

❖ Généralités sur les fonctions ❖

I - Notion de fonction

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$. Une **fonction** f est définie sur $\mathcal{D}$ en associant à chaque nombre $x \in \mathcal{D}$ un unique nombre réel $f(x)$.

- ❖ $\mathcal{D}$ est l'**ensemble de définition** de f .
- ❖ Le réel $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f .
- ❖ Le réel x est un **antécédent** de $f(x)$ par la fonction f .

On note alors :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Exercice 1

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes.

$$\underline{1.} \ f(x) = \frac{5-x}{2x-3} \quad \underline{2.} \ g(x) = 3x^2 - 4x + 2 \quad \underline{3.} \ h(x) = \sqrt{5x-2}$$

Solution

1. La seule valeur de x pour laquelle $f(x)$ n'a pas de sens est celle qui vérifie $2x-3=0$.

$$2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

L'ensemble de définition de f est donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\} = \left] -\infty; \frac{3}{2} \right[\cup \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$.

2. Pour tout nombre réel x , on peut calculer $g(x)$, donc l'ensemble de définition de g est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

3. Pour un nombre réel x , on ne peut calculer $h(x)$ que si $5x-2 \geq 0$.

$$5x-2 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{5}$$

L'ensemble de définition de h est donc $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{5}; +\infty \right[$.

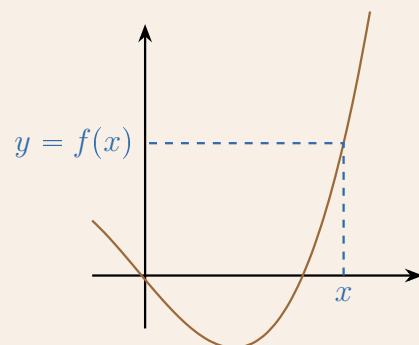


Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

On appelle **graphe** de la fonction f , ou **courbe représentative** de f , l'ensemble $\mathcal{C}_f$ des points de coordonnées $(x; y)$ telles que $y = f(x)$.

La condition $y = f(x)$ s'appelle l'**équation de la courbe** $\mathcal{C}_f$.



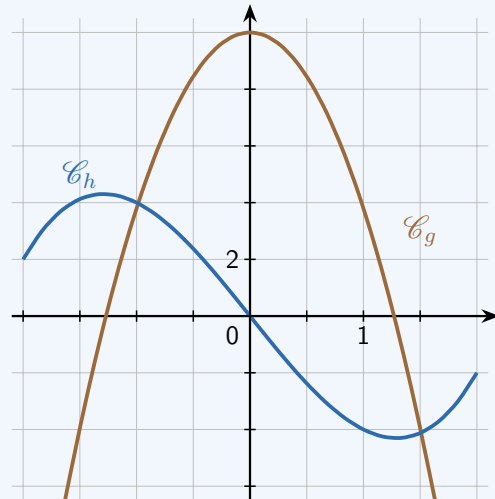
Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 4$.
2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 2$.

On a tracé ci-contre les représentations graphiques de deux fonctions g et h définies sur l'intervalle $[-2; 2]$.

3. Résoudre l'équation $g(x) = 4$.
4. Résoudre l'inéquation $g(x) < h(x)$.



Solution

1. $f(x) = 4 \Leftrightarrow 5 - 3x = 4 \Leftrightarrow -3x = -9 \Leftrightarrow x = 3$
L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 4$ est donc $\mathcal{S} = \{3\}$.
2. $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow 5 - 3x \geq 2 \Leftrightarrow -3x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 1$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 2$ est donc $\mathcal{S} =]-\infty; 1]$.
3. Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 4$ est $\mathcal{S} = \{-1; 1\}$.
4. Graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) < h(x)$ est $\mathcal{S} = [-2; 1[\cup]1; 5; 2]$.



II - Signe d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$.

1. f est dite **positive** sur $\mathcal{D}$ si pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $f(x) \geq 0$.
2. f est dite **négative** sur $\mathcal{D}$ si pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $f(x) \leq 0$.
3. f est dite **strictement positive** sur $\mathcal{D}$ si pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $f(x) > 0$.
4. f est dite **strictement négative** sur $\mathcal{D}$ si pour tout $x \in \mathcal{D}$ on a $f(x) < 0$.

Exemple

On étudie le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 7)(5x + 2)$.

On commence par étudier le signe de $x - 7$ et de $5x + 2$.

$$x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 7$$

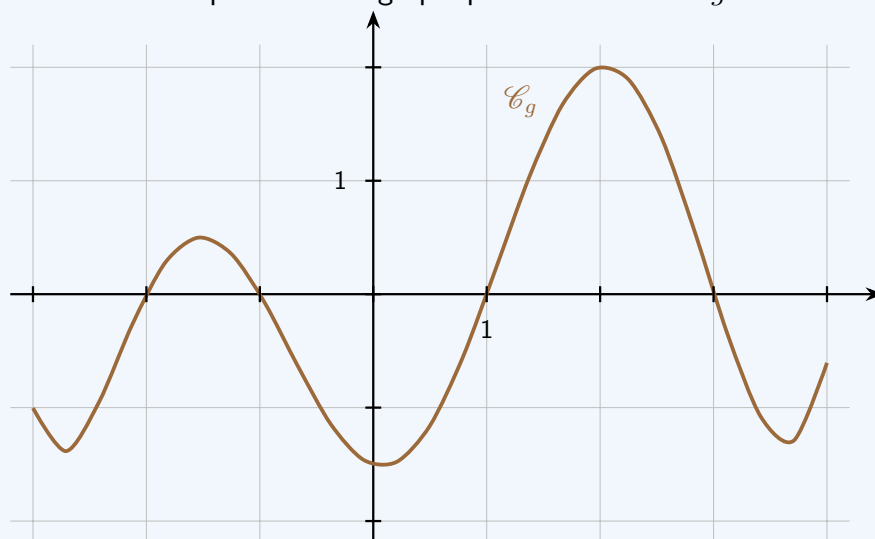
$$5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{5}$$

On peut maintenant dresser le tableau de signes de f .

x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	7	$+\infty$	
$x - 7$		$-$	0	$+$	
$5x + 2$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Exercice 3

1. Dresser le tableau de signes sur $\mathbb{R}$ de la fonction f suivante : $f(x) = (-2x+7)(4x+1)$
On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-3; 4]$.



2. Dresser le tableau de signes sur $[-3; 4]$ de la fonction g .

Solution

1.

$$-2x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{2}$$

$$4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$	
$-2x + 7$		$+$	0	$-$	
$4x + 1$	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

2.

x	-3	-2	-1	1	3	4	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$



III - Variations d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

1. f est **croissante** sur I si pour tous $a, b \in I$ tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
2. f est **décroissante** sur I si pour tous $a, b \in I$ tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
3. f est **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I .

Remarque

On définit de la même façon les notions de fonctions **strictement croissante**, **strictement décroissante** et **strictement monotone** en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

1. Le **maximum** de f sur l'intervalle I (lorsqu'il existe) est la **plus grande image possible** d'un élément de I par f .
2. Le **minimum** de f sur l'intervalle I (lorsqu'il existe) est la **plus petite image possible** d'un élément de I par f .
3. Les **extremums** de f sur I sont son minimum et son maximum.

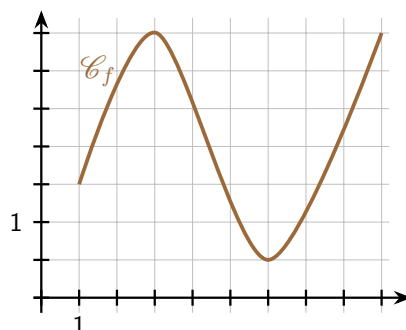
Exemple

On considère une fonction f définie sur $[1; 9]$, dont voici la courbe représentative.

f est strictement croissante sur $[1; 3]$ et sur $[6; 9]$, et strictement décroissante sur $[3; 6]$.

Son maximum est $3,5$: il est atteint en $x = 3$ et en $x = 9$.

Son minimum est $0,5$: il est atteint en $x = 6$.



Exercice 4

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 5]$. On suppose que cette fonction vérifie $f(-1) = f(2) = f(4,5) = 0,5$. Voici son tableau de variations :

x	-2	1	3	5
f	2	-3	1,5	-1

1. Comparer les nombres $f(-1,5)$ et $f(0,25)$.

2. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq f(-1)$.

3. Déterminer les extremums de f :

a. sur l'intervalle $[-2; 5]$

b. sur l'intervalle $[1; 5]$

Solution

1. $-1,5$ et $0,25$ appartiennent tous les deux à l'intervalle $[-2; 1]$, sur lequel f est strictement décroissante. Comme $-1,5 < 0,25$, on en déduit que $f(-1,5) > f(0,25)$.

2. ❖ sur l'intervalle $[-2; 1]$, $f(x) \geq f(-1) \Leftrightarrow x \in [-2; -1]$

❖ sur l'intervalle $[1; 3]$, $f(x) \geq f(-1) = f(2) \Leftrightarrow x \in [2; 3]$

❖ sur l'intervalle $[3; 5]$, $f(x) \geq f(-1) = f(4,5) \Leftrightarrow x \in [3; 4,5]$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq f(-1)$ est :

$$\mathcal{S} = [-2; -1] \cup [2; 3] \cup [3; 4,5] = [-2; -1] \cup [2; 4,5]$$

3. a. Sur $[-2; 5]$, le maximum de f est 2, atteint en $x = -2$, et le minimum de f est -3 , atteint en $x = 1$.

b. Sur $[1; 5]$, le maximum de f est 1,5, atteint en $x = 3$, et le minimum de f est -3 , atteint en $x = 1$.

