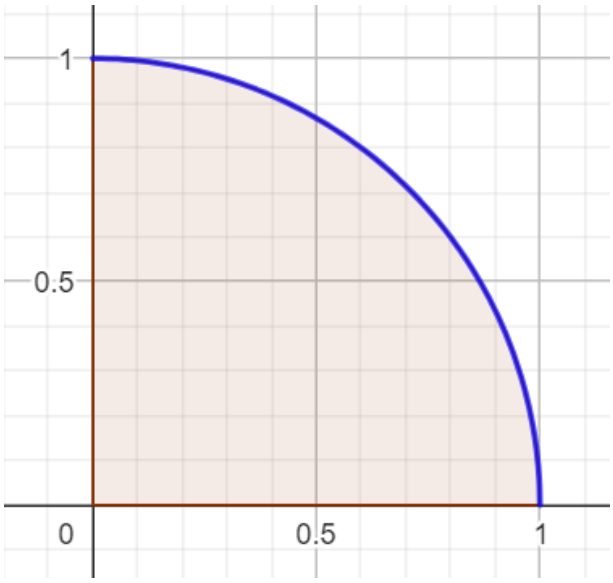
```
def trapeze(a,b,n):
    x=a
    u=0
    v=0
    h=(b-a)/n
    for k in range (1,n+1):
        u=u+(h/2)*(exp(sqrt(x))+exp(sqrt(x+h)))
        x=x+h
    print(u)
```

38.3.3 Méthode de Monte-Carlo

Cette méthode se base sur l'aléatoire pour approcher l'intégrale. On commence par englober le domaine géométrique correspondant dans un rectangle, dont on peut donc calculer l'aire facilement. Puis l'on choisit aléatoirement un point (x, y) dans ce rectangle, et l'on regarde s'il est dans le domaine géométrique sous la courbe en examinant si $y > f(x)$ ou $y \leq f(x)$.

On répète cette expérience de nombreuses fois de manière indépendante, et la loi des grands nombres assure que le rapport du nombre de points dans le domaine sous la courbe par le nombre total de point approxime le rapport entre l'intégrale cherchée et l'aire du rectangle. On peut alors en déduire une valeur approchée de l'intégrale.

Donnons un exemple d'une utilisation de cette méthode. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ définie sur $[0,1]$. Le domaine géométrique dont $\int_0^1 f(x)dx$ est l'aire est alors un quart du cercle trigonométrique (ce que l'on peut justifier par le changement de variable $x = \cos(t)$), donc cette intégrale vaut $\frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. La méthode de Monte-Carlo appliquée à f peut donc permettre d'approcher π.



Voici un algorithme qui implémente cette méthode, en prenant le rapport avec l'aire du carré $[0,1]^2$, qui vaut 1.

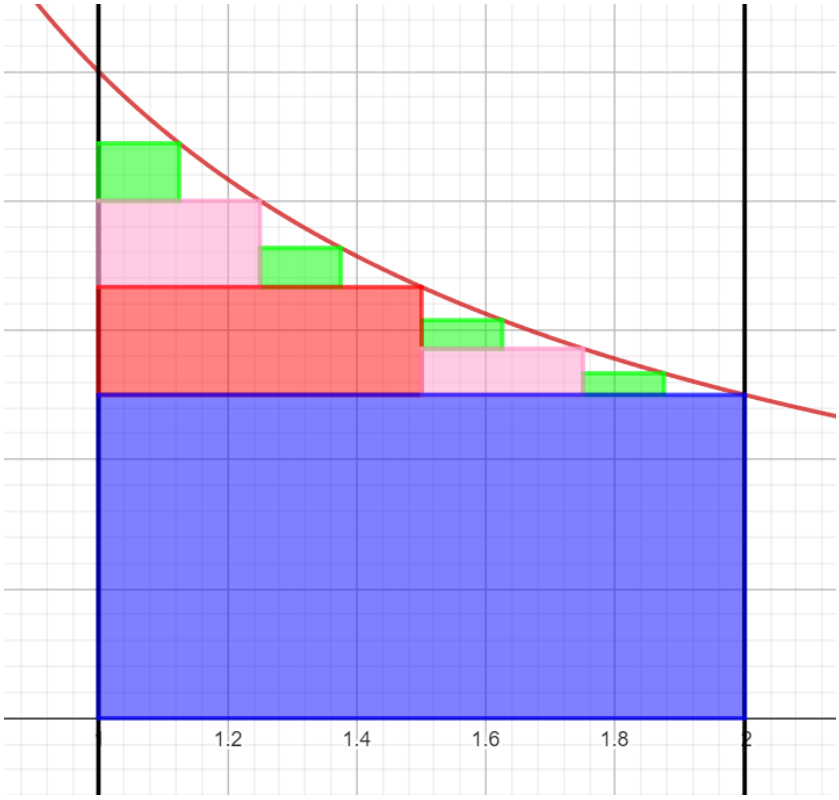
```
def montecarlo(n):
    c=0
    for i in range (1,n+1):
        x=random()
        y=random()
        if y<=sqrt(1-x**2):
            c=c+1
    A=c/n
    print(A)
```

38.4 Autres exemples

38.4.1 Algorithme de Brouncker

L'algorithme de Brouncker est une méthode de calcul par dichotomie pour approcher $\ln(2)$, mise au point par l'anglais William Brouncker en 1668, suite aux travaux de nombreux mathématiciens sur les logarithmes, introduits par Neper et Wright au début du siècle.

Cette méthode consiste à approcher l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ (qui vaut exactement $\ln(2)$) en approchant le domaine géométrique qui lui correspond par une juxtaposition de rectangles. On procède comme suit. On commence par tracer la courbe représentative de la fonction inverse f, ainsi que les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.



On commence par chercher le plus grand rectangle de largeur 1 que l'on peut faire rentrer sous la courbe. Il s'agit du rectangle bleu, qui a pour largeur 1 (celle du segment $[1,2]$), et pour hauteur $f(2)=\frac{1}{2}$. Son aire vaut donc $1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}$. On obtient alors que

$$\ln(2)\approx\frac{1}{1\times 2}$$

On fait de même ensuite dans la partie du domaine qui reste, avec un rectangle de largeur $\frac{1}{2}$. Il ne peut en rentrer qu'un seul (le rouge). Sa largeur est $\frac{1}{2}$, et sa hauteur est $f\left(\frac{3}{2}\right)-f(2)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$. L'aire du rectangle rouge est donc $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3\times 4}$. On obtient alors l'approximation :

$$\ln(2)\approx\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}$$

On continue avec les deux espaces laissés vides, en y rentrant des rectangles (roses) de largeur $\frac{1}{4}$. Le premier a pour hauteur $f\left(\frac{5}{4}\right)-f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$. Le second a pour hauteur $f\left(\frac{7}{4}\right)-f(2)=\frac{4}{7}-\frac{1}{2}=\frac{1}{14}$. Ils ont donc pour aires respectives $\frac{1}{4}\times\frac{2}{15}=\frac{1}{5\times 6}$ et $\frac{1}{4}\times\frac{1}{14}=\frac{1}{7\times 8}$. On obtient alors :

$$\ln(2)\approx\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{7\times 8}$$

On poursuit alors la construction avec 4 rectangles de largeur $\frac{1}{8}$ (en vert), puis 8 de largeur $\frac{1}{16}$ etc.

Au bout de $n\geq 2$ étapes, on construit alors 2^{n-2} rectangles de largeur $\frac{1}{2^{n-1}}$. Pour $1\leq k\leq 2^{n-2}$, le k-ième rectangle a pour largeur $\frac{1}{2^{n-1}}$ et pour hauteur

$$\begin{aligned}
f\left(1+\frac{2k-1}{2^{n-1}}\right)-f\left(1+\frac{k}{2^{n-2}}\right)&=f\left(\frac{2^{n-1}+2k-1}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{2^{n-2}+k}{2^{n-2}}\right)\\
&=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2k-1}-\frac{2^{n-2}}{2^{n-2}+k}\\
&=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2k-1}-\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2k}\\
&=\frac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}+2k-1\right)\left(2^{n-1}+2k\right)}
\end{aligned}$$

L'aire de ce rectangle est donc

$$\frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{2^{n-1}}{\big(2^{n-1}+2k-1\big)\big(2^{n-1}+2k\big)} = \frac{1}{\big(2^{n-1}+2k-1\big)\big(2^{n-1}+2k\big)}$$

On remarque que pour $1 \leq k \leq 2^{n-2}$, les entiers $2k-1$ et $2k$ rassemblent tous les entiers de $2\times 1-1=1$ jusqu'à $2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Ainsi, les dénominateurs de ces aires vont de $(2^{n-1}+1)(2^{n-1}+2)$ jusqu'à $(2^{n-1}+2^{n-1}-1)(2^{n-1}+2^{n-1}) = (2^n-1)\times 2^n$. Cela compte donc toutes les paires d'entiers consécutifs entre $2^{n-1}+1$ et 2^n (compris).

En additionnant donc ces aires pour chaque étape, on obtient l'expansion en série suivante de $\ln(2)$:

$$\ln(2) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + \dots$$

On peut justifier plus proprement cette expansion si l'on connaît le développement asymptotique de la série harmonique. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$$

on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

On utilise alors le développement asymptotique de cette série :

$$\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \big(\ln(2n+2)+\gamma+o(1)\big) - \big(\ln(n+1)+\gamma+o(1)\big) = \ln\left(\frac{2n+2}{n+1}\right) + o(1) = \ln(2) + o(1)$$

ce qui justifie la convergence.

On peut écrire un algorithme pour approximer $\ln(2)$ par cette méthode :

```
def brouncker(n):
    A=0
    for k in range (1,n+1,2):
        A=A+1/(k*(k+1))
    print(A)
```

38.4.2 Géométrie

Puisque l'intégrale d'une fonction sur un intervalle représente l'aire d'un certain domaine géométrique, on peut tenter de calculer cette intégrale par des arguments géométriques directement. C'est par exemple ce que l'on a utilisé quand on a parlé de la méthode de Monte-Carlo pour pouvoir approximer π. Donnons un autre exemple du même style.

On considère f définie par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ sur $[0,1]$ (nécessairement). Sa courbe représentative est un demi-cercle d'extrémités $(0,0)$ et $(1,0)$.



L'aire de ce demi-disque est donc $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \pi = \frac{\pi}{8}$. On en déduit que

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = \frac{\pi}{8}$$

Remarque Au lycée, aucune méthode ne permet de calculer explicitement cette intégrale autrement. On peut pour cela procéder à un changement de variable (hors programme) $x = \cos(t) + \frac{1}{2}$, ce qui revient à paramétrer le demi-cercle à l'aide d'un angle. On obtient alors

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx = \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin^2(t)dt$$

où l'on peut linéariser le $\sin^2(t)$ et intégrer.

39 Exemples de résolution d'équations (méthodes exactes, méthodes approchées)

- **Niveau :** Troisième, lycée
- **Pré-requis :** théorème des valeurs intermédiaires, congruences dans $\mathbb{Z}$, polynômes, fonctions exponentielles et logarithmes, trigonométrie, nombres complexes, dérivation, suites numériques et limites

39.1 Équations polynomiales

Définition On appelle équation polynomiale toute équation de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), où $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels (ou des complexes), avec $a_n \neq 0$.
L'entier n, donc le plus grand rang k tel que $a_k \neq 0$, est appelé degré de l'équation.

39.1.1 Équations du premier degré

Une équation du premier degré est une équation de la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$, ou qui peut se réécrire sous cette forme.

Théorème Une équation du premier degré $ax + b = 0$ (avec $a \neq 0$) admet une unique solution donnée par

$$x = -\frac{b}{a}$$

Démonstration *Pour $x \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on a*

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

◈

On peut utiliser le même type de manipulations pour résoudre une équation du premier degré donnée sous la forme $ax + b = cx + d$, avec $a \neq c$. Voici un exemple.

Exercice Alice part de Rennes en direction de Nantes en voiture, et au même moment Bob part de Nantes en direction de Rennes en prenant la même route. Alice roule à une vitesse constante de 90km/h et Bob à une vitesse constante de 120km/h.
En sachant que la distance entre Rennes et Nantes est 97km, quand et où se croiseront Alice et Bob ?

On appelle t le temps écoulé en heures depuis le départ simultané d'Alice et Bob. Alors la distance parcourue (en km) par Alice pendant cette durée t est $90t$, et la distance parcourue (en km) par Bob pendant cette même durée est $120t$.

Lorsqu'ils se croiseront, ils auront chacun roulé pendant un certain temps t, et la distance totale qu'ils auront parcourue sera 97km. On en déduit que ce temps t entre le départ et la rencontre des deux automobilistes vérifie :

$$90t + 120t = 97$$

On résout cette équation :

$$90t + 120t = 97 \Leftrightarrow 210t = 97 \Leftrightarrow t = \frac{97}{210}$$

Alice et Bob se croiseront après avoir roulé pendant $\frac{97}{210}$ heures, soit environ $\frac{97}{210} \times 60 \approx 28$ minutes.

On peut alors calculer les distances parcourues par Alice et Bob en km :

$$90 \times \frac{97}{210} = \frac{97 \times 3}{7} \approx 41,6 \qquad 120 \times \frac{97}{210} = \frac{97 \times 4}{7} \approx 55,4$$

39.1.2 Équations produit nul

Au collège et au lycée, on appelle équation produit nul toute équation de la forme $(ax+b)(cx+d) = 0$, où a, b, c, d sont des réels quelconques. On peut en fait généraliser cette définition à plus que 2 facteurs, et à des facteurs de n'importe quelle forme.

Théorème (admis) Pour tous réels (ou complexes) a et b, on a

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{et} \quad b = 0$$

Remarque Ce théorème énonce que $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est intègre. La démonstration d'un tel résultat se fait en suivant la construction de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$) : on commence par le montrer dans $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$ (puis $\mathbb{C}$).

On peut naturellement étendre ce résultat à plus que 2 facteurs. Cela permet de résoudre des équations polynomiales, à condition de réussir à factoriser le polynôme correspondant. On se ramène alors à plusieurs équations polynomiales de degré inférieur. Donnons un exemple.

Exercice Rechercher les extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{3x}$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = e^{3x} + (x+2) \times 3e^{3x} = (3x+7)e^{3x}$$

Ainsi, $f'(x) = 0$ si, et seulement si, $3x+7 = 0$ ou $e^{3x} = 0$. Comme la fonction exponentielle est strictement positive, nécessairement $3x + 7 = 0$, donc $x = -\frac{7}{3}$. L'étude des variations de f permet alors de justifier qu'elle admet un minimum global en $x = -\frac{7}{3}$.

39.1.3 Équations du second degré

Une équation du second degré est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b, c des réels, $a \neq 0$, ou qui peut se réécrire sous cette forme.

Théorème Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Démonstration *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \quad \text{car } a \neq 0 \\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

◈

Théorème On note $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors ax^2+bx+c admet deux solutions réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
- Si $\Delta = 0$, alors ax^2+bx+c admet une unique solution réelle : $x_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors ax^2+bx+c n'admet aucune solution réelle.

Démonstration *On remarque que par définition de Δ, la forme canonique du trinôme s'écrit :*

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Par conséquent, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2+bx+c = 0 \Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

On remarque que $4a^2 > 0$, donc le second membre a le même signe que Δ.

- *Si $\Delta > 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Ce réel admet alors deux racines réelles distinctes :*
$$-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
Alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes x_1, x_2 telles que
$$x_1+\frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2+\frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
d'où le résultat.
- *Si $\Delta = 0$, on a $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$. $x \in \mathbb{R}$ est donc solution de l'équation si, et seulement si,*
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$
c'est-à-dire si $x = -\frac{b}{2a}$.
- *Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$, donc ce réel n'admet pas de racine carrée réelle. Dans ce cas, l'équation n'admet aucune solution réelle.*

◈

Proposition Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \overline{z} = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration *On a la forme canonique :*

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Ainsi, $z \in \mathbb{C}$ est une solution de l'équation si, et seulement si :

$$a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Or, $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$. Ce nombre admet alors deux racines complexes :

$$\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

d'où les deux solutions de l'équation. ◈

Cette méthode du discriminant n'est pas la seule que l'on peut utiliser. Elle a l'avantage d'être systématique, mais parfois inutilement lourde en calcul.

On peut penser à d'autres méthodes : la complétion du carré (qui revient à retrouver la forme canonique), la factorisation par une racine évidente (dont nous reparlons ensuite), ou encore par la somme et le produit des deux racines. Développons ce dernier point.

Proposition Supposons que l'équation $ax^2+bx+c=0$ admette deux solutions réelles distinctes x_1, x_2. Alors

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration *Un calcul direct permet de prouver ces relations. Cependant, on peut démontrer ce résultat bien plus facilement à partir de la factorisation :*

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

En effet, en développant le second membre, on obtient

$$ax^2+bx+c = ax^2 - a(x_1+x_2)x + ax_1x_2$$

En identifiant les coefficients des deux trinômes, on obtient les relations souhaitées. ◈

39.1.4 Degré supérieur

Nous allons étudier quelques exemples de résolution d'équations polynomiales de degré strictement supérieur à 2.

Proposition (admis) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$) et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors α est une racine de P si, et seulement si, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$) tel que $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$.

Démonstration *Si P s'écrit sous la forme $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$, alors α est clairement une racine de P.*
Pour le sens réciproque, on utilise la division euclidienne de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ (ou $\mathbb{C}[X]$), notion non étudiée au lycée. On écrit la division euclidienne de $P(X)$ par $X-\alpha$:

$$P(X) = (X-\alpha)Q(X) + R(X)$$

avec $\deg(R) < \deg(X-\alpha) = 1$, c'est-à-dire R constant. Alors $R(\alpha) = P(\alpha) - (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$, donc α est une racine de R. Puisque R est constant, on a nécessairement $R=0$, d'où le résultat. ◈

On peut utiliser ce type de raisonnement pour factoriser des polynômes de degré au moins 3, lorsque l'on trouve une racine "évidente". Par exemple, on considère l'équation $x^3-6x^2+11x-6=0$. On remarque que 1 est une solution de cette équation, donc on peut la réécrire $(x-1)(ax^2+bx+c)=0$, avec a, b, c des réels. En développant et en identifiant les coefficients, on a $a=1$, $b=-5$ et $c=6$. On obtient alors une équation produit nul, qui se ramène à une équation de degré 1 et une de degré 2.

Pour une équation de degré 3, il suffit donc de trouver une solution pour se ramener à une équation de degré 2. La recherche de cette solution a été le sujet d'étude de mathématiciens italiens au XVIème siècle, notamment Tartaglia, Cardan, Ferrari et Bombelli. Une méthode ressort de cette étude (dont on ne sait réellement si elle vient de Tartaglia ou de Cardan, mais qui porte le nom de méthode de Cardan). Développons la sur un exemple.

On considère l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$. On cherche x sous la forme $x = u + v$, avec u, v non nuls. Alors

$$\begin{aligned} x^3 - 15x - 4 = 0 &\Leftrightarrow (u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv - 15)(u+v) - 4 = 0 \end{aligned}$$

La décomposition $x = u + v$ transforme un problème à une inconnue en un problème à deux inconnues. Il est alors raisonnable, pour revenir à un problème à une inconnue, de fixer la condition $uv = 5$, de sorte que $3uv - 15 = 0$. Dans ce cas, l'équation devient :

$$u^3 + v^3 = 4$$

La condition $uv = 5$ s'écrit aussi $u^3v^3 = 125$. Alors, u^3 et v^3 sont deux nombres dont on connait la somme et le produit. Ils sont alors racines du trinôme :

$$X^2 - 4X + 125 = 0$$

Celui-ci a pour discriminant

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 125 = -484 = -22^2 < 0$$

Ses solutions complexes sont alors

$$z = \frac{4 - 22i}{2} = 2 - 11i \quad \text{et} \quad \overline{z} = 2 + 11i$$

qui correspondent donc à u^3 et v^3. On remarque que

$$(2+i)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 \times i + 3 \times 2 \times i^2 + i^3 = 2 + 11i \quad \text{et} \quad (2-i)^3 = 2 - 11i$$

Ainsi, $u = 2 + 11i$ et $v = 2 - 11i$ conviennent. On en déduit que

$$x = u + v = 2 + 11i + 2 - 11i = 4$$

Remarque C'est la mise au point de cette méthode qui a poussé les mathématiciens à considérer pour la première fois des nombres dont le carré est négatif, posant les premières pierres de ce qui deviendra plus tard les nombres complexes (sous l'impulsion de Bombelli notamment).

On peut rencontrer une autre type d'équation de degré supérieur à 2 au lycée : les équations bicarrées. Ce sont des équations de la forme $ax^4 + bx^2 + x = 0$. Une telle équation est de degré 4, donc non résoluble (en théorie) au lycée (bien qu'il existe une méthode pour cela !). Cependant, celle-ci a une forme particulière : le changement de variable $X = x^2$ permet de se ramener à l'équation $aX^2 + bX + c = 0$ qui est de degré 2. On peut alors la résoudre, puis extraire des racines carrées des solutions.

39.1.5 Équations diophantiennes

De manière générale, on appelle équation diophantienne toute équation polynomiale à une ou plusieurs inconnues, à coefficients entiers, et dont on cherche des solutions entières. Au lycée, on donne ce nom aux équations de la forme $ax + by = c$, avec a, b, c des entiers non nuls et x, y les inconnues (entières).

Proposition L'équation $ax + by = c$ admet des solutions si, et seulement si, $\text{pgcd}(a, b)$ divise c.

Démonstration

Supposons qu'il existe une solution (x_0, y_0). Alors $ax_0 + by_0 = c$. Comme pgcd(a, b) divise a et b, il divise ax_0 et bx_0, donc il divise c.

Réciproquement, supposons que pgcd(a, b) divise c. Il existe alors un entier k tel que $c = k$pgcd(a, b). On sait qu'il existe des entiers u et v tels que $au + bv =$ pgcd(a, b). Ainsi, $aku + bkv = k$pgcd$(a, b) = c$, donc le couple (ku, kv) est solution.

◈

Développons la méthode générale de résolution de ce type d'équation sur un exemple.

Exercice Au jour J_0, on observe un premier astre qui apparaît tous les 30 jours. Au jour $J_0 + 18$, on observe un deuxième astre qui apparaît tous les 102 jours. L'objectif est de déterminer le prochain jour J_1 où ces deux astres apparaîtront en même temps.

1. On note u et v le nombre de périodes effectuées par les deux astres entre les jours J_0 et J_1. Montrer que u et v vérifient $30u - 102v = 18$.

2. L'équation $30u - 102v = 18$ admet-elle des solutions entières ? Justifier.

3. Résoudre l'équation $30u - 102v = 18$, et en déduire combien de temps sépare les jours J_0 et J_1.

1. Entre les jours J_0 et J_1, il s'est écoulé $30u$ jours pour le premier astre. Pour le second, il s'est écoulé $102v$ jours entre $J_0 + 18$ et J_1. Ainsi,

$$30u = 102v + 18 \Rightarrow 30u - 102v = 18$$

2. On calcule le PGCD de 30 et 102. On a $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $102 = 2 \times 3 \times 17$, donc PGCD$(30, 102) = 6$. Comme 6 divise 18, cette équation admet une infinité de solutions entières.

3. On commence par réduire :

$$30u - 102v = 18 \Leftrightarrow 5u - 17v = 3$$

On commence par chercher une solution de l'équation $5u - 17v = 1$ en appliquant l'algorithme d'Euclide étendu :

$$17 = 5 \times 3 + 2 \Rightarrow 5 \times (-3) - 17 \times (-1) = 2$$
$$5 = 2 \times 2 + 1 \Rightarrow 5 \times 1 - 2 \times 2 = 1 \Rightarrow 5 \times 7 - 17 \times 2 = 1$$

On en déduit une solution particulière de $5u - 17v = 3$: $5 \times 21 - 17 \times 6 = 3$. Maintenant, on a

$$5u - 17v = 3 \Leftrightarrow 5u - 17v = 5 \times 21 - 17 \times 6 \Leftrightarrow 5(u - 21) = 17(v - 6)$$

5 et 17 sont premiers entre eux et 5 divise $17(v - 6)$, donc par le lemme de Gauss 5 divise $v - 6$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $v = 6 + 5k$. Dans ce cas, on a

$$5u - 17v = 3 \Rightarrow 5u - 17(6 + 5k) = 3 \Rightarrow 5(u - 17k) = 105 \Rightarrow u = 21 + 17k$$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$5 \times (21 + 17k) - 17 \times (6 + 5k) = 105 + 5 \times 17k - 102 - 17 \times 5k = 3$$

Les solutions de $5u - 17v = 3$ (et donc de $30u - 102v = 18$) sont donc les entiers de la forme $u = 21 + 17k$ et $v = 6 + 5k$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Le nombre de périodes u minimal est donc 4 (atteint pour $k = -1$), ce qui donne que le nombre de jours séparant J_0 et J_1 est $30 \times 40 = 120$.

Voici un autre exemple d'équation diophantienne que l'on peut étudier au lycée. On considère l'équation $y^2 - 5x = 2$, d'inconnues x, y entières. Supposons qu'il existe une solution entière (x, y). On remarque que nécessairement $5x \equiv 0\ (5)$. Ainsi, $y^2 \equiv 2\ (5)$. Examinons les restes possibles de y^2 par 5, en fonction de ceux de y :

- Si $y \equiv 0\ (5)$, alors $y^2 \equiv 0\ (5)$.
- Si $y \equiv 1\ (5)$, alors $y^2 \equiv 1\ (5)$.
- Si $y \equiv 2\ (5)$, alors $y^2 \equiv 4\ (5)$.
- Si $y \equiv 3\ (5)$, alors $y^2 \equiv 9 \equiv 4\ (5)$.
- Si $y \equiv 4\ (5)$, alors $y^2 \equiv 16 \equiv 1\ (5)$.

Il est donc impossible d'avoir $y^2 \equiv 2\ (5)$. Cette équation d'admet donc aucune solution entière.

39.2 Existence et unicité

39.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration

Commençons par remarquer que si $f(a) = 0$, ou $f(b) = 0$, le résultat est trivial. On suppose donc à présent que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. En effet, le théorème appliqué à f est équivalent au théorème appliqué à $-f$.

Le principe de la démonstration se base sur la méthode de dichotomie. On va s'en servir pour construire un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
On définit deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ par récurrence comme suit :

- *On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.*
- *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(m_n) \geq 0$, on définit $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$, et si $f(m_n) < 0$, on définit $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$.*

On va prouver que ces deux suites vérifient les conditions suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $a \leq a_n \leq b_n \leq b$
- $f(a_n) \leq 0$ *et* $f(b_n) \geq 0$
- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$

Pour cela, on procède par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : "a \leq a_n \leq b_n \leq b, f(a_n) \leq 0, f(b_n) \geq 0, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}"$$

- ***Initialisation :*** *Pour $n = 0$, on a $a_0 = a$ et $b_0 = b$, donc le résultat est trivial.*
- ***Hérédité :*** *Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie. Si $f(m_n) \geq 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m_n$. Comme $a_n \leq b_n$ par hypothèse de récurrence, on a $a_n \leq m_n \leq b_n$, donc*

$$a \leq a_{n+1} = a_n \leq b_{n+1} = m_n \leq b_n \leq b$$

On a également par hypothèse de récurrence $f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq 0$ et $f(b_{n+1}) = f(m_n) \geq 0$, et

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Si $f(m_n) < 0$, on a $a_{n+1} = m_n$ et $b_{n+1} = b_n$. On démontre de la même façon les propriétés précédentes. $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie, et la propriété est héréditaire.

❖ ***Conclusion :*** *Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq m_n \leq b_n$, donc la suite $(a_n)_n$ est croissante et la suite (b_n) est décroissante. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, on a $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

On a donc construit deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que :

❖ *$(a_n)_n$ est croissante et $(b_n)_n$ est décroissante.*

❖ *$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$*

Ces deux suites sont donc adjacentes. On en déduit qu'elles sont toutes deux convergentes, et ce, vers une même limite c telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq c \leq b_n$. En particulier, $c \in [a, b]$.
On a $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c$, et f est continue en c, donc $(f(a_n))_n$ est $(f(b_n))_n$ convergent toutes les deux vers $f(c)$. Or, par définition de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$. On en déduit, en passant à la limite que $f(c) \leq 0 \leq f(c)$, et donc que $f(c) = 0$.

◈

Corollaire (du théorème des valeurs intermédiaires) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés. Alors il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration
Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $c \in [a, b]$. Comme f est strictement monotone sur $[a, b]$, elle y est injective, ce qui prouve l'unicité de c.

◈

Ces deux résultats permettent, dans de nombreux cas, de justifier l'existence (et l'unicité) d'une solution à une équation de la forme $f(x) = 0$. En particulier, lorsque f est bijective de bijection réciproque f^{-1}, l'unique solution est donnée par $c = f^{-1}(0)$. Développons maintenant quelques exemples.

39.2.2 Exponentielles et logarithmes

Les fonctions exponentielles et logarithmes sont des bijections réciproques l'une de l'autre, et strictement croissantes.

On peut alors se servir de cela pour résoudre des équations faisant intervenir ces fonctions. On peut par exemple les mélanger avec des équations polynomiales, avec des équations de la forme $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$, qui par un changement de variable $X = e^x$, se ramènent à une équation polynomiale.

39.2.3 Trigonométrie

Les fonctions trigonométriques usuelles sont aussi des exemples que l'on peut traiter avec ces résultats. On sait en effet que :

❖ $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est bijective, de réciproque $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

❖ $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ est bijective, de réciproque $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

❖ $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est bijective, de réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

39.3 Méthodes approchées

39.3.1 Balayage

On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution c sur $[a, b]$. La méthode de balayage permet d'approcher cette solution avec une précision de l'ordre de 10^{-n}, pour $n \in \mathbb{N}$ aussi grand que souhaité. On procède comme suit :

- ❖ On commence par balayer $[a, b]$ avec un pas de 1, c'est-à-dire que l'on calcule les valeurs $f(k)$, pour des entiers $a \leq k \leq b$. On cherche un entier k tel que $f(k)$ et $f(k + 1)$ soient de signes contraires. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, $c \in [k, k + 1]$.

- ❖ On balaye maintenant $[k, k+1]$ avec un pas de 0,1, et l'on cherche alors un entier m tel que $f\left(k + \frac{m}{10}\right)$ et $f\left(k + \frac{m+1}{10}\right)$ soient de signes contraires. La solution c est alors comprise entre $k + \frac{m}{10}$ et $k + \frac{m+1}{10}$, ce qui donne une précision à 10^{-1} près.

- ❖ On continue ainsi de proche en proche jusqu'à obtenir une précision d'un ordre 10^{-n} souhaité.

On peut écrire un algorithme permettant de réaliser cette approximation :

```
def balayage(f,a,b,n):
    inf=a
    for i in range(n):
        k=inf
        while f(k)*f(k+1)<0:
            k=k+10**(-i)
        inf=k
    return(inf,inf+10**(-n))
```

39.3.2 Dichotomie

Le principe de la méthode de dichotomie est similaire à celui de la méthode par balayage, sauf que l'on ne partage pas chaque intervalle en 10 sous-intervalles, mais en 2. Si l'on considère toujours une fonction f vérifiant les mêmes hypothèses, formellement la méthode suit ces étapes :

- ❖ On définit $a_0 = a$, $b_0 = b$. On calcule $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$. Si cette image est de signe contraire à $f(a_0)$, alors $c \in \left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$, et l'on définit $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Si cette image est de même signe que $f(a_0)$, alors $c \in \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$, et l'on définit alors $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. La solution c est alors dans $[a_1, b_1]$, qui est de longueur $\frac{b-a}{2}$.
- ❖ Pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on suppose a_n et b_n construits, et on procède de la même façon selon le signe de $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ pour définir a_{n+1} et b_{n+1}. La solution c est alors dans $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, qui est de longueur $\frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$
- ❖ On continue jusqu'à obtenir une précision voulue.

Formellement, cela revient à construire deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. On peut montrer alors qu'elles sont adjacentes, et qu'elles convergent vers la solution c.

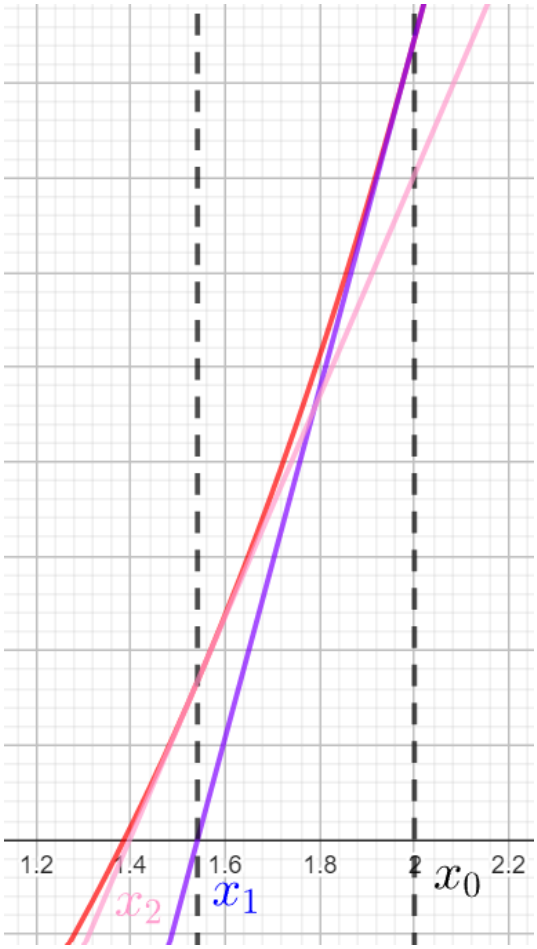
On peut également implémenter cette méthode dans un algorithme :

```python
def dichotomie(f,a,b,epsilon):
    while b-a>epsilon:
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return(a,b)
```

39.3.3 Méthode de Newton

La méthode de Newton s'applique dans le cas où f est dérivable (de classe C^2 plus précisément). On va commencer par décrire le procédé graphiquement.

On cherche la solution c à l'équation $f(x) = 0$. On part d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ "proche" de c, et tel que $f'(x_0) \neq 0$. On trace la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0. Celle-ci coupe l'axe des abscisses en x_1. On recommence ensuite en x_1 : on trace le tangente qui coupe l'axe des abscisses en x_2, et ainsi de suite.



Pour $n \in \mathbb{N}$, la tangente à la courbe au point d'abscisse x_n a pour équation $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. L'abscisse x_{n+1} du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses vérifie donc :

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cela donne donc une méthode itérative, que l'on peut implémenter dans un algorithme :

```
def newton(f,g,x0,n):
    x=x0
    for i in range(n):
        x=x-f(x)/g(x)
    return(x)
```

Remarque Nous n'allons pas détailler, mais cette méthode ne fonctionne que sous certaines hypothèse sur f, et notamment sur f' et f''.

Si l'on prend l'exemple de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 2x + 2$, avec comme point de départ $x_0 = 0$, on obtient que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{2}{-2} = 1$$

puis

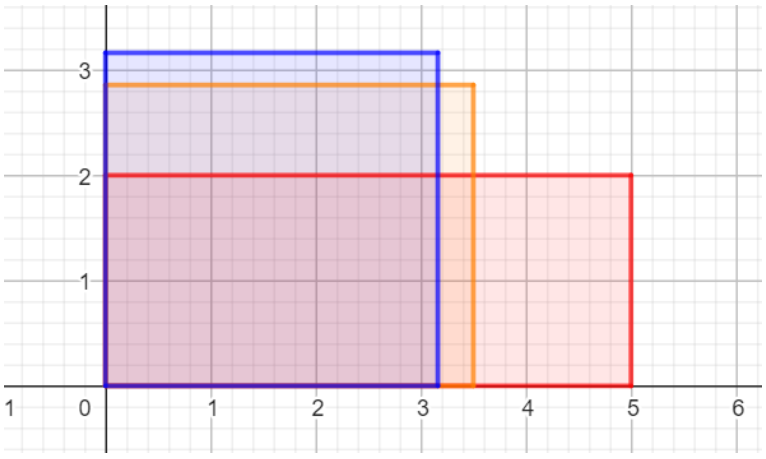
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1}{1} = 0$$

Ainsi, la suite $(x_n)_n$ oscille entre 0 et 1, donc ne converge pas vers la solution c à $f(x) = 0$, qui existe bien sur $\mathbb{R}$. Cela vient notamment du fait que f' change de signe sur $[0, 1]$.

Appliquée à la fonction $f : x \mapsto x^2 - a$ avec $a > 0$ et $x_0 = a$, cette méthode donne la méthode Héron pour approximer $\sqrt{a}$. On obtient alors la suite $(x_n)_n$ définie par le relation de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$$

ce qui exprime que x_{n+1} est la moyenne arithmétique des deux dimensions d'un rectangle d'aire $x_n \times \frac{a}{x_n} = a$. Cela illustre donc la construction de Héron : on part d'un rectangle d'aire a, et l'on construit de proche en proche de nouveaux rectangles en prenant pour longueur la moyenne des deux dimensions du rectangle précédent.



Intuitivement, les rectangles "convergent" vers un carré d'aire a, donc $(x_n)_n$ converge vers $\sqrt{a}$. On peut justifier par le théorème du point fixe que c'est effectivement le cas.

39.3.4 Point fixe

Voyons une dernière façon d'approcher certaines solutions d'équations numériques. On commence par un théorème non étudié au lycée.

Théorème (Théorème du point fixe de Banach)(admis) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application contractante, c'est-à-dire pour laquelle il existe un réel $0 < k < 1$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Alors f admet un unique point fixe x^*.
De plus, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite définie par récurrence par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x^*.

Démonstration *On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k|x_{n+1} - x_n|$, donc par récurrence*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$$

Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p > q$, on a

$$\begin{aligned} |x_p - x_q| &\leq |x_p - x_{p-1}| + \ldots + |x_{q+1} - x_q| \\ &\leq \left(k^{p-1} + \ldots + k^q\right)|x_1 - x_0| \\ &\leq k^q\left(1 + k + \ldots\right)|x_1 - x_0| \quad \text{car } k > 0 \\ &\leq \frac{k^q}{1-k}|x_1 - x_0| \quad \text{car } 0 < k < 1 \end{aligned}$$

Or, $k^q \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$ car $0 < k < 1$, donc la suite (x_n) est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, elle converge vers un réel $x^* \in \mathbb{R}$.
Comme f est contractance, elle est continue sur $\mathbb{R}$, donc par passage à la limite, $x^* = f(x^*)$, ce qui prouve le théorème. ◈

Remarque Une conséquence de ce théorème est la suivante : si l'on tient une carte d'un lieu tout en se situant dans ce lieu, alors il existe un unique point qui est sa propre représentation sur la carte.

Par conséquent, si l'on cherche à résoudre une équation se ramenant à $f(x) = x$, avec f une fonction contractante, ce théorème énonce qu'il existe une unique solution, et que l'on peut l'approcher par une suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Voici un algorithme permettant cette approximation.

```
def pointfixe(f,x0,n):
    x=x0
    for i in range(n):
        x=f(x)
    return(x)
```

40 Exemples de modèles d'évolution

- **Niveau :** Terminale complémentaire, Terminale experte, Terminale spécialité
- **Pré-requis :** suites récurrentes, limites de suites, matrices, fonctions exponentielles, dérivation, équations différentielles

On appelle modèle d'évolution la modélisation d'un phénomène qui dépend du temps, de façon discrète ou continue. On parle alors de modèle discret et de modèle continu.

40.1 Modèles discrets

40.1.1 Suites récurrentes d'ordre 1

Définition On appelle suite récurrente d'ordre 1 toute suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $f : I \to I$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Ce type de suite apparaît fréquemment lorsque l'on modélise des phénomènes discrets, car bien souvent l'état d'un système au temps $n+1$ ne dépend que de son état au temps n.

Suites arithmético-géométriques :

Les suites arithmétiques et géométriques sont des exemples de suites récurrentes d'ordre 1 que l'on sait étudier parfaitement. Toutefois, elle sont un peu simples, et pas toujours adaptées pour modéliser certains phénomènes. On dispose d'un autre type de suite englobant ces deux cas particuliers : les suites arithmético-géométriques.

On appelle suite arithmético-géométrique toute suite récurrente d'ordre 1 où la fonction f est affine, donc de la forme $x \mapsto ax + b$, avec a, b réels. La suite $(u_n)_n$ est donc définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$.

Donnons un exemple de phénomène pouvant être modélisé par de telles suites. On considère un compte en banque rémunéré au taux annuel de 2%. On y dépose un montant initial de 1000€, et chaque année on y dépose 500€. On va chercher à savoir quel montant sera sur ce compte au bout de n années.

On modélise ce montant par une suite $(u_n)_n$, puisque le phénomène évolue de façon discrète, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le montant sur ce compte en banque après n années. On a alors $u_0 = 1000$ et le problème amène à la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 1,02u_n + 500$$

En terminale, on ne détaillera pas l'étude de ce type de suite, et l'on demandera simplement de vérifier que la suite $(v_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 25000$ est géométrique.

Remarque Pour déterminer ce type de suite, on cherche un point fixe de f, donc on résout l'équation $f(x) = x$, ici $x = 1,02x + 500$. On trouve $x = -\frac{500}{0,02} = -25000$, d'où la définition de $(v_n)_n$. Cette propriété de point fixe (lié au fait que f est affine) garantit que $(v_n)_n$ est géométrique.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 25000 = 1,02u_n + 500 + 25000 = 1,02u_n + 25500 = 1,02(u_n + 25000) = 1,02v_n$$

$(v_n)_n$ est donc géométrique de raison $1,02$ et de premier terme $v_0 = u_0 + 25000 = 26000$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 26000 \times 1,02^n$, puis que $u_n = v_n - 25000 = 26000 \times 1,02^n - 25000$.

On peut proposer différentes questions en lien avec ce type de modélisation, que ce soit par la formule récursive ou la formule explicite : calcul des premiers termes, représentation graphique, recherche de seuil.

Suite logistique :

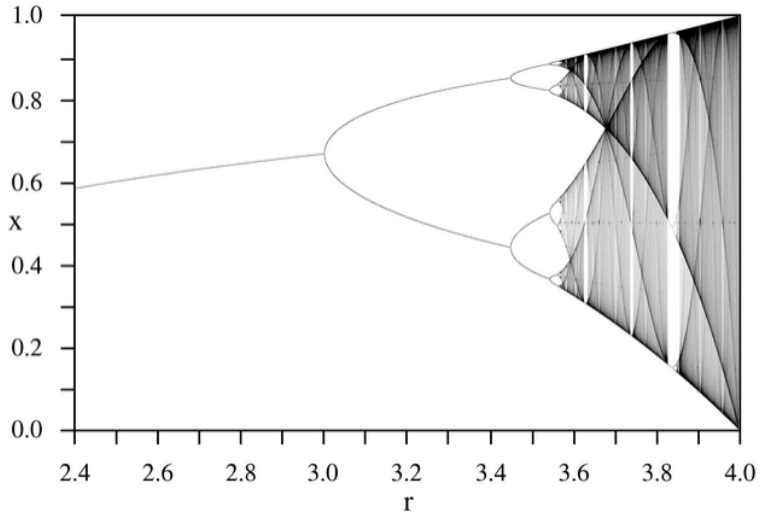
On appelle suite logistique toute suite récurrente d'ordre 1 définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n(1 - bu_n)$, avec a, b deux réels positifs. Le modèle de Verhulst est un modèle d'évolution de population qui utilise ce type de suite. Développons un exemple.

On considère une certaine population dont le nombre d'individus est majoré par un réel positif M. On note alors u_n la proportion de ce nombre d'individus par rapport à son maximum M après un temps n, de sorte que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le réel $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est alors le taux d'évolution de cette population. Le modèle d'évolution de Verhulst consiste à supposer que ce taux est proportionnel à $1 - u_n$. Il existe alors un réel positif a tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a(1-u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} = au_n(1-u_n)$, ce qui est une suite logistique.

Sans donner de justifications, on peut étudier le comportement de cette suite pour plusieurs valeurs de a.

- Pour $a \in [0, 1]$, (u_n) converge vers 0.
- Pour $a \in [1, 3]$, (u_n) converge vers $\frac{a-1}{a}$.
- Pour $a \in]3, \sim 3,57[$, la suite (u_n) oscille entre 2, 4, 8, ... valeurs (les puissances de 2) au fur et à mesure que a se rapproche de 3,57 environ.
- Pour $a \in [\sim 3,57, 4]$, le comportement de la suite (u_n) est chaotique : elle n'oscille pas entre un nombre fini de valeurs, sauf pour quelques valeurs de a, dans certains intervalles.

On représente cela dans un diagramme de bifurcation. En abscisse, on fait figurer le paramètre a (ici noté r), et en ordonnée les valeurs autour desquelles la suite oscille (plus précisément, les valeurs d'adhérences de la suite).



https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_logistique

40.1.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 toute suite $(u_n)_n$ définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1, et par une relation de récurrence de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, avec a, b deux réels.

Ce type de suite peut permettre de modéliser des phénomènes dont l'état au temps $n+2$ ne dépend pas que de l'état au temps $n+1$, mais aussi au temps n.

Un exemple historique d'une modélisation par ce type de suite est celui de la suite de Fibonacci. Ce nom est dû à l'italien Leonardo Fibonacci, dit "Léonard de Pise", qui a étudié un problème d'évolution d'une population de lapins selon les règles suivantes :

- ❖ Au premier mois, il y a un couple de lapins.
- ❖ Les lapins sont en capacité de procréer dès lors qu'ils ont deux mois.
- ❖ Chaque mois, si un couple de lapins peut procréer, ils donnent naissance à deux lapins.

On suppose de plus que les lapins ne meurent jamais. Si l'on note F_n le nombre de couples de lapins au n-ième mois, on a alors $F_1 = 1$. Au deuxième mois, le couple est trop jeune pour procréer, donc $F_2 = 1$. Pour tout entier n, au temps $n+2$, il y a F_{n+1} couples de lapins, dont F_n sont âgés d'au moins deux mois et donnent donc naissance à F_n nouveaux couples de lapins. On en déduit la relation de récurrence :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Cette suite est donc bien récurrente linéaire d'ordre 2.

Au lycée, l'étude systématique de ce type de suite (par l'équation caractéristique par exemple) n'est pas étudiée. On peut cependant vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \overline{\varphi}^n\right)$$

avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. En effet, on a

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^1 - \overline{\varphi}^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^2-\overline{\varphi}^2\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}-\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\left(1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}\right)\\ &= \frac{1}{4\sqrt{5}}\times 2\sqrt{5}\times 2\\ &= 1\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\varphi^2=\frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\varphi+1$$

et

$$\overline{\varphi}^2=\frac{(1-\sqrt{5})^2}{4}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\overline{\varphi}+1$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi^{n+2}=\varphi^{n+1}+\varphi^n$ et $\overline{\varphi}^{n+2}=\overline{\varphi}^{n+1}+\overline{\varphi}^n$. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2}-\overline{\varphi}^{n+2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1}+\varphi^n-\overline{\varphi}^{n+1}-\overline{\varphi}^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1}-\overline{\varphi}^{n+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n-\overline{\varphi}^n\right)$$

On peut alors facilement montrer par récurrence que cette suite est nécessairement celle de Fibonacci.

40.1.3 Modèle de Lotka-Volterra

Le modèle de Lotka-Volterra est un modèle d'évolution de population de deux espèces, qui évoluent conjointement. Si l'on note $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ les populations des deux espèces, typiquement une proie et un prédateur, ce modèle prévoit que :

- Le taux d'accroissement des proies $\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n}$ dépend d'un taux de natalité constant $a>0$ et d'un taux de mortalité by_n proportionnel au nombre de prédateurs, avec $b>0$.
- Le taux d'accroissement des prédateurs $\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n}$ dépend d'un taux de natalité cx_n proportionnel au nombre de proies, avec $c>0$, et d'un taux de mortalité fixe $d>0$.

Ces deux conditions amènent aux relations de récurrence :

$$x_{n+1}=(1+a)x_n-bx_ny_n \qquad\qquad y_{n+1}=(1-d)y_n+cx_ny_n$$

Sous certaines hypothèses de bornitude et de stabilité autour d'une valeur fixe, on peut linéariser ce système pour se ramener à des expressions de la forme :

$$x_{n+1}=ax_n+by_n \qquad\qquad y_{n+1}=cx_n+dy_n$$

On peut alors utiliser des matrices pour regrouper ces relations. Si l'on note $U_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, on a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}=AU_n$. On en déduit par une récurrence triviale que $U_n=A^nU_0$.

Il faut alors pouvoir calculer les puissances de A, ce que l'on peut faire par diagonalisation. Bien entendu, ce travail n'est pas exigible en terminale, mais un simple calcul de vérification peut être effectué. On en déduit alors des expressions explicites de x_n et y_n en fonction de n.

40.2 Modèles continus

De nombreux phénomènes temporels ne sont pas discrets mais continus. Dans ce cas, on ne modélise pas en utilisant des suites mais des fonctions, qui peuvent vérifier certaines équations fonctionnelles, voire des systèmes.

40.2.1 Projectile dans un fluide

Donnons un exemple de telle modélisation tirée d'un exercice du sujet de mathématiques du baccalauréat scientifique Amérique du Nord 2018.

Exercice En laboratoire, on jette un projectile dans un fluide et on s'intéresse à sa hauteur maximale. Le projectile évoluant dans un fluide, il subit une certaine force de frottement, et sa trajectoire n'est pas parabolique. On modélise sa trajectoire par la fonction f définie sur $[0,1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où $b \geq 2$ est un paramètre, et x l'abscisse du projectile.

1. Justifier que f est dérivable sur $[0,1[$ et calculer sa dérivée.

2. Montrer que f admet un maximum global égal à $b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.

1. f est une somme de fonctions dérivables, donc elle est dérivable, et pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$f'(x) = b + 2 \times (-1) \times \frac{1}{1-x} = b - \frac{2}{1-x} = \frac{-bx + b - 2}{1-x}$$

2. Pour $x \in [0,1[$, on a $1 - x > 0$, et

$$-bx + b - 2 \geq 0 \Leftrightarrow bx \leq b - 2 \Leftrightarrow x \leq 1 - \frac{2}{b}$$

car b est positif. Comme $b \geq 2$, $1 - \frac{2}{b} \in [0,1[$, donc f admet un maximum en $1 - \frac{2}{b}$. Celui-ci vaut alors

$$f\left(1 - \frac{2}{b}\right) = b \times \left(1 - \frac{2}{b}\right) + 2\ln\left(1 - \left(1 - \frac{2}{b}\right)\right) = b - 2 + 2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$$

40.2.2 Équations différentielles

Lorsque l'on étudie des phénomènes continus, il arrive que la vitesse d'évolution d'une quantité dépende directement de cette quantité. La fonction qui la modélise vérifie alors une certaine équation différentielle. Donnons quelques exemples.

Loi de décroissance radioactive :

On considère un noyau radioactif, et on s'intéresse au nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs d'un certain isotope à un temps t. Les lois de la physique prévoient qu'après un petit temps $h > 0$, le taux d'accroissement $\frac{N(t+h)-N(t)}{h}$ du nombre de noyaux radioactifs est proportionnel au nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs. Il existe donc un réel $\lambda > 0$ tel que

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = -\lambda N(t)$$

car N décroît. Lorsque h tend vers 0, on obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

La résolution de cette équation donne :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où $N_0 = N(0)$ est la quantité initiale de noyaux radioactifs.

Cette modélisation mène à une disparition totale des noyaux radioactifs, car comme $\lambda > 0$, $N(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Les physiciens utilisent souvent une caractéristique appelée "demi-vie" qui correspond au temps écoulé pour que la moitié des noyaux radioactifs soient désintégrés. On cherche alors $t > 0$ tel que $N(t) = \frac{1}{2}N_0$. On a

$$N(t) = \frac{1}{2}N_0 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Charge d'un condensateur :

On considère un condensateur de capacité C, de résistance R, et on note E la tension aux bornes du générateur. On note $U(t)$ la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps t.

La physique prévoit que l'intensité I du courant qui passe dans le condensateur vérifie $I(t) = CU'(t)$. En utilisant la loi d'Ohm et la loi des mailles, on en vient à l'équation différentielle :

$$U'(t) + \frac{1}{RC}U(t) = \frac{E}{RC}$$

Sa résolution amène à l'expression :

$$U(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Modèle de Verhulst continu :

On a déjà étudié le système de Verhulst discret, en parlant de suite logistique. Le même type de modélisation avec un phénomène continu amène à l'équation différentielle :

$$x'(t) = ax(t)\Big(1 - x(t)\Big)$$

Contrairement au cas discret, il existe ici une façon simple de résoudre cette équation différentielle. Si l'on suppose que x ne s'annule jamais (ce qui est cohérent lorsque l'on modélise une population), on peut considérer $z(t) = \frac{1}{x(t)}$. Dans ce cas, z est dérivable, et l'on a pour tout t :

$$z'(t) = -\frac{x'(t)}{x(t)^2} = \frac{ax(t)\Big(x(t) - 1\Big)}{x(t)^2} = a - \frac{a}{x(t)} = a - az(t)$$

Ainsi, z vérifie l'équation différentielle $y' + ay = a$, qui donne comme solution :

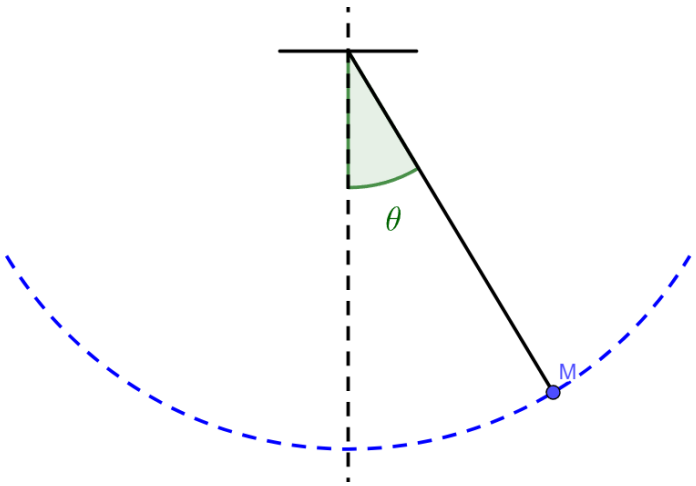
$$z(t) = 1 + (z(0) - 1)e^{-at}$$

On en déduit que

$$x(t) = \frac{x(0)}{x(0) + (1 - x(0))e^{-at}}$$

Pendule simple :

On appelle pendule simple une masse ponctuelle M à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L. On détermine la position de la masse par l'angle θ entre le fil et la verticale.



Dans un repère judicieusement choisi, les coordonnées de $M(t)$ sont

$$x(t) = L\Big(1 - \cos(\theta(t))\Big),\ y(t) = L\sin(\theta(t))$$

Alors

$$x'(t) = L\theta'(t)\sin(\theta(t)),\ y'(t) = L\theta'(t)\cos(\theta(t))$$

On a alors par le théorème de Pythagore :

$$v(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 = L^2\theta'(t)^2$$

L'énergie mécanique du pendule est alors

$$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}Mv(t)^2 + MgLx(t) = \frac{1}{2}ML^2\theta'(t)^2 + MgL\Big(1 - \cos(\theta(t))\Big)$$

Celle-ci est constante, donc sa dérivée est nulle :

$$E_m'(t) = ML^2\theta'(t)\theta''(t) + MgL\theta'(t)\sin(\theta(t)) = 0$$

$\theta' = 0$ donne une solution triviale : le pendule est à l'équilibre. Sinon, θ vérifie :

$$\theta'' + \omega^2\sin(\theta) = 0$$

avec $\omega = \frac{g}{L}$.

Cette équation différentielle d'ordre 2 n'est pas linéaire. Cependant, l'approximation linéaire du sinus en 0 nous permet d'approcher, pour des petites oscillations, $\sin(\theta)$ par θ :

$$\theta'' + \omega^2\theta = 0$$

On montre alors que la solution est

$$\theta(t) = \theta(0)\sin(\omega t)$$

40.2.3 Systèmes différentiels

Tout comme pour le cas discret, on peut avoir des phénomènes dans lesquels deux quantités évoluent conjointement. Si l'on reprend l'exemple du modèle proie/prédateur de Lotka-Volterra, on peut en imaginer une version continue, qui s'écrirait alors :

$$\begin{cases} x'(t) = (1+a)x(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = (1-d)x(t) + cx(t)y(t) \end{cases}$$

La version linéarisée d'un tel système peut se résoudre de manière exacte, mais cela demande des outils relativement sophistiqués (diagonalisation de matrice, exponentielle de matrice), mais l'étude sur un cas particulier simplifié peut tout de même être faite.

D'une manière générale, pour la version linéaire ou non, on peut utiliser la méthode d'Euler (ou plutôt l'adapter quelque peu) pour approcher les solutions x et y.

41 Problèmes dont la résolution fait intervenir un algorithme

- **Niveau :** transvsersal
- **Pré-requis :** variable selon les problèmes

41.1 Résolution d'équations numériques

Il existe différentes méthodes pour approcher des solutions d'équations numériques. On peut pour chacune d'elle écrire un algorithme afin d'itérer la méthode un certain nombre de fois n fixé, ou bien atteindre une précision ε fixée.

Méthode par balayage :

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution c sur $[a,b]$. La méthode de balayage permet d'approcher cette solution avec une précision de l'ordre de 10^{-n}, pour $n \in \mathbb{N}$ aussi grand que souhaité. On procède comme suit :

- On commence par balayer $[a,b]$ avec un pas de 1, c'est-à-dire que l'on calcule les valeurs $f(k)$, pour des entiers $a \leq k \leq b$. On cherche un entier k tel que $f(k)$ et $f(k+1)$ soient de signes contraires. Alors par le théorème des valeurs intermédiaires, $c \in [k, k+1]$.
- On balaye maintenant $[k, k+1]$ avec un pas de 0,1, et l'on cherche alors un entier m tel que $f\left(k + \frac{m}{10}\right)$ et $f\left(k + \frac{m+1}{10}\right)$ soient de signes contraires. La solution c est alors comprise entre $k + \frac{m}{10}$ et $k + \frac{m+1}{10}$, ce qui donne une précision à 10^{-1} près.
- On continue ainsi de proche en proche jusqu'à obtenir une précision d'un ordre 10^{-n} souhaité.

On peut écrire un algorithme permettant de réaliser cette approximation :

```
def balayage(f,a,b,n):
    inf=a
    for i in range(n):
        k=inf
        while f(k)*f(k+1)<0:
            k=k+10**(-i)
        inf=k
    return(inf,inf+10**(-n))
```

Méthode par dichotomie :

Le principe de la méthode de dichotomie est similaire à celui de la méthode par balayage, sauf que l'on ne partage pas chaque intervalle en 10 sous-intervalles, mais en 2. Si l'on considère toujours une fonction f vérifiant les mêmes hypothèses, formellement la méthode suit ces étapes :

- On définit $a_0 = a$, $b_0 = b$. On calcule $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$. Si cette image est de signe contraire à $f(a_0)$, alors $c \in \left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right]$, et l'on définit $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Si cette image est de même signe que $f(a_0)$, alors $c \in \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]$, et l'on définit alors $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b_0$. La solution c est alors dans $[a_1, b_1]$, qui est de longueur $\frac{b-a}{2}$.
- Pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on suppose a_n et b_n construits, et on procède de la même façon selon le signe de $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ pour définir a_{n+1} et b_{n+1}. La solution c est alors dans $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, qui est de longueur $\frac{b_n-a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$
- On continue jusqu'à obtenir une précision voulue.

Formellement, cela revient à construire deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. On peut montrer alors qu'elles sont adjacentes, et qu'elles convergent vers la solution c.

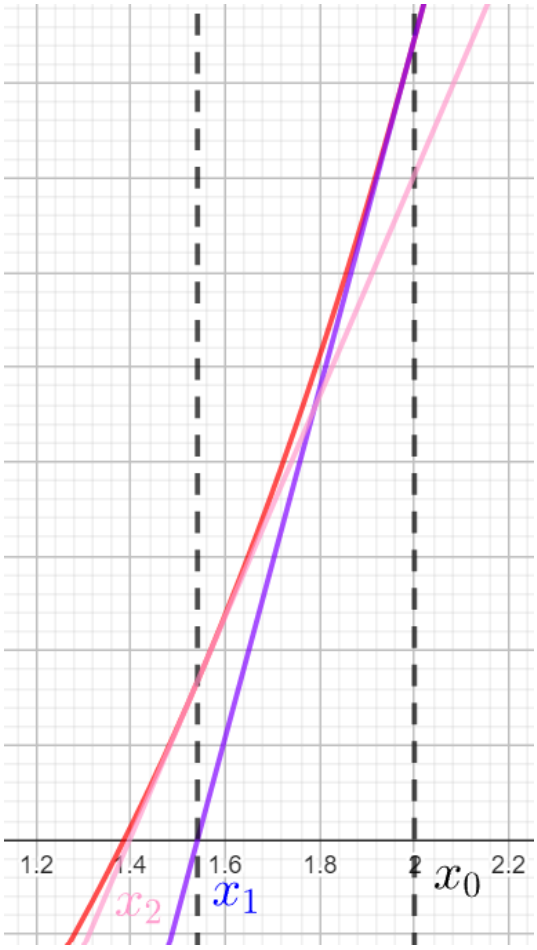
On peut également implémenter cette méthode dans un algorithme :

```
def dichotomie(f,a,b,epsilon):
    while b-a>epsilon:
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return(a,b)
```

Méthode de Newton :

La méthode de Newton s'applique dans le cas où f est dérivable (de classe C^2 plus précisément). On va commencer par décrire le procédé graphiquement.

On cherche la solution c à l'équation $f(x) = 0$. On part d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ "proche" de c, et tel que $f'(x_0) \neq 0$. On trace la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0. Celle-ci coupe l'axe des abscisses en x_1. On recommence ensuite en x_1 : on trace le tangente qui coupe l'axe des abscisses en x_2, et ainsi de suite.



Pour $n \in \mathbb{N}$, la tangente à la courbe au point d'abscisse x_n a pour équation $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$. L'abscisse x_{n+1} du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses vérifie donc :

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cela donne donc une méthode itérative, que l'on peut implémenter dans un algorithme :

```
def newton(f,g,x0,n):
    x=x0
    for i in range(n):
        x=x-f(x)/g(x)
    return(x)
```

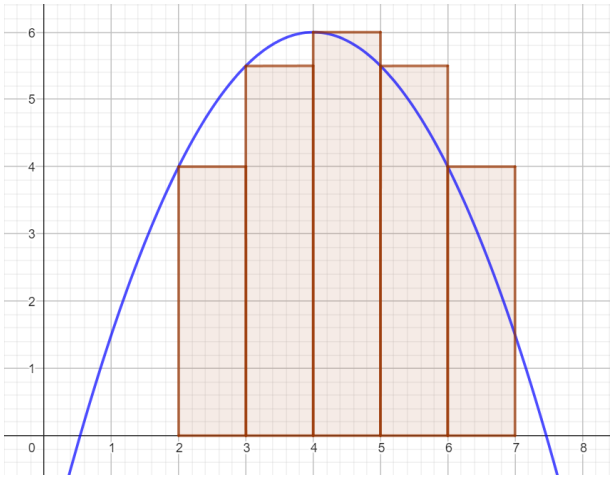
41.2 Calcul intégral

Lorsque l'on ne dispose pas d'une méthode exacte pour calculer une intégrale, on peut utiliser une méthode approchée pour l'approximer. Voici trois exemples de telles méthodes, pour lesquelles on peut écrire un algorithme.

Méthode des rectangles :

La méthode des rectangles consiste à approcher le domaine géométrique dont l'intégrale désigne l'aire par une réunion de rectangles, de largeur donnée et de hauteur liée à la fonction considérée.

Pour cela, on commence par partager l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles réguliers de longueur $\frac{b-a}{n}$. On construit sur chacun de ces segments un rectangle de hauteur l'image par f de la borne inférieure de ce segment. On calcule la somme des aires de ces rectangles, puis on fait tendre n vers $+\infty$, ce qui produit des rectangles de plus en plus "fins".



Par exemple ici, on approxime l'intégrale de la fonction sur $[2,7]$, en partageant cet intervalle en $n=5$ sous-intervalles.

Il est également possible de construire des rectangles de hauteur l'image par f de la borne supérieure des sous-intervalles.

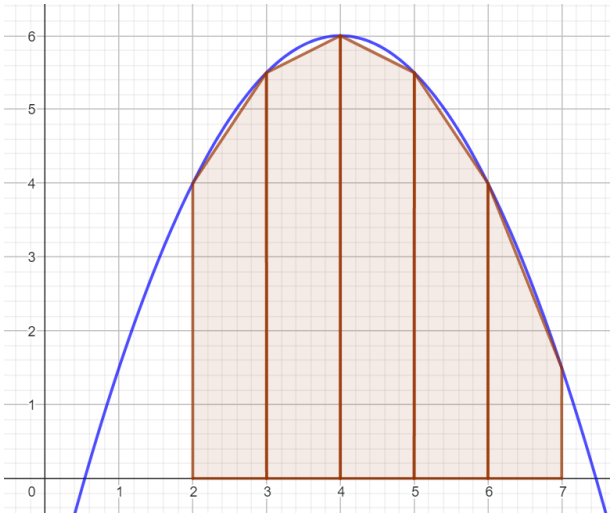
Pour un segment $[a,b]$ donné, on peut écrire un algorithme permettant de calculer les sommes de Riemann précédentes pour un certain entier n, ce qui donne un encadrement de $\int_a^b f(x)dx$. Voici un algorithme les calculant, avec l'exemple $f(x)=e^{-x^2}$.

```
def rectangle_gauss(a,b,n):
    x=a
    u=0
    v=0
    h=(b-a)/n
    for k in range (1,n+1):
        u=u+h*(1/sqrt(2*pi)*exp(-x**2/2))
        x=x+h
        v=v+h*(1/sqrt(2*pi)*exp(-x**2/2))
    print(u,v)
```

Méthode des trapèzes :

Le principe de la méthode est de construire sous la courbe des trapèzes au lieu des rectangles. Cela revient à approximer f par une fonction affine par morceaux et continue, plutôt qu'une fonction en escalier.

Plus précisément, on construit, à chaque sous-intervalle $[a_i,a_{i+1}]$, un trapèze de cette largeur et dont $(a_i,f(a_i))$ et $(a_{i+1},f(a_{i+1})$ sont deux sommets adjacents.



Voici un exemple d'algorithme donnant une approximation de $\int_a^b e^{\sqrt{x}}dx$ obtenue en subdivisant $[a,b]$ en n sous-intervalles.

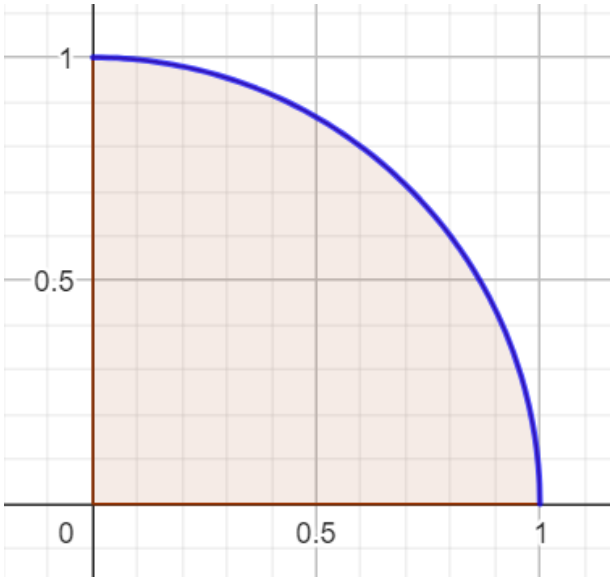
```
def trapeze(a,b,n):
    x=a
    u=0
    v=0
    h=(b-a)/n
    for k in range (1,n+1):
        u=u+(h/2)*(exp(sqrt(x))+exp(sqrt(x+h)))
        x=x+h
    print(u)
```

Méthode de Monte-Carlo :

Cette méthode se base sur l'aléatoire pour approcher l'intégrale. On commence par englober le domaine géométrique correspondant dans un rectangle, dont on peut donc calculer l'aire facilement. Puis l'on choisit aléatoirement un point (x,y) dans ce rectangle, et l'on regarde s'il est dans le domaine géométrique sous la courbe en examinant si $y > f(x)$ ou $y \leq f(x)$.

On répète cette expérience de nombreuses fois de manière indépendante, et la loi des grands nombres assure que le rapport du nombre de points dans le domaine sous la courbe par le nombre total de point approxime le rapport entre l'intégrale cherchée et l'aire du rectangle. On peut alors en déduire une valeur approchée de l'intégrale.

Donnons un exemple d'une utilisation de cette méthode. On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ définie sur $[0,1]$. Le domaine géométrique dont $\int_0^1 f(x)dx$ est l'aire est alors un quart du cercle trigonométrique (ce que l'on peut justifier par le changement de variable $x = \cos(t)$), donc cette intégrale vaut $\frac{\pi}{4}$. On en déduit que $\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. La méthode de Monte-Carlo appliquée à f peut donc permettre d'approcher π.



Voici un algorithme qui implémente cette méthode, en prenant le rapport avec l'aire du carré $[0,1]^2$, qui vaut 1.

```
def montecarlo(n):
    c=0
    for i in range (1,n+1):
        x=random()
        y=random()
        if y<=sqrt(1-x**2):
            c=c+1
    A=c/n
    print(A)
```

41.3 Résolution d'équations différentielles

On présente la méthode d'Euler, utile pour approximer la solution d'une équation différentielle d'ordre 1. On considère une équation différentielle d'ordre 1 de la forme $y' = g(y,x)$, et l'on fixe une condition initiale de la forme $y(x_0) = y_0$.

Soit $h > 0$. On a alors l'approximation affine : $y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hy'(x_0)$. Or, si y est solution de $y' = g(y,x)$, on a alors : $y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hg(y(x_0), x_0)$. Cela permet alors de calculer une valeur approchée de $y(x_0 + h)$.

Il suffit alors de recommencer le processus en partant de $y(x_0+h)$, ce qui permet d'approximer $y(x_0+2h)$. On recommence ensuite à partir de $y(x_0 + 2h)$, et ainsi de suite. Cette méthode est d'autant plus précise que h est petit, puisque les approximations affines sont alors meilleures.

On peut alors implémenter cet algorithme en langage Python. Voyons cela sur un exemple. On considère l'équation différentielle $y' + y^2 = 1$, avec la condition initiale $y(0) = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a :

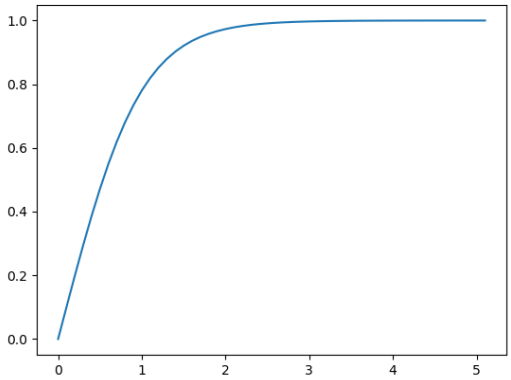
$$y(x + h) \approx y(x) + hy'(x) = y(x) + h(1 - y(x)^2)$$

ce qui donne une "relation de récurrence", entre $y(x)$ et $y(x + h)$.

On a $y(0) = 0$, puis avec la relation précédente, $y(h) = y(0) + h(1 - y(0)^2) = h$, et ensuite $y(2h) = y(h) + h(1 - y(h)^2) = h + h(1 - h^2) = -h^3 + 2h$, et ainsi de suite. La courbe représentative de l'approximation passe donc par les points $(0,0)$, (h,h) et $(2h, -h^3 + 2h)$.

On peut alors créer une fonction Python *euler*(x_0,y_0,b,h), qui donne l'approximation souhaitée sur l'intervalle $[x_0,b]$, avec un pas h.

```
def euler(x0,y0,b,h):
    x=x0
    y=y0
    X=[x]
    Y=[y]
    while x<b:
        y=y+h*(1-y**2)
        x+=h
        X.append(x)
        Y.append(y)
    plt.plot(X,Y)
    plt.show()
    return(X,Y)
```



Ici, *euler*$(0,0,5,0.1)$ donne la courbe ci-dessus.

41.4 Limites de suites

On considère une suite $(u_n)_n$ réelle. Lorsque l'on sait que cette suite admet une limite finie L, on peut chercher à savoir à partir de quel rang n la distance entre u_n et L est inférieure à une certaine précision ε. Si l'on dispose d'une expression explicite de u_n en fonction de n, on peut simplement raisonner par équivalence. Lorsqu'on ne dispose que d'une relation de récurrence de la forme $u_{n+1}=f(u_n)$, on peut utiliser un algorithme pour mener les calculs :

```
def seuil_fin(f,u_0,L,epsilon):
    u=u_0
    n=0
    while abs(u-L)>epsilon:
        u=f(u)
        n=n+1
    return n
```

On peut aussi imaginer une variante dans le cas où la limite de (u_n) est $+\infty$:

```
def seuil_infi(f,u_0,A):
    u=u_0
    n=0
    while u<A:
        u=f(u)
        n=n+1
    return n
```

On peut bien sûr l'adapter au cas où la limite est $-\infty$.

41.5 Simulation de variables aléatoires

L'une des utilités des algorithmes est de simuler des variables aléatoires, ou plus précisément de réaliser des tirages aléatoires suivant une loi discrète donnée. Ce type d'algorithme est à la fois utile pour générer de l'aléatoire et pour conjecturer ou vérifier des propriétés (comme la loi des grands nombres par exemples).

Commençons par la loi de Bernouilli, avec un paramètre $0 < p < 1$:

```
def bernouilli(p):
    x=random.random()
    if x<=p:
        return 1
    else:
        return 0
```

On peut réutiliser cette fonction "bernouilli" pour simuler des lois binomiales ou géométriques :

```
def binom(n,p):
    S=0
    for k in range(n):
        x=bernouilli(p)
        if x==1:
            S=S+1
    return S
```

```
def geo(p):
    x=bernouilli(p)
    n=1
    while x==0:
        n=n+1
        x=bernouilli(p)
    return n
```

41.6 Arithmétique

Un dernier domaine dans lequel peuvent apparaître des algorithmes pour résoudre des problèmes est l'arithmétique. Ici, contrairement aux cas des équations numériques ou différentielles, du calcul intégral, ou de la limite de suites, on ne cherchera pas à obtenir une certaine précision pour une approximation.

Division euclidienne :

On considère deux entiers naturels a et b, avec b non nul. On appelle q et r respectivement le quotient et le reste de a par b. Pour calculer ce quotient et ce reste, on suit l'algorithme de division euclidienne : on calcule les multiples successifs de b jusqu'à dépasser a, pour trouver le quotient, puis on calcule le reste.

On peut coder cet algorithme sur Python par exemple :

```
def div_eucl(a,b):
    q=0
    while b*q < a:
        q=q+1
    q=q-1
    r=a-b*q
    return(q,r)
```

Algorithme d'Euclide :

Pour trouver le PGCD de deux entiers, on peut dresser la liste de leurs diviseurs, et identifier le plus grand de leurs diviseurs communs. Cependant, cela peut être particulièrement long pour des entiers de valeur absolue trop grande. On va alors présenter un algorithme de calcul du PGCD, qui a à la fois une utilité pratique et théorique. On rappelle le résultat suivant :

Théorème (Algorithme d'Euclide) Soient a et b deux entiers avec b non nul. On écrit $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b. On définit les suites (a_n), (b_n), (q_n) et (r_n) comme suit.
On note $a_0 = a$, $b_0 = b$, $r_0 = r$ et $q_0 = q$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note alors $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = r_n$ et q_n, r_n le quotient et le reste de la division euclidienne de a_n par b_n.
Alors la suite (r_n) atteint 0, et pgcd(a, b) est alors le dernier terme non nul de cette suite.

On peut coder cet algorithme en langage Python :

```
def euclide(a,b):
    r=a%b
    while r>0 :
        (a,b)=(b,r)
        r=a%b
    return(b)
```

On peut également présenter sa version étendue, qui permet de trouver une relation de Bézout entre a et b :

```
def euclide_etendu(a,b):
    (d,u,v,d1,u1,v1)=(a,1,0,b,0,1)
    while d1!=0:
        q=d//d1
        (d,u,v,d1,u1,v1)=(d1,u1,v1,d-q*d1,u-q*u1,v-q*v1)
    return(d,u,v)
```

Crible d'Eratosthène :

Un moyen historique et très pratique pour lister les nombres premiers est le crible d'Eratosthène (mathématicien grec du IIIème siècle avant J.C.).

Pour trouver tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à un certain entier N, on commence par écrire tous les entiers entre 1 et N. On commencer par noter 2, qui est premier, puis l'on raye de la liste tous les autres multiples de 2. On note ensuite le prochain entier non rayé (ici 3), et on raye tous ses multiples. On continue ainsi de suite jusqu'à ce que chaque nombre soit rayé ou noté comme premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Cela permet de déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

Il est également possible de coder cet algorithme en langage Python, afin d'obtenir cette liste :

```
def crible(n):
    L=[]
    for i in range(2,n+1):
        L.append(i)
    for p in range(2,n+1):
        for k in range(1,len(L)+1):
            if L[len(L)-k]!=p and L[len(L)-k]%p==0:
                del L[len(L)-k]
    return L
```

42 Différents types de raisonnements en mathématiques

- ❖ **Niveau :** transversal
- ❖ **Pré-requis :** variable selon les problèmes

42.1 Logique mathématique et raisonnements

Définition Une assertion est une phrase syntaxiquement correcte, ayant un sens, et dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse.

Définition La négation d'une assertion A, notée non$A$, ou $\neg A$, est l'assertion qui est vraie si A est fausse, et fausse si A est vraie.

Définition Soient A et B deux assertions.

- ❖ L'assertion "A ou B", notée $A \vee B$, est l'assertion qui est vraie lorsque l'une des deux assertions A ou B est vraie, et fausse lorsque A et B sont toutes les deux fausses.
- ❖ L'assertion "A et B", notée $A \wedge B$, est l'assertion qui est vraie lorsque A et B sont vraies simultanément, et fausse si l'une des deux est fausse.
- ❖ L'assertion "A implique B", notée $A \Rightarrow B$, est l'assertion "(non$A$) ou B". Elle est fausse lorsque A est vraie et B est fausse, et vraie dans les autres cas.
- ❖ L'assertion "A équivalent à B", notée $A \Leftrightarrow B$, est l'assertion qui est vraie quand A et B ont la même valeur de vérité, ie lorsqu'elles sont simultanément vraies, ou simultanément fausses.

Remarque On peut récapituler ces définitions dans des tableaux appelés tables de vérités.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

Les lettres V et F signifient Vrai et Faux.

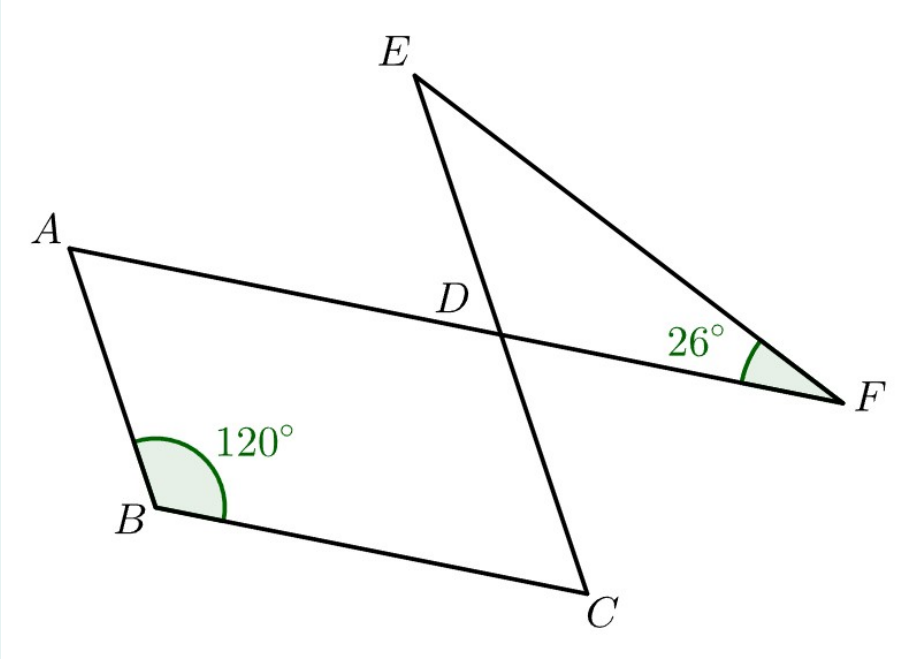
Remarque Ces tables sont également utilisées pour démontrer des proposition portant sur des assertions. Toutes les propositions qui suivent (sauf sur le principe de récurrence) peuvent se démontrer de cette façon.

Proposition Soient A et B deux assertions. Alors $\Big((A \Rightarrow B) \wedge A\Big) \Rightarrow B$.

Proposition Soient A, B et C trois assertions. Alors $\Big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\Big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

Ces propositions sont à la base du raisonnement dit direct, qui consiste à démontrer plusieurs implications successives, à partir d'une assertion que l'on sait vraie, pour arriver à une assertion que l'on veut démontrer.

Exercice Dans la figure suivante, $ABCD$ est un parallélogramme, les points A, D et F sont alignés, et les points C, D et E sont alignés. Donner la mesure de l'angle $\widehat{DEF}$.



On raisonne par implications successives :

- On sait que $ABCD$ est un parallélogramme et que les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux, donc $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 120°$.
- On sait que $\widehat{ADC} = 120°$ et que les angles $\widehat{ADC}$ et $\widehat{EDF}$ sont opposés par le sommet, donc égaux. Ainsi, $\widehat{EDF} = \widehat{ADC} = 120°$.
- On sait que $\widehat{EDF} = 120°$, $\widehat{DFE} = 26°$ et que la somme des angles d'un triangle mesure $180°$. On en déduit que $\widehat{DEF} = 180° - \widehat{EDF} - \widehat{DFE} = 180° - 120° - 26° = 34°$.

Définition Soient A et B deux assertions. La réciproque de l'implication $A \Rightarrow B$ est l'implication $B \Rightarrow A$. La contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Proposition Soient A et B deux assertions. Alors $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Autrement dit, une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité. Il est parfois judicieux de vouloir démontrer la contraposée d'une implication, plutôt que l'implication elle-même. On dit que l'on raisonne par contraposée.

Remarques ❖ Une implication et sa réciproque n'ont pas toujours les mêmes valeurs de vérité. On peut par exemple considérer l'implication n mutiple de 4 $\Rightarrow$ n pair. Elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et sa réciproque ne l'est pas.

❖ Attention, la négation d'une implication n'est pas une implication ! La négation de $A \Rightarrow B$ est $A \wedge \neg B$.

L'une des utilisations classiques de ce type de raisonnement est la démonstration de l'implication "n^2 pair $\Rightarrow$ n pair". Sa contraposée est "n impair $\Rightarrow$ n^2 impair". Pour la démontrer, on considère un entier n impair, donc qui s'écrit sous la forme $n = 2k+1$, avec k entier. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2\times(2k^2+2k)+1$, avec $2k^2+2k$ entier, donc n^2 est impair.

Remarque On peut démontrer ce résultat par raisonnement direct en utilisant le lemme de Gauss.

Proposition Soient A et B deux assertions. Alors $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \Big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\Big)$.

Ainsi, pour démontrer une équivalence, on peut démontrer deux implications, ce qui peut s'avérer plus simple, voire nécessaire. On dit que l'on procède par double implication. Il est toutefois possible de démontrer des équivalences en procédant par équivalences successives, tout comme pour les implications.

Exemples ❖ Lorsque l'on résoud des équations du premier degré, en effectuant les mêmes opérations à chaque membre de l'égalité, on procède par équivalence : à chaque étape, on prouve l'équivalence entre deux égalités. Cette équivalence est primordiale : un des deux sens exprime que les solutions trouvées sont effectivement solutions, alors que l'autre exprime que ce sont les seules.

❖ Pour démontrer que deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul, on procède par double implication : les deux raisonnements sont de natures différentes. Nous détaillerons cette preuve dans la section suivante.

42.2 Disjonction de cas

Proposition Soient A, B et C trois assertions. Alors $\Big((A \vee B) \Rightarrow C\Big) \Leftrightarrow \Big((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)\Big)$.

Cette proposition fonde le raisonnement par disjonction de cas : pour prouver une implication, on peut démontrer plusieurs implications en distinguant selon plusieurs cas possibles. La proposition se restreint à 2 cas possibles, mais elle reste vraie pour plus de cas.

Revenons à l'exemple de la colinéarité de vecteurs. On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ non nuls de $\mathbb{R}^2$, et on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ leurs coordonnées respectives dans un repère orthonormé. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$, donc tel que $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$. Dans ce cas, on a

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - x'y = \lambda xy - \lambda xy = 0$$

Réciproquement, supposons que $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$, donc que $xy' = x'y$. On raisonne maintenant par disjonction de cas :

- ❖ Si $x' = 0$, alors $xy' = 0$. Comme $\overrightarrow{v}$ est non nul, $y' \neq 0$. Ainsi, $x = 0$, et comme $\overrightarrow{u}$ est non nul, $y \neq 0$. On a alors $y' = \frac{y'}{y} \times y$, et $0 = \frac{y'}{y} \times 0$, donc $\overrightarrow{v} = \frac{y'}{y} \cdot \overrightarrow{u}$. Les vecteurs sont donc colinéaires.
- ❖ Si $y' = 0$, on montre de la même façon que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
- ❖ Sinon, on a $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$. L'égalité $xy' = x'y$ peut alors se réécrire $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$. Dans ce cas, si l'on note λ ce rapport, on a bien $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$ et les vecteurs sont bien colinéaires.

On a examiné tous les cas de figures possibles, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont toujours colinéaires.

Remarque On voit que l'on a d'ailleurs raisonné par double implication plutôt que par équivalence, et pour cause les deux sens du raisonnement sont radicalement différents.

Exercice Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Démontrer que p^2-1 est un multiple de 24.

Commençons par remarquer que $p^2-1=(p-1)(p+1)$. On va montrer que p^2-1 est divisible par 3 et 8 : comme 3 et 8 sont premiers entre eux, cela montrera que p^2-1 est divisible par $3\times 8=24$. On commence par examiner le reste de p modulo 3 :

- Si $p\equiv 0\ (3)$, comme p est premier, nécessairement $p=3$. Or, $p>5$, donc ce cas est impossible.
- Si $p\equiv 1\ (3)$, alors $p-1$ est un multiple de 3, donc p^2-1 aussi.
- Si $p\equiv 2\ (3)$, alors $p+1$ est un multiple de 3, donc p^2-1 aussi.

Dans tous les cas possibles, p^2-1 est un multiple de 3. On fait de même avec les restes modulo 4 :

- Comme p est premier et impair, il n'est ni congru à 0 ni à 2 modulo 4.
- Si $p\equiv 1\ (4)$, alors $p-1$ est un multiple de 4 et $p+1$ est un multiple de 2, donc p^2-1 est un multiple de 8.
- Si $p\equiv 3\ (4)$, alors $p+1$ est un multiple de 4 et $p-1$ est un multiple de 2, donc p^2-1 est un multiple de 8.

Dans tous les cas, p^2-1 est un multiple de 8, ce qui achève la preuve.

42.3 Analyse-Synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse est utilisé typiquement pour décrire l'ensemble des solutions d'un problème. La phase d'analyse consiste à considérer une solution du problème et à montrer qu'elle fait partie d'un certain ensemble (qui est censé être l'ensemble des solutions). La phase de synthèse consiste à montrer que tout élément de ce potentiel ensemble des solutions est effectivement une solution du problème. En ce sens, l'analyse revient à chercher des conditions nécessaires, et la synthèse à chercher des conditions suffisantes.

Il peut être interprété comme un raisonnement par double implication, pour démontrer qu'un objet est solution si et seulement si il fait partie d'un certain ensemble. Voyons deux exemples.

Les problèmes de lieu sont des problèmes que l'on résout très souvent par analyse-synthèse. Ils consistent à décrire le lieu géométrique des points vérifiant une certaine condition. La phase d'analyse consiste alors à considérer un point "solution" et à montrer qu'il fait partie d'un certain ensemble, et la phase de synthèse consiste à justifier que tous les points de cet ensemble vérifient la condition voulue. C'est un type de problème pour lequel un logiciel de géométrie dynamique est très utile pour conjecturer une solution.

Exercice Donner le lieu géométrique des points du plan de coordonnées $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$, avec $t\in\mathbb{R}$.

Avec un logiciel de géométrie dynamique, il semble que ce lieu soit le cercle unité $\mathcal{C}$, centré en $(0,0)$ et de rayon 1.

Analyse :

Soit $t \in \mathbb{R}$. On vérifie que le point de coordonnées $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ appartient bien à ce cercle.

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2)^2} = 1$$

Ce point appartient donc bien à $\mathcal{C}$.

Synthèse :

On montre maintenant que tout point du cercle est bien de cette forme. Pour cela, on va repérer tout point de ce cercle par son angle θ avec l'axe Ox, de sorte que ses coordonnées soient $\Big(\cos(\theta), \sin(\theta)\Big)$. On va maintenant effectuer le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, qui est valable pour tous les points du cercle sauf $(-1, 0)$ (nous traiterons ce cas à part). On commence par remarquer que

$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \times \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right)}{1 + \cos\left(2 \times \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

avec $\cos(\theta) \neq -1$, car on exclut le point $(-1, 0)$. On a alors d'une part

$$\begin{aligned}
\frac{1-t^2}{1+t^2} &= \left(1 - \frac{\sin^2(\theta)}{\Big(1+\cos(\theta)\Big)^2}\right) \times \left(1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\Big(1+\cos(\theta)\Big)^2}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1+\cos^2(\theta)+2\cos(\theta)-\sin^2(\theta)}{\Big(1+\cos(\theta)\Big)^2}\right) \times \left(\frac{\Big(1+\cos(\theta)\Big)^2}{1+\cos^2(\theta)+2\cos(\theta)+\sin^2(\theta)}\right) \\
&= \frac{2\cos(\theta)+2\cos^2(\theta)}{2+2\cos(\theta)} \\
\frac{1-t^2}{1+t^2} &= \cos(\theta)
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{2t}{1+t^2} &= \frac{2\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} \times \left(1 + \frac{\sin^2(\theta)}{\Big(1+\cos(\theta)\Big)^2}\right)^{-1} \\
&= \frac{2\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} \times \left(\frac{\Big(1+\cos(\theta)\Big)^2}{1+\cos^2(\theta)+2\cos(\theta)+\sin^2(\theta)}\right) \\
&= \frac{2\sin(\theta)\Big(1+\cos(\theta)\Big)}{2+2\cos(\theta)} \\
\frac{2t}{1+t^2} &= \sin(\theta)
\end{aligned}$$

Ce point $\Big(\cos(\theta), \sin(\theta)\Big)$ s'écrit donc bien sous la forme voulue.

Il reste à examiner le point $(-1, 0)$. Si un tel point est de la forme $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$, alors nécessairement $\frac{1-t^2}{1+t^2} = -1$, donc $1 - t^2 = -1 - t^2$ et $1 = -1$. Ce point est donc à exclure du cercle. Cela n'invalide pas la partie "Analyse", donc le lieu géométrique recherché n'est pas le cercle $\mathcal{C}$ tout entier comme le logiciel de géométrie dynamique pouvait le laisser croire, mais ce cercle privé de $(-1, 0)$.

Remarque Cette (presque) paramétrisation du cercle, en tout cas du cosinus et du sinus par la tangente de l'angle moitié est particulièrement utile en calcul intégral : elle fournit un changement de variable qui amène souvent à des formes plus simples.

On peut d'ailleurs déduire de ce que l'on a démontré que $\tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$ pour $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 1$.

Donnons maintenant un second exemple dans un autre cadre : celui des équations différentielles. En effet, la démonstration du théorème sur la forme des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène et à coefficients constants se fait par analyse-synthèse. Rappelons ce résultat ainsi que sa preuve.

Théorème Les solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{-ax}$, où C est un réel.

Démonstration

Commençons par vérifier que les fonctions de cette forme sont effectivement des solutions de l'équation homogène. Soit C un réel. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et de dérivée : $x \mapsto -aCe^{-ax}$.
Pour tout $x \in I$, on a :

$$-aCe^{-ax} + a \times Ce^{-ax} = 0$$

Ainsi, les fonctions de cette forme sont bien solutions de l'équation homogène.

Maintenant, démontrons que toute solution de l'équation homogène s'écrit sous cette forme. Soit f une solution (sur $\mathbb{R}$) de l'équation $y' + ay = 0$. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)e^{ax}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} \\ &= -af(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} \quad \text{car } f \text{ est solution de } y' + ay = 0 \\ g'(x) &= 0 \end{aligned}$$

g' est nulle sur $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle), donc g est constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)e^{ax} = C$, ie $f(x) = Ce^{-ax}$. f est donc bien de la forme recherchée.

◈

42.4 Par l'absurde et contre-exemple

Le raisonnement par l'absurde peut être vu comme une forme de raisonnement par contraposée. On considère une assertion A, et l'on veut montrer qu'elle est vraie. On cherche alors une seconde assertion B, que l'on sait fausse, et l'on prouve que $\neg A \Rightarrow B$. La contraposée de cette implication est $\neg B \Rightarrow A$, et est alors vraie. Comme B est fausse, $\neg B$ est vraie et par conséquent A est vraie.

Lors d'une preuve par l'absurde, on commence par supposer que l'assertion à démontrer est fausse. On montre ensuite que cela implique une seconde assertion que l'on sait être fausse.

Voyons trois exemples assez classiques de raisonnement par l'absurde que l'on peut mener au lycée.

Irrationnalité de $\sqrt{2}$:

On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls premiers entre eux p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On en déduit que $2 = \frac{p^2}{q^2}$ puis que $2q^2 = p^2$. Ainsi, p^2 est pair, donc p est aussi pair. On peut alors écrire $p = 2k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne $2q^2 = (2k)^2$ et $q^2 = 2k^2$. q^2 est alors pair, donc q aussi. p et q sont tous les deux pairs, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux. Par l'absurde, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Remarque Cette preuve est la preuve "uselle" de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. Comme de nombreuses autres, elle utilise certains arguments d'arithmétique. Voici une autre preuve qui utilise des arguments d'analyse cette fois.

On procède encore par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ s'écrit $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On sait que $1 < \sqrt{2} < 2$, donc $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$. Ainsi, la suite géométrique $\left((\sqrt{2}-1)^n\right)_n$ converge vers 0. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par la formule du binôme de Newton :

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0,\ k \text{ pair}}^{n} \binom{n}{k} 2^{\frac{k}{2}} (-1)^{n-k} + \sqrt{2} \sum_{k=0,\ k \text{ impair}}^{n} \binom{n}{k} 2^{\frac{k-1}{2}} (-1)^{n-k}$$

Ainsi, $(\sqrt{2}-1)^n$ est de la forme $u_n + v_n\sqrt{2}$, où $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont des suites d'entiers. En utilisant l'hypothèse $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(\sqrt{2}-1)^n = u_n + v_n \frac{p}{q} = \frac{u_n q + v_n p}{q}$$

On a $\sqrt{2} - 1 > 0$, donc $u_n q + v_n p > 0$. Comme ce numérateur est un entier, il est supérieur ou égal à 1, d'où $(\sqrt{2}-1)^n \geq \frac{1}{q}$. Or, cela contredit le fait que $(\sqrt{2}-1)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $\sqrt{2}$ est nécessairement irrationnel.

Nombres premiers :

La preuve classique de l'existence d'une infinité de nombres premiers (due à Euclide) se formule également par l'absurde.

Supposons qu'il existe un nombre fini $s \in \mathbb{N}^*$ de nombres premiers, que l'on notera $p_1, \ldots, p_s$. On considère l'entier $N = p_1 \times \ldots \times p_s + 1$. Le plus petit nombre premier étant 2, N est strictement supérieur à tous les nombres premiers $p_1, \ldots, p_s$, donc il n'est pas premier. Il admet donc un diviseur premier p_i parmi $p_1, \ldots, p_s$. Ainsi, p_i divise $N - p_1 \times \ldots \times p_s = 1$, ce qui impliquerait que $p_i = 1$, ce qui est impossible. N serait donc à la fois premier et non premier, ce qui est absurde.

Théorème du toit :

Le théorème du toit est un résultat de géométrie dans l'espace vu au lycée, dont la démonstration suit un raisonnement par l'absurde. Rappelons le theorème et sa preuve.

Théorème (Théorème du toit) Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ deux plans sécants, et soient $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}'$ deux droites parallèles. Alors l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est une droite parallèle à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Démonstration *On note $\mathcal{D}''$ l'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.*
Supposons par l'absurde que $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles. On note $\mathcal{P}''$ le plan contenant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (qui existe car ces droites sont parallèles). Comme $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{D}$ sont coplanaires et non parallèles, elles admettent un point d'intersection I.
Celui-ci est alors un point de $\mathcal{D}''$, donc il est dans les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Il est également dans $\mathcal{D}$, donc il est dans le plan $\mathcal{P}''$. Ainsi, I appartient à l'intersection des plans $\mathcal{P}''$ et $\mathcal{P}'$, c'est-à-dire $\mathcal{D}'$. Dans ce cas, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un point en commun, ce qui contredit le fait qu'elles sont parallèles. ◈

Abordons maintenant la notion de contre-exemple. Lorsque l'on veut démontrer qu'une assertion portant sur un ensemble d'objets est fausse, on peut exhiber un exemple d'un tel objet pour lequel l'assertion est fausse. Cet objet porte alors le nom de contre-exemple.

Formellement, cela se fonde sur le fait que la négation d'une assertion de la forme "$\forall x \in E,\ P(x)$" est "$\exists x \in E,\ \neg P(x)$".

Exemple Pour n un entier naturel, n^2+n+41 est-il toujours premier ? En testant pour des petits entiers naturels, le résultat semble vrai. Pourtant, pour n =41, le résultat est clairement faux puisque le nombre obtenu est alors un multiple de 41. En réalité, ce résultat est vrai jusqu'à n =39, puis devient faux pour n =40.

42.5 Raisonnement par récurrence

Théorème (Principe de récurrence)(admis) Soient n_0 un entier, et $P(n)$ une assertion dépendant d'un entier $n \geq n_0$. Si :

- ❖ L'assertion $P(n_0)$ est vraie ;
- ❖ Pour tout $k \geq n_0$, l'assertion $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ est vraie (on dit qu'elle est héréditaire) ;

alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

La preuve de $P(n_0)$ s'appelle **l'initialisitation**, et la preuve de $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour $n \geq n_0$ s'appelle **l'hérédité**. Formellement, dans l'hérédité, il faut démontrer une implication. Au lycée, on montre seulement que si $P(k)$ est vraie, alors $P(k+1)$ est vraie, sans prendre en compte le cas où $P(k)$ est fausse. Dans ce second cas, l'implication est automatiquement vraie, indépendamment de la valeur de vérité de $P(k+1)$. L'hypothèse "$P(k)$ vraie" dans l'étape d'hérédité est appelée hypothèse de récurrence.

La rédaction d'un raisonnement par récurrence est précise, et fait souvent l'objet d'erreurs. Donnons un exemple concret.

Exemple Démontrons par récurrence l'inégalité de Bernouilli : $\forall x > -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx$.
Soit $x > -1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ la propriété : "$(1+x)^n \geq 1+nx$". Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- ❖ **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $1+0\times x = 1$ et $(1+x)^0 = 1$, donc on a bien $(1+x)^0 \geq 1+0\times x$. $P(0)$ est donc vraie.
- ❖ **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons que $P(k)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)\times(1+x)^k \\ &\geq (1+x)(1+kx) \quad \text{par hypothèse de récurrence, et car } x > -1 \\ &\geq 1+kx+x+kx^2 \\ &\geq 1+(k+1)x+kx^2 \\ (1+x)^{k+1} &\geq 1+(k+1)x \quad \text{car } k \geq 0 \text{ et } x^2 \geq 0\end{aligned}$$

$P(k+1)$ est alors vraie. La propriété est donc héréditaire pour $k \geq 0$.

- ❖ **Conclusion :** La propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire pour $n \geq 0$, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

Remarques ❖ Dans l'étape d'hérédité, il est très important de supposer la propriété vraie pour un certain k fixé, et pas pour tout k. En effet, il est absurde de supposer ce que l'on veut démontrer.

❖ Très souvent, l'hérédité est bien plus ardue à démontrer que l'initialisation. Toutefois, l'initialisation est aussi importante que l'hérédité. Par exemple, la propriété "pour $n \in \mathbb{N}$, $10^n + 1$ est un multiple de 9" est héréditaire pour $n \in \mathbb{N}$, mais n'est jamais vraie.

Exemple L'étude de suites récurrentes fait intervenir plusieurs raisonnements par récurrence : majoration/minoration de la suite, sens de variation, par exemple.

La récurrence double est un raisonnement analogue au raisonnement par récurrence présenté ici. On initialise la propriété sur deux valeurs consécutives n_0 et $n_0 + 1$, et on démontre que pour tout $k \geq n_0$, $\Big(P(k) \wedge P(k+1)\Big) \Rightarrow P(k+2)$.

De la même manière, on peut faire des récurrences triples, et des récurrences fortes, en montrant que si $P(m)$ est vraie pour tout $n_0 \leq m \leq n$, alors $P(n+1)$ est vraie.

Exemple L'étude de suites récurrentes linéaires d'ordre 2 fait souvent intervenir des récurrences doubles, puisque l'on dispose d'une relation de récurrence d'ordre 2.

Voyons un autre exemple pour lequel un raisonnement par récurrence double semble moins intuitif.

Exercice Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

❖ **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$. Le cas $n = 1$ est l'hypothèse de départ sur x. Pour $n = 2$, on remarque que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$$

Ainsi, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \in \mathbb{Z}$.

❖ **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque et fixé. Supposons que $x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$ et $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \in \mathbb{Z}$. Alors le réel $\left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$ est entier. Or

$$\left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}} + x^k + \frac{1}{x^k}$$

Comme $x^k + \frac{1}{x^k}$ est entier, il en est de même de $x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}}$. Les réels $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$ et $x^{k+2} + \frac{1}{x^{k+2}}$ sont donc entiers, et la propriété est héréditaire.

❖ **Conclusion :** La propriété est vraie pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, et héréditaire pour $n \geq 0$, donc par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque On peut toujours écrire une récurrence double, triple ou forte comme une récurrence simple. Il suffit pour cela de modifier la propriété à démontrer. Si l'on dispose d'une propriété $P(n)$ à démontrer pour $n \geq n_0$, plutôt que de la démontrer par une récurrence double, triple ou forte, on peut démontrer la propriété $Q(n)$: "$P(n)$ vraie et $P(n+1)$ vraie" (pour une récurrence double) par une récurrence simple. Ainsi, si l'on montre que $Q(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, au l'aura aussi montré pour $P(n)$. Le même principe s'applique pour des récurrences triples ou fortes.

43 Exemples d'approches historiques de notions mathématiques enseignées au collège, au lycée

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** variable selon les exemples

43.1 Systèmes de numération

Notre système de numération actuel est un système de numération positionnel : chaque chiffre se voit attribué une valeur selon sa position dans le nombre. Le système décimal actuel est notamment dû au mathématicien (entre autres) Simon Stevin.

Il présente en 1585 un ouvrage du nom de *De Thiende* (en français *La Disme*) une écriture des nombres sur la base de la numération décimale, comme nous la connaissons aujourd'hui. Les chiffres (pour les positions inférieures ou égales à l'unité) sont associés à un numéro qui indique leur valeur : $\textcircled{0}$ pour les unités, $\textcircled{1}$ pour les dixièmes, $\textcircled{2}$ pour les centièmes, et ainsi de suite. Par exemple, dans ce système, le nombre $30,278$ s'écrit :

$$30\,\textcircled{0}\,2\,\textcircled{1}\,7\,\textcircled{2}\,8\,\textcircled{3}$$

La virgule de séparation entre partie entière et partie décimale n'apparaîtra que plus tard, apportée semble-t-il par John Napier.

Cette notation n'est pas aussi pratique que celle utilisée aujourd'hui, et est bien moins compacte. Néanmoins, elle présente au moins deux énormes avantages :

- Contrairement à la numération romaine, elle permet d'écrire n'importe quel nombre à partir d'un nombre fini de symboles (les dix chiffres).
- Elle facilite grandement les opérations et la perception des nombres. Par exemple, il parait clair que $1\ 000\ 000 - 1 = 999\ 999$ grâce à cette écriture, ce qui paraîtrait bien moins évident avec l'écriture romaine par exemple !

Néanmoins, ce système n'est pas le premier système de numération positionnel de l'Histoire. On peut notamment penser au système Babylonien. Ce système peut être qualifié de système "sexagésimal", dans le sens où il présente "60 chiffres". Quelques subtilités existent :

- Le 0 n'existe pas dans cette numération (son apparition est d'ailleurs une des révolutions de l'Histoire des mathématiques).

❖ L'écriture des chiffres de 1 à 59 se fait sur à partir d'un système additif semblable à notre système décimal : un clou pour une unité et un chevron pour une dizaine. Ainsi, chaque chiffre de 1 à 59 s'écrit avec un certain nombres de clous et de chevrons.

On retrouve d'ailleurs encore des traces de ce système dans les mathématiques actuelles, avec les degrés d'angles et les unités de durées.

Remarque Ce système en base 60 s'avère en réalité extrêmement utile pour écrire les nombres (en tout cas en théorie), puisque 60 admet un grand nombre de diviseur : dans un tel système, l'écriture "sexagésimale" de $\frac{1}{3}$ est finie !
Seul bémol : il faut retenir 60 chiffres pour pouvoir écrire les nombres !

Ce type de système de numération positionnel existe en réalité pour n'importe quelle base $b \in \mathbb{N}^*$. On dispose alors de b chiffres, et les positions de ces chiffres se rapportent aux différentes puissances de b. Tout nombre s'écrit alors sous la forme

$$x = \sum_{k=-p}^{q} a_k b^k$$

où $p, q \geq 0$ et où les a_k sont des entiers compris entre 0 et $b-1$. Chacun de ces chiffres a_k peut alors s'obtenir par des divisions euclidiennes.

On peut par exemple noter que les ordinateurs comptent en binaire, donc en base 2 : chaque nombre ne s'écrit qu'avec les chiffres 0 et 1. Par exemple, en base 2

$$\overline{1101001}_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 105$$

On peut proposer un algorithme de changement de base, qui change l'écriture d'un nombre d'une base à une autre, en se basant sur des divisions euclidienne successives :

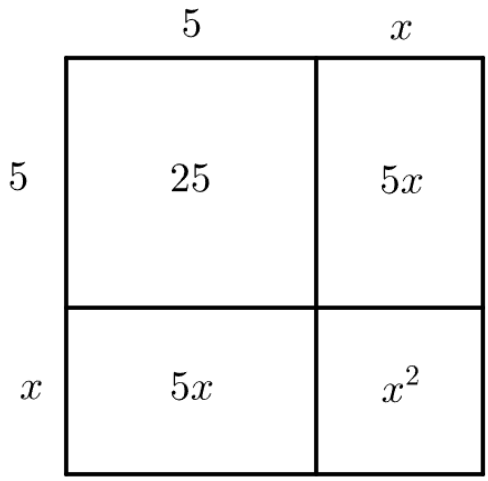
```
def base_b_vers_base_c(N,b,c):
    S=0
    k=0
    Q=N
    while Q>0:
        R=Q%c
        S=S+R*(b**k)
        k=k+1
        Q=(Q-R)/c
    return(int(S))
```

43.2 Équations du second degré

Bien que ce type de problème soit étudié depuis de nombreuses années, le premier mathématicien à avoir étudié de manière systématique les équations du second degré est le persan Al-Khwârizmî, au IXe siècle, dans son *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*.

Il distingue 6 types d'équations du second degré, et s'appuie sur des représentations géométriques pour les résoudre.

Prenons l'exemple suivant : $x^2 + 10x = 39$. En reconnaissant dans $x^2 + 10x$ le début d'un carré, on construit la figure suivante :



On interprète les termes x^2 et $5x$ comme des aires de carré et de rectangle, ce qui forme un "L". On cherche ensuite à compléter le carré : pour cela on ajoute un carré d'aire 25.

L'aire totale du carré est alors $39 + 25 = 64$, ce qui correspond au carré de $x + 5$. $x + 5$ vaut alors 8 ou -8, ce qui donne les deux solutions : 3 et -13.

Cette méthode de complétion du carré revient en réalité à interpréter le membre $ax^2 + bx$ comme le début du développement du carré $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, et à le compléter. C'est une méthode qui n'est pas réellement étudiée en France, bien qu'elle le soit dans d'autres pays. Néanmoins, c'est exactement ce procédé que l'on suit pour déterminer la forme canonique d'un trinôme !

Remarque Ce traité de mathématiques est considéré comme l'un des premiers manuels d'algèbre, et pour cause, il est l'un des premiers à faire apparaître des symboles pour représenter des inconnues, ce qui est le coeur de l'algèbre.

Le mot "algèbre" découle lui-même du terme *al-jabr* repris du titre arabe de ce traité. Ce principe appelé *al-jabr* est celui d'ajouter ou de retrancher la même quantité à des quantités égales, tâche habituelle en algèbre.

L'usage fréquent de la lettre x pour représenter des inconnues est dû à Descartes, qui simplifie le mot *xay*, transcription en lettre latines du mot *shay* utilisé par Al-Khârizmî pour désigner l'inconnue, "la chose".

Le nom d'Al-Khwârizmî a également inspiré le mot "algorithme", en lien avec ses méthodes de résolution d'équation.

43.3 Logarithmes

La notion de logarithmes est aujourd'hui présentée soit en tant que réciproques de fonctions exponentielles, soit en tant que primitives de fonctions inverses (ce qui est équivalent). Toutefois, l'invention historique des logarithmes a été motivée par un autre problème.

Les logarithmes ont en effet une propriété de morphisme de transformer les produit en somme : $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. Cette correspondance entre un monde "additif" et un monde "multiplicatif" est connu des mathématiciens depuis des siècles, mais le premier à en avoir fait l'étude systématique est l'écossais John Napier, dans sa publication de 1614 intitulée *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*.

L'apport de Napier est une vision continue entre une progression arithmétique et une progression géométrique des nombres. Ses travaux sont poursuivis par Edward Wright les années suivantes, si bien que c'est lui qui établit les premières tables de logarithmes, qui donnent des correspondances entre le monde "multiplicatif" et le monde "additif".

Ces logarithmes sont particulièrement utiles dans de nombreux domaines ou des calculs lourds sont à effectuer. Pour multiplier deux nombres, on cherche leurs logarithmes, et on les additionne, puis on cherche le nombre correspondant par "l'antilogarithme".

C'est à Wright que l'on doit le nom de "logarithme", qui vient de "logos" (*rapport*) et "arithmos" (*nombre*).

Ces travaux sont également poursuivis par l'anglais Henry Briggs, de qui on tient un algorithme permettant d'approcher le logarithme d'un nombre. Prenons l'exemple du logarithme en base 10 de 2.

On commence par encadrer 2 entre deux puissances de 10 : $1 \leq 2 \leq 10$. Ainsi, $\log_{10}(1) \leq \log_{10}(2) \leq \log_{10}(10)$, donc $0 \leq \log_{10}(2) \leq 1$.

Maintenant, si l'on connaît un encadrement de la forme $10^k \leq 2^{10} \leq 10^{k+1}$, on a alors $k \leq 10\log_{10}(2) \leq k+1$, donc

$$\frac{k}{10} \leq \log_{10}(2) \leq \frac{k+1}{10}$$

En continuant ainsi avec 2^{100}, 2^{1000}, ... , on peut obtenir des approximations décimales de $\log_{10}(2)$.

43.4 Nombres complexes

On cherche à résoudre une équation de degré 3 de la forme $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Le changement de variables $x = y - \frac{b}{3a}$ permet d'annuler le terme de degré 2, et d'obtenir une équation de la forme :

$$y^3 + py + q = 0$$

avec p, q réels.

Nous n'allons pas donner une méthode générale, bien que ce soit possible, mais nous allons étudier le cas particulier :

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

C'est avec cet exemple, et à travers la méthode de Cardan (que nous utiliserons ici), que l'italien Bombelli traite pour la première fois de nombres dont le carré est négatif, et qui deviendront les nombres imaginaires purs.

On cherche une solution x sous la forme $x = u + v$, avec u et v des complexes éventuellement. Bien que cela puisse paraître contre-intuitif de passer d'une inconnue à deux, cela va permettre plus tard de fixer une condition de notre choix. On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} x^3 - 15x - 4 = 0 &\Leftrightarrow (u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv - 15)(u+v) - 4 = 0 \end{aligned}$$

Le fait de passer d'une inconnue x à deux inconnues u et v nous permet d'imposer en plus la condition $uv = 5$, c'est-à-dire $3uv - 15 = 0$. Cela donne alors l'équation :

$$u^3 + v^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow u^3 + \left(\frac{5}{u}\right)^3 - 4 = 0 \Leftrightarrow u^6 - 4u^3 + 125 = 0$$

Ainsi, u^3 est solution de $X^2-4X+125=0$. Il en est de même pour v^3 par symétrie. Cette équation a pour discriminant

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times125=16-500=-484<0$$

ce qui laisse présager que l'équation initiale n'admet pas de solution réelle. Or, on peut vérifier que 4 en est bien une solution.

C'est à ce moment que l'on introduit les nombres complexes. C'est ce que fait Bombelli en introduisant une quantité $\sqrt{-121}$, qui est en fait $i\sqrt{121}=11i$. L'équation $X^2-4X+125=0$ admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{4-22i}{2}=2-11i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{4+22i}{2}=2+11i$$

On peut alors remarquer que

$$(2+i)^3=2^3+3\times2^2\times i+3\times2\times i^2+i^3=8-6+i(12-1)=2+11i$$

et de même $(2-i)^3=2-11i$. Les nombres $u=2+i$ et $v=2-i$ conviennent donc, ce qui donne $x=u+v=4$, qui est bien la solution que l'on connaissait.

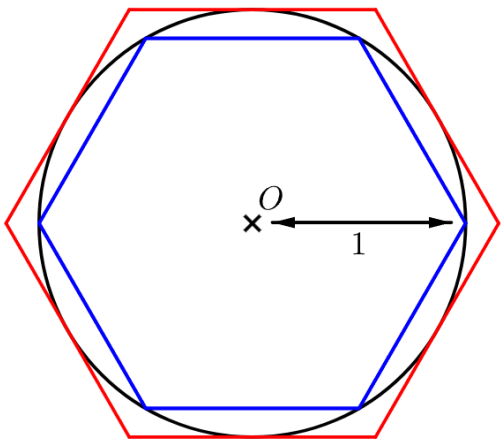
Cette méthode, appliquée à toute équation de la forme $x^3+px+q=0$, permet de trouver une solution. On peut alors factoriser l'expression et se ramener à une équation de degré 2.

43.5 Géométrie

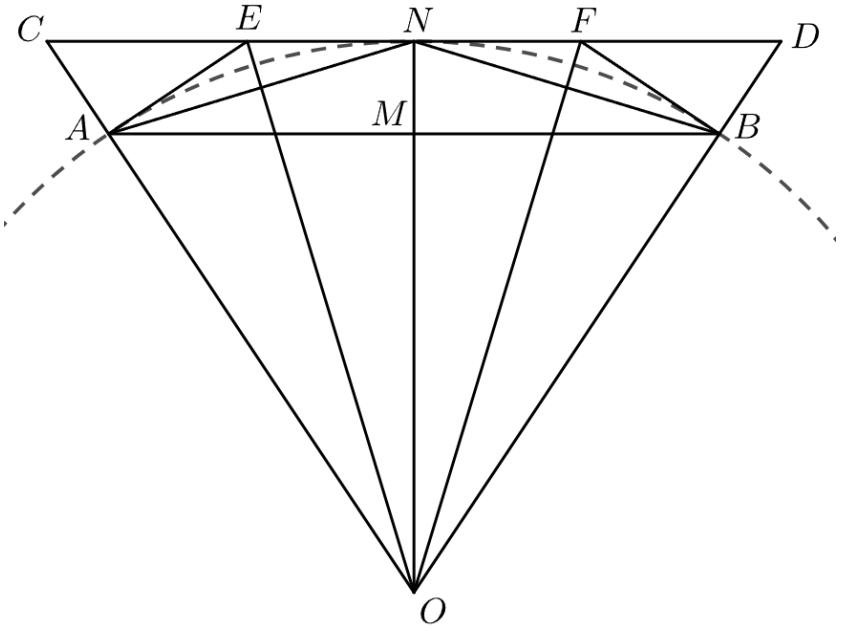
Autour de 250 avant J.-C., Archimède propose une méthode pour approximer le nombre π. Pour cela, il considère un cercle de rayon 1, ainsi qu'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le disque, et un régulier à n côtés circonscrit au cercle.

Il encadre alors le périmètre du cercle par les périmètres des deux polygones. En doublant successivement le nombre de côtés des polygones, on obtient une approximation du périmètre du cercle, qui vaut 2π . Développons cette méthode.

On considère un cercle de centre O et de rayon 1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère deux polygones réguliers convexes à n côtés : l'un inscrit dans le cercle, et l'autre circonscrit au cercle. On note respectivement p_n et P_n leur périmètre, et c_n et C_n leur côté. On va déterminer une relation de récurrence reliant $(p_{2n})_n$ et $(P_{2n})_n$ à $(p_n)_n$ et $(P_n)_n$.



On dispose les deux polygones de façon à aligner deux à deux leurs sommets avec O. On s'intéresse alors au triangle formé par deux rayons "successifs" du cercle, reliant O à deux sommets consécutifs des polygones. On obtient la figure suivante, sur laquelle A et B sont deux sommets consécutifs du polygone intérieur, C et D sont deux sommets consécutifs du polygone extérieur. On a alors $A \in [OC]$, $B \in [OD]$, $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n}$, $AB = c_n$ et $CD = C_n$. On remarque également que $[CD]$ est tangent au cercle.



On appelle M et N les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$. On a alors $(ON) \perp (CD)$. Comme $OA = OB$ et $OC = OD$, avec $A \in [OC]$ et $B \in [OD]$, par la réciproque du théorème de Thalès dans les triangles OAB et OCD, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Les triangles OAB et OCD sont isocèles en O et partagent le même angle principal, donc ont la même médiane issue de O (qui est la bissectrice de $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$). Cette médiane est alors la médiatrice de $[AB]$ et $[CD]$, donc O, M et N sont alignés et $(AB) \perp (ON)$.

On trace maintenant les tangentes au cercle en A et B : elles coupent toutes deux $[CD]$ en E et F respectivement. Les triangles OAE et ONE sont rectangles en A et N, et vérifient $OA = ON = 1$ et $OE = OE$. Ces triangles sont donc égaux, et ainsi $AE = EN$. En procédant de même de l'autre côté de la figure, on obtient que $BF = NF$. En reproduisant cette construction sur les deux polygones en entier, on remarque alors que $AN = BN = c_{2n}$ et $EF = C_{2n}$.

Les triangles ONC et EAC sont rectangles en N et en A, et partagent l'angle $\widehat{ECA} = \widehat{OCN}$, donc ils sont semblables. Par conséquent,

$$\frac{ON}{OC} = \frac{AE}{CE} = \frac{EN}{CN - EN} = \frac{\frac{EF}{2}}{\frac{CD}{2} - \frac{EF}{2}} = \frac{C_{2n}}{C_n - C_{2n}}$$

D'autre part, comme (AM) est parallèle à (CN), on a par le théorème de Thalès dans les triangles OMA et ONC :

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AM}{CN} = \frac{\frac{AB}{2}}{\frac{CD}{2}} = \frac{AB}{CD}$$

En utilisant le fait que $OA = ON$, on obtient que

$$\frac{ON}{OC} = \frac{OA}{OC} = \frac{c_n}{C_n}$$

Il suit alors que

$$\frac{C_{2n}}{C_n - C_{2n}} = \frac{c_n}{C_n} \Rightarrow C_n C_{2n} = c_n C_n - c_n C_{2n} \Rightarrow C_{2n} = \frac{c_n C_n}{c_n + C_n}$$

Cela donne une relation de récurrence entre $(C_{2n})_n$ et les suites $(c_n)_n$ et $(C_n)_n$.

D'autre part, les droites (AB) et (CD) sont parallèles, donc les angles alternes-internes $\widehat{BAN}$ et $\widehat{ANE}$ sont égaux. Les triangles isocèles ANE et ANB ont alors les mêmes angles à la base, donc sont semblables. Ainsi

$$\frac{AN}{AB} = \frac{EN}{AN} \Rightarrow AN^2 = EN \times AB \Rightarrow {c_{2n}}^2 = \frac{1}{2} \times C_{2n} \times c_n$$

On dispose maintenant de relations de récurrence entre $(c_{2n})_n$, $(C_{2n})_n$ et $(c_n)_n$, $(C_n)_n$. Maintenant, $p_n = nc_n$ et $P_n = nC_n$, donc on peut en déduire les relations de récurrence sur les périmètres :

$$P_{2n} = 2n \times C_{2n} = 2n \times \frac{c_n C_n}{c_n + C_n} = 2 \times \frac{n \times n}{n} \times \frac{c_n C_n}{c_n + C_n} = 2\frac{p_n P_n}{p_n + P_n}$$

et

$${p_{2n}}^2 = (2n \times c_{2n})^2 = 4n^2 \times \frac{1}{2} \times C_{2n} \times c_n = P_{2n} \times p_n$$

donc

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$$

On obtient alors les relations suivantes :

$$\boxed{P_{2n} = 2\frac{p_n P_n}{p_n + P_n}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}}$$

Remarque Ces expressions font apparaître P_{2n} comme la moyenne harmonique de p_n et P_n, et p_{2n} comme la moyenne géométrique de p_n et P_{2n}.

Commençons par p_6 et P_6. Si l'on reprend la figure précédente, on a alors $\widehat{AOB} = 60°$, donc le triangle isocèle AOB est équilatéral. Ainsi, $c_6 = AB = OA = 1$. De même, le triangle OCD est équilatéral, donc par le théorème de Pythagore dans le triangle ONC, on a

$$OC^2 = ON^2 + NC^2 \Rightarrow {C_6}^2 = 1^2 + \left(\frac{C_6}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4}C_6^2 = 1 \Rightarrow C_6^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow C_6 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

On en déduit que

$$p_6 = 6 \times c_6 = 6 \qquad \text{et} \qquad P_6 = 6 \times C_6 = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

Cela donne maintenant :

$$P_{12} = 2\frac{p_6 P_6}{p_6 + P_6} = 2 \times \frac{6 \times 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}}$$

On peut alors procéder de proche en proche, et calculer p_{12}, p_{24}, P_{24}, et ainsi de suite.

C'est cette méthode qu'a suivi Archimède pour calculer p_{96} et P_{96}. En utilisant des approximations rationnelles de racines carrées, il arrive alors à l'approximation suivante :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

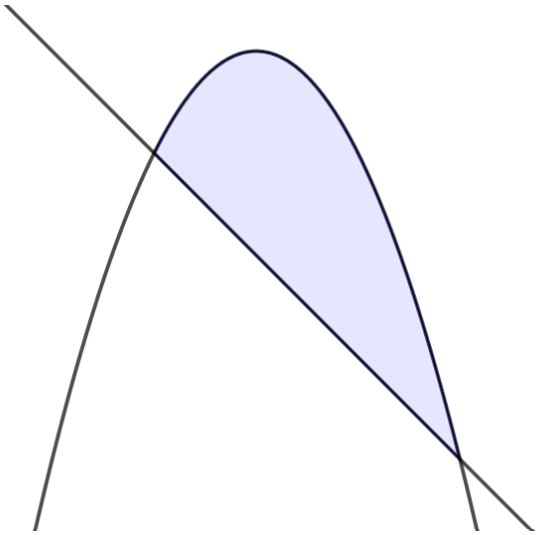
ce qui donne environ

$$3,1408 < \pi < 3,1429$$

donc une précision de l'ordre du centième.

Remarques
- ❖ On peut obtenir une expression explicite de p_n et P_n, mais cela requiert l'utilisation de fonctions trigonométriques, ce qui n'est pas satisfaisant pour approximer π.
- ❖ Il reste une faille dans le raisonnement : a priori, rien ne garantit que les périmètres p_n et P_n convergent bel et bien vers le périmètre du cercle. C'est en réalité dû à la convexité des figures considérées. Les expressions trigonométriques de p_n et P_n ont l'avantage de permettre de justifier cette convergence.
- ❖ Ces fonctions trigonométriques n'étant pas connues d'Archimède, c'est bien cette méthode récursive qui a été utilisée. Il faut tout de même pouvoir calculer des racines carrées, mais des algorithmes permettant ces calculs étaient déjà connus à l'époque (on peut par exemple penser à la méthode de Héron, qui a aussi travaillé sur l'approximation de π par la méthode d'Archimède).
- ❖ On peut utiliser un autre argument pour approcher π avec cette construction en considérant non pas les périmètres des figures, mais leurs aires. Dans ce cas, le convergence se justifie plus naturellement. Toutefois, ce n'est pas la méthode qu'a utilisé Archimède.

Un second exemple est celui de la quadrature d'une parabole, autrement dit le calcul de l'aire du domaine situé entre une parabole et une droite.



C'est un problème traité par Archimède et Pascal notamment, par des méthodes géométriques. Le calcul intégral permet de répondre à la question facilement.

On choisit comme origine du repère le sommet de la parabole, et définit l'axe Oy comme l'axe de symétrie de la parabole. On complète ensuite le repère orthonormé, de façon que la parabole soit la courbe représentative de $x \mapsto -x^2$. On suppose que la droite coupe la parabole en deux points de coordonnées $(a, -a^2)$ et $(b, -b^2)$. Alors celle-ci a pour équation

$$y = \frac{-b^2 - (-a^2)}{b - a}(x - a) - a^2 \Leftrightarrow y = -(a + b)(x - a) - a^2$$

L'aire du domaine est alors donné par l'intégrale :

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b \Big(-x^2 + (a+b)(x-a) + a^2 \Big) dx \\
&= \int_a^b \Big(-x^2 + (a+b)x - ab \Big) dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + (a+b)\frac{x^2}{2} - abx \right]_a^b \\
&= -\frac{b^3}{3} + (a+b)\frac{b^2}{2} - ab^2 + \frac{a^3}{3} - (a+b)\frac{a^2}{2} + a^2 b \\
&= \frac{1}{6}\Big(-2b^2 + 3ab^2 + 3b^3 - 6ab^2 + 2a^3 - 3a^3 - 3a^2 b + 6a^2 b \Big) \\
&= \frac{1}{6}\Big(b^3 - a^3 - 3ab^2 + 3a^2 b \Big) \\
\boxed{I &= \frac{(b-a)^3}{6}}
\end{aligned}$$

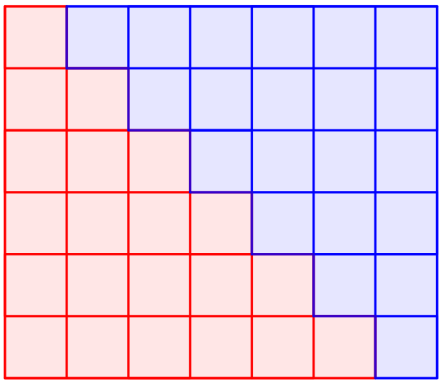
Remarque Le calcul intégral n'était connu ni d'Archimède, ni de Pascal. Cependant, les méthodes qu'ils ont utilisé préfigurent les méthodes de calcul infinitésimal développées par Newton et Leibniz, qui sont elles-même des précurseurs du calcul intégral.

43.6 Sommes

Voici une légende bien connue sur le mathématicien Carl Friedrich Gauss. Alors âgé de 7 ans, il aurait calculé très rapidement la somme des entiers de 1 à 100, surprenant ainsi son instituteur, qui pensait tenir un problème qui allait occuper sa classe un bon moment. Gauss procède de la façon suivante : il considère le double de la somme et regroupe les termes deux à deux, dans l'ordre croissant de la première somme et dans l'ordre décroissant de la seconde.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & + & 2 & + & \ldots & + & 99 & + & 100 \\
100 & + & 99 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Ainsi, le double de la somme vaut $100 \times 101 = 10\ 100$, donc cette somme vaut $5\ 050$. On peut illustrer ce procédé de la façon suivante. La somme $1 + \ldots + 100$ peut être vue comme le nombre de carrés dans un "escalier". En considérant deux de ces "escaliers", on peut alors former un rectangle, dont l'aire (c'est-à-dire le nombre de carrés le composant) est plus facile à calculer.



On peut généraliser ce procédé à tout suite arithmétique $(u_n)_n$ de raison $r \in \mathbb{R}$. Soient $p \geq q$ deux entiers

naturels. Si l'on note $S = \sum_{k=q}^{p} u_k$, alors

$$\begin{aligned}
2S &= 2\sum_{k=q}^{p} u_k \\
&= \sum_{k=q}^{p} u_k + \sum_{k=q}^{p} u_k \\
&= \sum_{k=0}^{p-q} u_{q+k} + \sum_{k=0}^{p-q} u_{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p-q} (u_{q+k} + u_{p-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{p-q} (u_q + rk + u_p - rk) \\
&= \sum_{k=0}^{p-q} (u_q + u_p) \\
2S &= (p-q+1)(u_q + u_p)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$S = (p-q+1)\frac{u_q + u_p}{2}$$

Donnons maintenant un dernier problème historique de somme : le paradoxe d'Achille et de la tortue. C'est un paradoxe énoncé par Zénon de la façon suivante.

Le héros Achille fait la course avec une tortue. Il court deux fois plus vite que la tortue, mais lui a laissé une certaine longueur d'avance. Le bon sens voudrait qu'Achille rattrape la tortue, puisqu'il est plus rapide. Seulement, lorsqu'il aura parcouru la distance le séparant de la tortue, celle-ci aura avancé de la moitié de la distance initiale. Achille va ensuite parcourir cette seconde distance, mais la tortue aura encore avancé de la moitié de cette distance, et ainsi de suite. Il semble donc qu'Achille ne va jamais atteindre la tortue.

On peut "résoudre" ce paradoxe de la façon suivante. Si l'on considère que le temps que met Achille à rejoindre la position initiale de la tortue est une unité de temps, au bout de n étapes, le temps total de course sera :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On peut calculer explicitement cette somme, qui est la somme des termes d'un suite géométrique :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Le temps total est la limite de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $(S_n)_n$ converge vers 2.

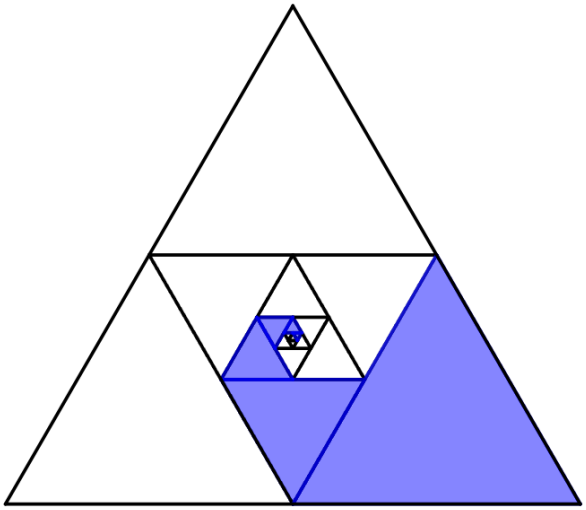
Ce paradoxe n'en est donc pas un. Il provient en réalité d'une différence de vision, entre un aspect "continu" du mouvement qui pousse à croire qu'Achille va rattraper la tortue, et un aspect "discret" qui laisse penser que ce n'est pas le cas. Le fait que l'on additionne une infinité de durées amène à penser que ce temps est infini. Or, comme on vient de le démontrer par le calcul, ce n'est pas le cas, d'où la semblable contradiction.

On peut d'ailleurs généraliser le résultat sur cette somme à d'autres fractions. On considère un entier $N \geq 2$ quelconque. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{N}\right)^k = \frac{1}{N} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{N}\right)^n}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{1}{N} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{N}\right)^n}{\frac{N-1}{N}} = \frac{1}{N-1} \times \left(1 - \left(\frac{1}{N}\right)^n\right)$$

Comme $N \geq 2$, on a $-1 < \frac{1}{N} < 1$, donc cette somme tend vers $\frac{1}{N-1}$.

On peut illustrer cette égalité de manière géométrique dans le cas $N = 4$. On considère un triangle équilatéral d'aire 1, on place les milieux de ses trois côtés, puis on les relie pour former 4 triangles équilatéraux égaux, qui sont chacun une réduction à l'échelle $\frac{1}{4}$ du triangle initial. On colorie alors un des triangles "extérieurs" du découpage, qui a pour aire $\frac{1}{4}$. En procédant de même avec le triangle central, on colorie un triangle d'aire $\left(\frac{1}{4}\right)^2$. En continuant ainsi, on obtient une partie coloriée du triangle équilatéral dont l'aire est $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k$. On remarque alors que cette partie coloriée représente $\frac{1}{3}$ de l'aire du triangle initial, d'où $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{3}$.



Remarque Cette construction peut se généraliser à d'autres polygones réguliers (on forme aussi des triangles en reliant les milieux des côtés du polygone, ce qui reforme un polygone régulier), ce qui illustre à chaque fois une série géométrique $\sum_{k \geq 1} q^k$. La somme de cette série est alors $\frac{1}{n}$, où n est le nombre de côtés du polygone. Cependant, il semble que le triangle équilatéral est le seul polygone régulier pour lequel la raison q est de la forme $\frac{1}{N}$.

44 Application des mathématiques à d'autres disciplines

- **Niveau :** transversal
- **Pré-requis :** variable selon les applications

44.1 Fonctions

Les fonctions sont des outils de modélisation puissants. Naturellement, elles apparaissent souvent dans des applications des mathématiques à d'autres domaines.

44.1.1 Équations différentielles

On rappelle la définition et le théorème suivants :

Définition Une équation différentielle est une équation fonctionnelle (dont l'inconnue est donc une fonction) qui relie la fonction à ses dérivées successives.
L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre maximal de dérivation qui intervient dans l'équation.

Proposition Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$, $a \neq 0$, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto Ce^{-ax} + \frac{b}{a}$, où C est un réel.

Démonstration
On commence par remarquer que la fonction constante égale à $\frac{b}{a}$ est une solution particulière de cette équation.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } y' + ay = b &\Leftrightarrow f' + af = b \\ &\Leftrightarrow f' + af - b = 0 \\ &\Leftrightarrow f' + a\left(f - \frac{b}{a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(f - \frac{b}{a}\right)' + a\left(f - \frac{b}{a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow f - \frac{b}{a} \text{ est solution de } y' + ay = 0 \end{aligned}$$

On se ramène donc à résoudre $y' + ay = 0$.

Pour tout réel C, on remarque que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ce^{-ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $x \mapsto -aCe^{-ax}$. Ainsi, cette fonction est solution de l'équation $y' + ay = 0$.
Réciproquement, montrons que toute solution de cette équation est de cette forme. Soit f une solution de $y' + ay = 0$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = f(x)e^{ax}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$g'(x) = f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} = \Big(f'(x) + af(x)\Big)e^{ax} = 0$$

Ainsi, g est constante. Il existe donc un réel C tel que pour tout réel x :

$$g(x) = C \Rightarrow f(x) = Ce^{-ax}$$

◈

Les notions de dérivée et de dérivée seconde représentent respectivement la "vitesse" et "l'accélération" de la croissance d'une fonction. Dans de nombreux problèmes, certaines hypothèses induisent qu'une fonction donnée vérifie une certaine équation différentielle. Savoir les résoudre peut alors permettre de déterminer la fonction en question. Voyons quelques exemples d'applications à la physique.

Corps en chute libre :

Un corps en chute libre est un corps sur lequel la seule force qui s'applique est la pesanteur. Dans ce cas, si l'on note x sa position, v sa vitesse et a son accélération en fonction du temps, la deuxième loi de Newton assure que

$$\forall t \geq 0, a(t) = -g$$

où g est l'accélération du champ de pesanteur terrestre (constante). On en déduit que

$$\forall t \geq 0, v(t) = v(0) - gt$$

puis

$$\forall t \geq 0, x(t) = x(0) + v(0)t - g\frac{t^2}{2}$$

ce qui décrit le mouvement de ce corps.

Loi de décroissance radioactive :

On considère un isotope radioactif, et l'on s'intéresse au nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs à un instant $t \geq 0$.

Des hypothèses sur la probabilité qu'un noyau radioactif se désintègre mènent à modéliser une petite variation dN du nombre de noyaux radioactifs au cours d'un petit temps dt comme étant proportionnel à N. Il existe alors un réel λ positif tel que

$$-dN = \lambda N dt$$

car N décroît.

Pour des quantités dN et dt infinitésimales, cela revient à modéliser l'évolution de N par l'équation différentielle :

$$N'(t) + \lambda N(t) = 0$$

Les solutions sont alors de la forme

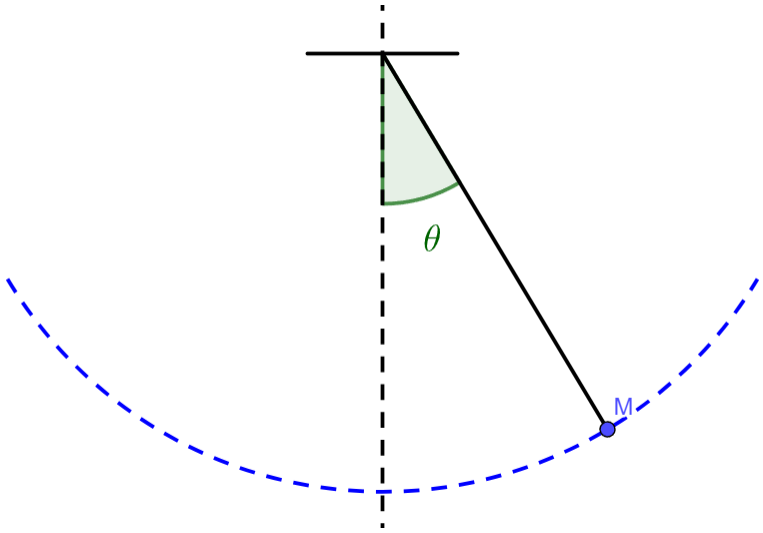
$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

On appelle cette loi d'évolution une loi de décroissance exponentielle.

L'une des applications concrètes de l'estimation par cette loi du nombre de noyaux radioactifs est la datation au carbone 14 : c'est un isotope radioactif du carbone présent dans tout organisme vivant, et dont la proportion reste constante tant que l'organisme est en vie, puis décroît ensuite. Connaître cette proportion peut alors permettre de dater d'anciens organismes vivants.

Pendule simple :

On appelle pendule simple une masse ponctuelle M à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L. On détermine la position de la masse par l'angle θ entre le fil et la verticale.



Dans un repère judicieusement choisi, les coordonnées de $M(t)$ sont

$$x(t) = L\Big(1 - \cos(\theta(t))\Big),\ y(t) = L\sin(\theta(t))$$

Alors

$$x'(t) = L\theta'(t)\sin(\theta(t)),\ y'(t) = L\theta'(t)\cos(\theta(t))$$

On a alors par le théorème de Pythagore :

$$v(t)^2 = x'(t)^2 + y'(t)^2 = L^2\theta'(t)^2$$

L'énergie mécanique du pendule est alors

$$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2}Mv(t)^2 + MgLx(t) = \frac{1}{2}ML^2\theta'(t)^2 + MgL\Big(1 - \cos(\theta(t))\Big)$$

Celle-ci est constante, donc sa dérivée est nulle :

$$E_m'(t) = ML^2\theta'(t)\theta''(t) + MgL\theta'(t)\sin(\theta(t)) = 0$$

$\theta' = 0$ donne une solution triviale : le pendule est à l'équilibre. Sinon, θ vérifie :

$$\theta'' + \omega^2\sin(\theta) = 0$$

avec $\omega = \frac{g}{L}$.

Cette équation différentielle d'ordre 2 n'est pas linéaire. Cependant, l'approximation linéaire du sinus en 0 nous permet d'approcher, pour des petites oscillations, $\sin(\theta)$ par θ :

$$\theta'' + \omega^2\theta = 0$$

On montre alors que la solution est

$$\theta(t) = \theta(0)\sin(\omega t)$$

44.1.2 Systèmes différentiels

On appelle système différentiel un système d'équations différentielles couplées, c'est-à-dire telles que dans chacune d'entre elle apparaissent plusieurs inconnues. On ne va pas étudier précisément ces systèmes, mais uniquement un exemple.

Modèle de Lotka-Volterra :

Lorsque l'on étudie l'évolution des populations d'une proie et d'un prédateur dans un milieu, on dispose de deux grandeurs qui sont chacune dépendantes de l'autre. Le modèle de Lotka-Volterra est un modèle mathématique de ce type d'évolution. Il modélise les populations x et y de proies et de prédateurs comme vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = y(t)(dx(t) - c) \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des coefficients réels.

L'étude complète de ce type de système est particulièrement complexe, puisque celui-ci n'est pas linéaire. On peut toutefois étudier les équilibres possibles, c'est-à-dire les situations où les dérivées sont toutes les deux nulles.

$$\begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(dx - c) = 0 \end{cases}$$

On a alors deux équilibres possibles :

- $x = 0$, $y = 0$, qui correspond à une extinction des deux populations.
- $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, qui correspond à un état où les deux populations restent stables, sans s'éteindre.

Modèle de Verhulst :

On étudie une population N, et l'on modélise son évolution par l'équation différentielle suivante, dite équation logistique :

$$N'(t) = aN(t)(1 - bN(t))$$

avec a, b des réels strictement positifs.

Celle-ci n'est pas linéaire, mais le changement de variable $M = \frac{1}{N}$ (qui exclut la solution triviale $N = 0$) donne

$$\frac{-M'(t)}{M(t)^2} = \frac{a}{M(t)}\left(1 - \frac{b}{M(t)}\right) \Rightarrow -M'(t) = aM(t) + ab$$

Cette équation nous donne

$$M(t) = b + (M(0) - b)e^{-at}$$

puis

$$N(t) = \frac{N(0)}{bN(0)\Big(1 - bN(0)\Big)e^{-at}}$$

44.2 Suites

Les suites sont un analogue discret des fonctions. Elles servent régulièrement à modéliser des phénomènes discrets. Tout comme les équations et systèmes différentiels décrivent des évolutions continues, certaines relations de récurrence décrivent des évolutions discètes.

Modèle de Lotka-Volterra :

Ce modèle continu admet une analogue discret : $x_{n+1} = x_n(a - by_n)$ et $y_{n+1} = y_n(dx_n - c)$. Les états d'équilibres sont alors identiques.

Modèle de Verhulst :

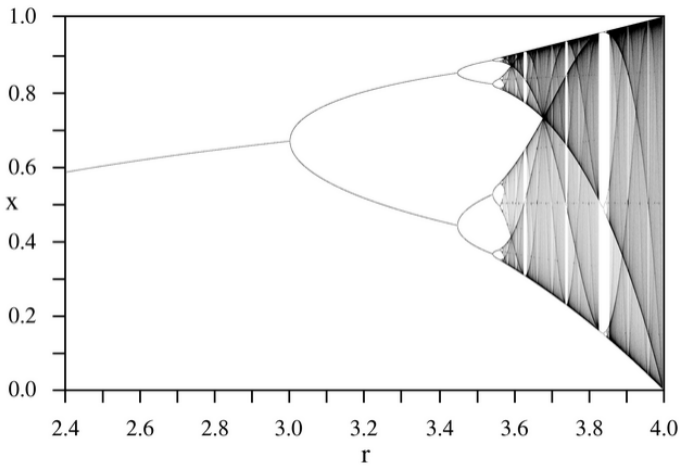
Le modèle de Verhulst a aussi son penchant discret, qui modélise une population par une suite récurrente d'ordre 1 définie par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n(1-bu_n)$, avec a, b deux réels positifs. Développons un exemple.

On considère une certaine population dont le nombre d'individus est majoré par un réel positif M. On note alors u_n la proportion de ce nombre d'individus par rapport à son maximum M après un temps n, de sorte que $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le réel $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est alors le taux d'évolution de cette population. Le modèle d'évolution de Verhulst consiste à supposer que ce taux est proportionnel à $1 - u_n$. Il existe alors un réel positif a tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = a(1 - u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} = au_n(1 - u_n)$, ce qui est une suite logistique.

Sans donner de justifications, on peut étudier le comportement de cette suite pour plusieurs valeurs de a.

- Pour $a \in [0, 1]$, (u_n) converge vers 0.
- Pour $a \in [1, 3]$, (u_n) converge vers $\frac{a-1}{a}$.
- Pour $a \in]3, \sim 3,57[$, la suite (u_n) oscille entre 2, 4, 8, ... valeurs (les puissances de 2) au fur et à mesure que a se rapproche de 3,57 environ.
- Pour $a \in [\sim 3,57, 4]$, le comportement de la suite (u_n) est chaotique : elle n'oscille pas entre un nombre fini de valeurs, sauf pour quelques valeurs de a, dans certains intervalles.

On représente cela dans un diagramme de bifurcation. En abscisse, on fait figurer le paramètre a (ici noté r), et en ordonnée les valeurs autour desquelles la suite oscille (plus précisément, les valeurs d'adhérences de la suite).



https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_logistique

44.3 Géométrie

Par nature même, la géométrie permet de modéliser de nombreuses situations.

44.3.1 Triangulation GPS

Le principe de localisation de la triangulation GPS est le suivant : 3 satellites mesurent leur distance avec un objet sur Terre, et cela suffit à donner sa position. On présente comment ce principe fonctionne.

Premièrement, dire qu'un objet est à une certaine distance d'un satellite revient à dire qu'il est sur une sphère de rayon cette distance et de centre le satellite. On doit donc justifier que 3 sphères suffisent.

On considère une sphère S de centre O et de rayon R, et une sphère S' de centre $(0,0,d)$ de rayon R', avec $d>0$. Ainsi, elles ont pour équations :

$$S : x^2+y^2+z^2=R^2$$
$$S' : (x-d)^2+y^2+z^2=R'^2$$

On cherche alors un point $M(x,y,z)$ appartenant au deux sphères, donc vérifiant ces deux équations. Alors

$$x^2-(x-d)^2=R^2-R'^2 \Rightarrow d(2x-d)=(R+R')(R-R') \Rightarrow x=\frac{1}{2d}((R+R')(R-R')-d)$$

L'intersection des deux sphères est alors leur coupe par ce plan. En injectant cela dans l'une des deux équations de sphères, on obtient alors une équation de cercle (à condition d'avoir un rayon positif).

Cela justifie que lorsque deux satellites donnent chacun une distance, on peut situer l'objet sur un cercle. Lorsque l'on rajoute une troisième distance, cela revient à considérer l'intersection d'un cercle par une sphère, qui est alors un couple de points. Cela ne donne pas une position unique, et pour cause, on dispose en réalité d'une, quatrième information : l'objet est sur Terre, donc sur une quatrième sphère. Cela donne alors une seule position.

44.3.2 Format de papier A

Pour des raisons pratiques, le format de papier A est tel que lorsque l'on partage une feuille en deux parallèlement à la largeur, on obtient deux rectangles de même format. Pour une longueur L et une largeur l, ce format est donné par le rapport $\frac{L}{l}$. Celui doit alors vérifier :

$$\frac{L}{l}=\frac{l}{\frac{L}{2}} \Leftrightarrow \frac{L^2}{l^2}=2$$

Le rapport entre longueur et largeur doit alors être $\sqrt{2}$.

Le format $A0$ est celui d'une feuille de rapport $\sqrt{2}$, et de surface 1m^2. La longueur la largeur doivent donc être $\sqrt[4]{2}$ et $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

44.4 Arithmétique

Chiffrement de Hill :

Il est bien sûr possible de simplement coder un message par un décalage dans l'alphabet. Cependant, il n'est alors pas compliqué de décoder un message sans connaître le décalage. Pour cela, le chiffrement de Hill effectue des "décalages" par blocs.

On choisit un entier m (la taille des blocs). On transforme chaque lettre en un nombre entre 0 et 25 en suivant l'alphabet, on regroupe les nombres par paquets de m : $x_1, \dots, x_m$. On applique ensuite la transformation :

$$Y = AX$$

où $Y = (y_1 \dots y_m)$, $X = (x_1 \dots x_m)$ et A une matrice de taille $m \times m$ de coefficients à choisir. On considère alors les restes des y_i modulo 26, puis on traduit cela en lettres. La clé est alors la donnée de m et de A.

Chiffrement RSA :

Cette méthode de chiffrement, contrairement à celle de Hill, est asymétrique : les clés de chiffrement et de déchiffrement sont différentes. On procède comme suit :

- On choisit deux entiers premiers distincts p et q.
- On calcule $n = pq$.
- On calcule $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$, qui est l'indicatrice d'Euler de n.
- On choisit un entier e premier avec $\varphi(n)$, qui lui est inférieur, appelé exposant de chiffrement.
- On calcule l'entier d, inverse de e modulo $\varphi(n)$, c'est-à-dire un entier naturel inférieur à $\varphi(n)$ tel que $ed \equiv 1\ [\varphi(n)]$. On appelle d l'exposant de déchiffrement.

Si un message à coder est représenté par un entier M, alors son code C est tel que

$$C \equiv M^e\ [n]$$

Pour déchiffrer C, on retrouve M par

$$M \equiv C^d\ [n]$$

Ainsi, coder un message demande de connaître n et e, qui forment la clé publique, alors que en décoder un demande n et d, d'où l'asymétrie.

La justification se base sur le petit théorème de Fermat, et nous ne rentrerons pas dans les détails.

Ce système de chiffrement est aujourd'hui beaucoup utilisé car très robuste. En effet, connaître la clé publique à partir de la clé privée demande de calculer d, ce qui se fait par l'algorithme d'Euclide étendu. Or, pour cela, il faut connaître $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$, donc p et q, en ne connaissant que n : il faut donc factoriser n.

Les entiers p et q sont choisis de sorte à être très grands (et à vérifier d'autres propriétés également, que nous ne détaillerons pas). Cela permet de calculer facilement n en connaissant p et q, alors que l'inverse est alors très compliqué.