

❖ Généralités sur les fonctions ❖

I - Représentations d'une fonction

Définition

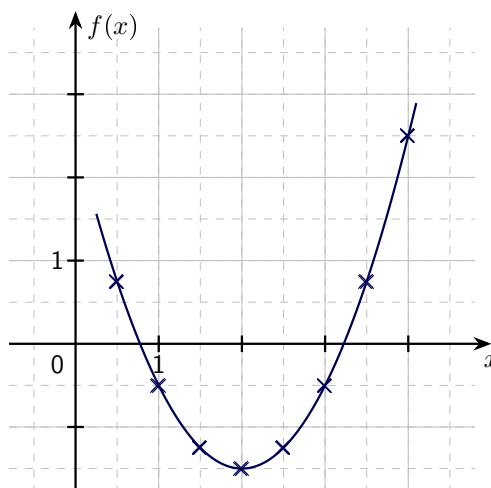
Une **fonction** associe à chaque nombre réel x un unique nombre réel noté $f(x)$. On note $y = f(x)$, ou $x \mapsto f(x)$.

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f , et que x est un **antécédent** de $f(x)$ par la fonction f .

On peut représenter graphiquement une fonction f par une courbe, en plaçant tous les points de coordonnées $(x; f(x))$, pour x un nombre réel.

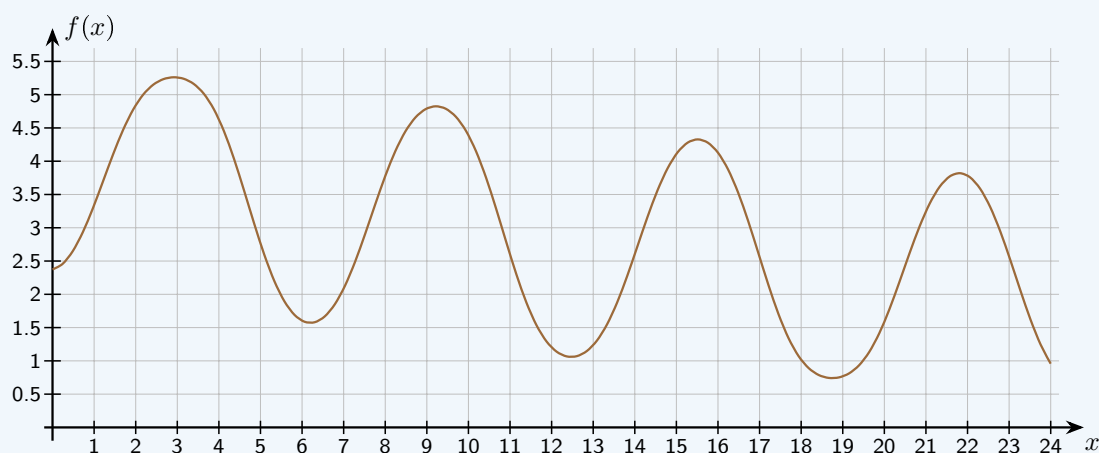
Prenons l'exemple de $f(x) = (x - 2)^2 - 1,5$.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$	0,75	-0,5	-1,25	-1,5	-1,25	-0,5	0,75	2,5



Exercice 1

On s'intéresse à la hauteur de la mer dans un village de bord de mer sur une journée. La fonction f représentée ci-dessous représente la hauteur de la mer $f(x)$, en mètres, en fonction de l'heure de la journée x .



On répondra aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

1. Que vaut $f(11)$? Interpréter le résultat.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 1$. Interpréter le résultat.
3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 4$. En déduire la durée, en heures, pendant laquelle la hauteur de la mer a dépassé 4 mètres.

Solution

1. $f(11)$ est égal à 2,5. Cela signifie qu'à 11h, la hauteur de la mer était de 2,5 mètres.
2. Les solutions de $f(x) = 1$ sont $x = 18$, $x = 19,5$ et $x = 24$. Cela signifie que la hauteur de la mer était de 1 mètre à 18h, à 19h30 et à 24h.
3. L'ensemble des solutions de $f(x) \geq 4$ est $[1, 4; 4, 4] \cup [8, 1; 10, 2] \cup [14, 9; 16, 1]$.
La hauteur de la mer a donc dépassé 4 mètres pendant un total de $3+2, 1+2, 2 = 7,3$ heures, soit 7 heures et 18 minutes.



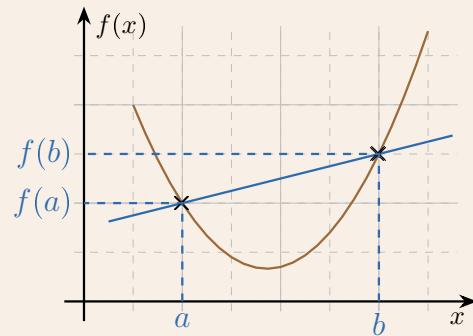
II - Variations d'une fonction

Définition

Soit f une fonction et soient a et b deux nombres réels distincts. Le **taux de variation** de f entre a et b est le nombre réel

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Il correspond à la **pente** de la droite passant par les points d'abscisses a et b de la courbe f .



Exemple

On considère la fonction f définie par $f(x) = 3 - 2x^2$. On détermine le taux de variation de f entre 2 et 5. On a :

$$f(5) = 3 - 2 \times 5^2 = -47 \quad \text{et} \quad f(2) = 3 - 2 \times 2^2 = -5$$

Le taux de variation de f entre 2 et 5 est donc $\frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{-47 - (-5)}{3} = \frac{-42}{3} = -14$

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- ❖ f est croissante sur I si, et seulement si, pour tous nombres a et b dans I , le taux d'accroissement de f entre a et b est positif.
- ❖ f est décroissante sur I si, et seulement si, pour tous nombres a et b dans I , le taux d'accroissement de f entre a et b est négatif.

Démonstration

Commençons par remarquer que l'on peut échanger les nombres a et b dans le calcul du taux d'accroissement, ce qui fait que l'on peut toujours supposer que $a < b$.

Comme $a < b$, on a $b - a > 0$, donc le signe du taux d'accroissement $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est celui de son numérateur $f(b) - f(a)$.

Ainsi, dire que ce taux d'accroissement est toujours positif revient à dire que pour tous nombres réels a et b , avec $a < b$, on a $f(b) - f(a) \geq 0$, c'est-à-dire $f(a) \leq f(b)$: c'est exactement la définition d'une fonction croissante.

De même, le taux d'accroissement est négatif si, et seulement si, $f(b) - f(a) \leq 0$, c'est-à-dire $f(a) \geq f(b)$, ce qui revient à dire que f est décroissante.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 1$. Pour deux nombres réels a et b distincts, le taux d'accroissement de f entre a et b est :

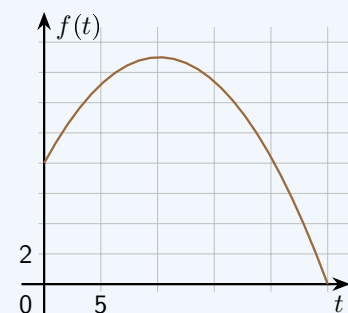
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{4b - 1 - (4a - 1)}{b - a} = \frac{4b - 1 - 4a + 1}{b - a} = \frac{4(b - a)}{b - a} = 4 > 0$$

Par conséquent, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

On lance un projectile dans les airs. Après t secondes, sa hauteur en mètres est donnée par $f(t) = -0,068t^2 + 1,38t + 8$. Cette fonction est représentée ci-dessous.

1. Quelle est la hauteur initiale du projectile ? Au bout de combien de temps retombe-t-il au sol ?
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Donner le maximum de f et interpréter le résultat.
4. Calculer le taux de variation de f entre 20 et 25. Que signifie ce résultat à propos de la vitesse du projectile ?



Solution

1. La hauteur initiale du projectile est de 8 mètres. Le projectile retombe au sol après 25 secondes.

2.

t	0	10	25
f	8		0

3. On calcule : $f(10) = -0,068 \times 10^2 + 1,38 \times 10 + 8 = 14,688$.

La hauteur maximale du projectile est donc de 14,688 mètres.

4. On a $f(25) = 0$ et $f(20) = -0,068 \times 20^2 + 1,38 \times 20 + 8 = 8,4$.

$$\frac{f(25) - f(20)}{25 - 20} = \frac{0 - 8,4}{25 - 20} = \frac{-8,4}{5} = -1,68$$

Le taux de variation de f entre 20 et 25 est donc égal à $-1,68$, ce qui signifie qu'entre 20 et 25 secondes, le projectile a perdu de la hauteur à une vitesse moyenne de 1,68 m/s.

