

❖ Généralités sur les suites ❖

I - Notion de suite numérique

Définition

Une **suite numérique** est une fonction $u : n \mapsto u(n)$ définie pour tout entier naturel n .
Les images $u(n)$ sont appelées les **termes** de la suite. On peut aussi les noter u_n .
Les entiers naturels n sont appelés les **indices**, ou les **rangs** des termes.
La suite u peut aussi se noter $(u(n))$ ou (u_n) .

Remarque

Attention à ne pas confondre les notations :

- ❖ $u(n)$ ou u_n désigne le terme de rang n : il s'agit d'un nombre.
- ❖ $(u(n))$ ou (u_n) désigne toute la suite.

❖ Formule explicite

Considérons la suite $(u(n))$ définie pour tout entier naturel n par

$$u(n) = 6 - n^2$$

Cette définition est **explicite** : on peut calculer $u(n)$ directement à partir de n .

$$\begin{aligned} \rightarrow u(0) &= 6 - 0^2 = 6 \\ \rightarrow u(1) &= 6 - 1^2 = 5 \\ \rightarrow u(2) &= 6 - 2^2 = 2 \\ \rightarrow u(3) &= 6 - 3^2 = -3 \end{aligned}$$

❖ Formule de récurrence

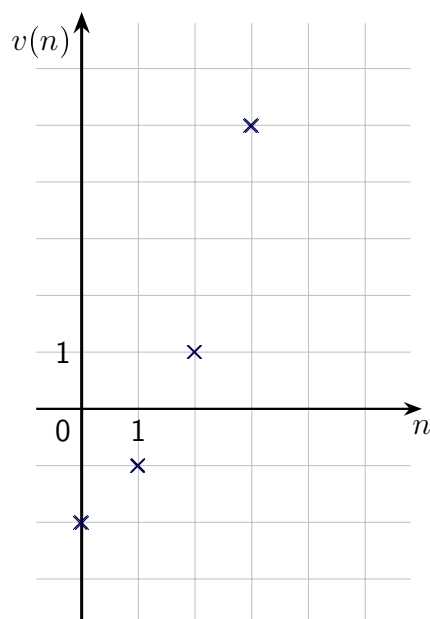
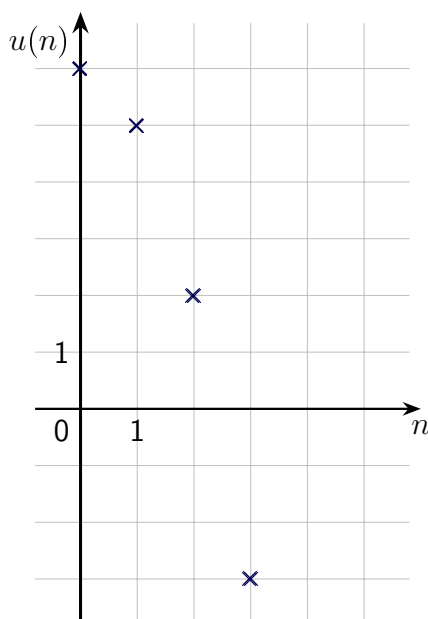
Soit $(v(n))$ la suite définie par $v(0) = -2$ et pour tout entier naturel n par

$$v(n+1) = 2v(n) + 3$$

Cette fois, on ne peut calculer un terme qu'en connaissant le précédent : la suite est définie **par récurrence**.

$$\begin{aligned} \rightarrow v(1) &= 2v(0) + 3 = 2 \times (-2) + 3 = -1 \\ \rightarrow v(2) &= 2v(1) + 3 = 2 \times (-1) + 3 = 1 \\ \rightarrow v(3) &= 2v(2) + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5 \end{aligned}$$

On peut représenter graphiquement une suite $(u(n))$ dans un repère orthonormé par le nuage de points de coordonnées $(n; u(n))$.



Exercice 1

Soit $(u(n))$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u(n) = 2^n - n^2$. Soit $(v(n))$ la suite définie par $v(0) = 0$ et pour tout entier naturel n par $v(n+1) = 1 - 2v(n)$.

1. Calculer les cinq premiers termes des suites $(u(n))$ et $(v(n))$.
2. Voici l'extrait d'une feuille de calcul utilisée pour calculer les termes de la suite $(v(n))$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	0	1	2	3	4	5	6
2	$v(n)$	2						

Quelle formule peut-on rentrer dans la cellule C2 avant de l'étirer vers la droite ?

3. Représenter graphiquement les suites $(u(n))$ et $(v(n))$ dans un repère orthonormé.

Solution

1.

Pour la suite $(u(n))$:

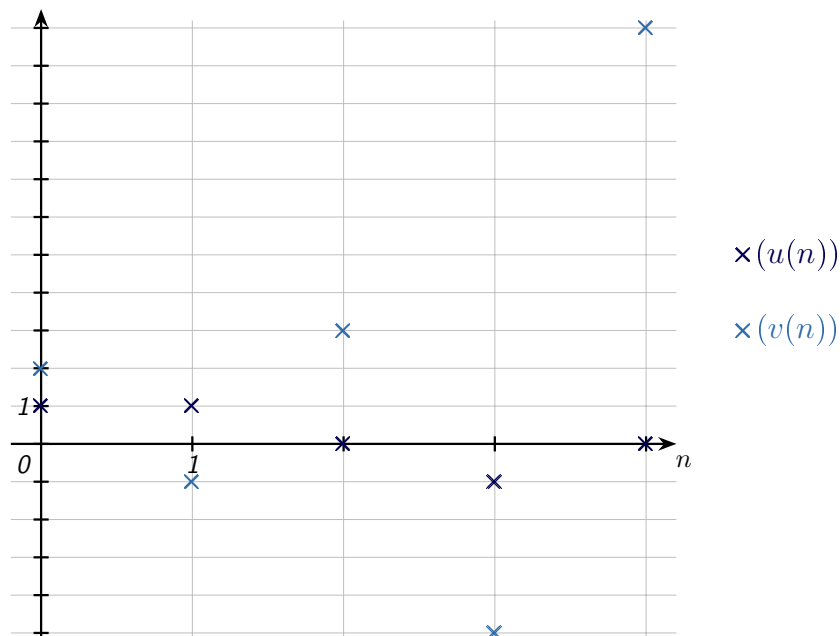
$$\begin{aligned}\rightarrow u(0) &= 2^0 - 0^2 = 1 \\ \rightarrow u(1) &= 2^1 - 1^2 = 1 \\ \rightarrow u(2) &= 2^2 - 2^2 = 0 \\ \rightarrow u(3) &= 2^3 - 3^2 = -1 \\ \rightarrow u(4) &= 2^4 - 4^2 = 0\end{aligned}$$

Pour la suite $(v(n))$:

$$\begin{aligned}\rightarrow v(0) &= 2 \\ \rightarrow v(1) &= 1 - 2v(0) = 1 - 2 \times 0 = -1 \\ \rightarrow v(2) &= 1 - 2v(1) = 1 - 2 \times (-1) = 3 \\ \rightarrow v(3) &= 1 - 2v(2) = 1 - 2 \times 3 = -5 \\ \rightarrow v(4) &= 1 - 2v(3) = 1 - 2 \times (-5) = 11\end{aligned}$$

2. On peut rentrer la formule : " $=1-2*B2$ ".

3.



II - Sens de variation

Définition

Soit $(u(n))$ une suite.

- ❖ Cette suite est **croissante** si pour tout entier naturel n , on a $u(n+1) \geq u(n)$.
- ❖ Cette suite est **décroissante** si pour tout entier naturel n , on a $u(n+1) \leq u(n)$.

On dit qu'elle est **strictement croissante**, ou **strictement décroissante**, lorsque les inégalités sont strictes.

Exemples

- ❖ Considérons la suite $(u(n))$ définie par $u(0) = 5$ et pour tout entier naturel n par $u(n+1) = u(n) - 2$. Pour tout entier naturel n , on a

$$u(n+1) - u(n) = u(n) - 2 - u(n) = -2 < 0$$

donc la suite $(u(n))$ est strictement décroissante.

- ❖ Soit $(v(n))$ la suite définie pour tout entier naturel n par $v(n) = 2n^2 - n$.

Pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned} v(n+1) - v(n) &= 2(n+1)^2 - (n+1) - (2n^2 - n) \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - n - 1 - 2n^2 + n \\ &= 4n + 1 > 0 \end{aligned}$$

donc la suite $(v(n))$ est strictement croissante.

Exercice 2

Le compte épargne d'Alice offre des intérêts à hauteur de 3 % par an. Les frais de tenue de compte s'élèvent à 5 € par an. Alice décide de placer 1000 € sur ce compte épargne. Pour tout entier naturel n , on note $u(n)$ le montant sur ce compte épargne après n années.

1. Que vaut $u(0)$? Calculer $u(1)$.
2. Pour tout entier naturel n , trouver une relation de récurrence entre $u(n+1)$ et $u(n)$.
3. Calculer $u(2)$, $u(3)$ et $u(4)$. Arrondir au centime près.
4. Représenter graphiquement la suite $(u(n))$ dans un repère orthonormé.
5. Quel semble être le sens de variation de la suite $(u(n))$?

Solution

1. $u(0) = 1000$ puisqu'il s'agit du montant initial sur le compte d'Alice.

$$1000 \times 1,03 = 1030 \text{ et } 1030 - 5 = 1025$$

Après 1 an, Alice possède 1025 €, donc $u(1) = 1025$.

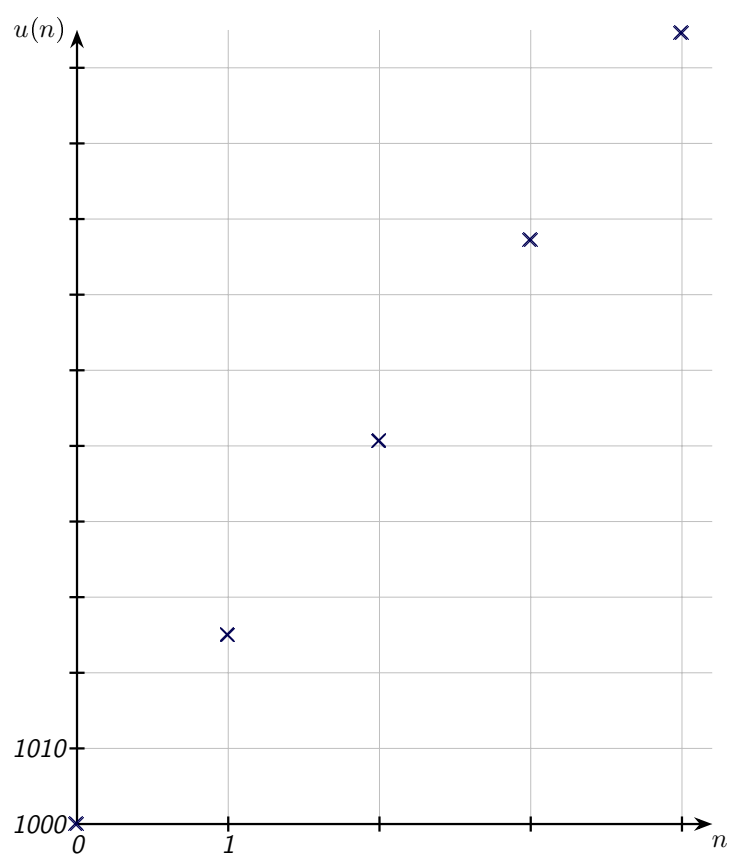
2. Pour tout entier naturel n , on a $u(n+1) = 1,03u(n) - 5$.

3. $u(2) = 1,03u(1) - 5 = 1,03 \times 1025 - 5 = 1050,75$

$$u(3) = 1,03u(2) - 5 = 1,03 \times 1050,75 - 5 \approx 1077,27$$

$$u(4) = 1,03u(3) - 5 = 1,03 \times 1077,27 - 5 \approx 1104,59$$

4.



5. La suite $(u(n))$ semble être strictement croissante.

