

❖ Fonctions exponentielles ❖

I - Fonctions exponentielles

1 - Définitions

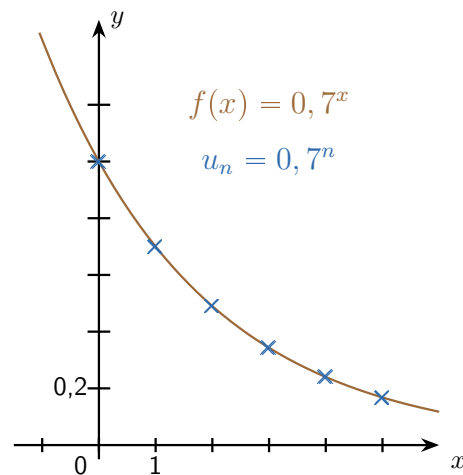
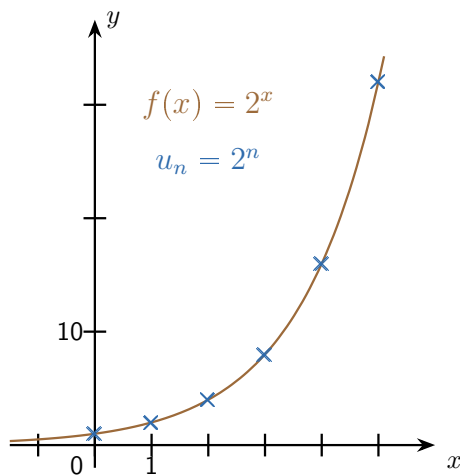
Définition

Soit a un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = a^x$ est appelée **exponentielle de base a** .

Elle prolonge la suite géométrique de terme général $u_n = a^n$ à tout nombre réel positif.

Remarque

- ❖ Lorsque x est négatif, on définit $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$.
- ❖ Pour tout nombre réel x , on a $a^x > 0$.
- ❖ Pour calculer la valeur de a^x , on utilise la calculatrice.



2 - Propriétés

Propriété 1 (Admise)

Soit a un nombre réel strictement positif, et soient x et y deux nombres réels. Alors

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a \quad a^x \times a^y = a^{x+y} \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

Exemple

$$\frac{0,8^{2,3} \times (0,8^{-5,1})^{1,4}}{0,8^{-6,3}} = \frac{0,8^{2,3} \times 0,8^{-7,14}}{0,8^{-6,3}} = \frac{0,8^{-4,84}}{0,8^{-6,3}} = 0,8^{1,46}$$

Propriété 2 (Admise)

Soit $a > 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$.

- ❖ Si $a > 1$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ❖ Si $a = 1$, alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$, égale à 1.
- ❖ Si $0 < a < 1$, alors la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Dans un laboratoire, lors de la mise en culture d'une bactérie, on constate que leur nombre double toutes les 20 minutes. Initialement, on met 20 000 bactéries en culture.

1. Combien y a-t-il de bactéries au bout d'une heure ?
2. Par combien le nombre de bactéries est-il multiplié chaque heure ?

On modélise la nombre de bactéries, en millier, au bout de x heures par $f(x) = k \times a^x$.

3. Donner les valeurs de k et de a .
4. Combien y a-t-il de bactéries au bout de 2 h 15 ?
5. Au bout de combien de temps le nombre de bactéries dépasse-t-il le milliard ?
Arrondir au millième d'heure, puis à la minute près

Solution

1. Après 20 minutes, il y a $20\,000 \times 2 = 40\,000$ bactéries.
Après 40 minutes, il y a $40\,000 \times 2 = 80\,000$ bactéries.
Après une heure, il y a $80\,000 \times 2 = 160\,000$ bactéries.
2. Le nombre de bactéries est donc multiplié par $2 \times 2 \times 2 = 8$ toutes les heures.
3. On doit avoir $f(0) = 20\,000$. Or, $f(0) = k \times a^0 = k \times 1 = k$, donc $k = 20\,000$.
Ensuite, $f(1) = 160\,000$, donc

$$20\,000 \times a^1 = 160\,000 \Rightarrow a = \frac{160\,000}{20\,000} = 8$$

Par conséquent, $a = 8$.

4. Comme $2\text{ h }15 = 2,25\text{ h}$ on calcule $f(2,25)$:

$$f(2,25) = 20\,000 \times 8^{2,25} \approx 2\,152\,000$$

Au bout de 2 h 15, il y a environ 2 152 000 bactéries.

5. On cherche un nombre réel positif x tel que $f(x) = 10^9$. Avec une calculatrice, on trouve que $f(5,203) \approx 9,996 \times 10^8 < 10^9$ et $f(5,204) \approx 1,002 \times 10^9 > 10^9$, donc le milliard de bactéries est atteint après environ 5,204 heures.
Cela correspond à $5,204 \times 60 = 312,24 \approx 312$ minutes.



II - Racine n -ième

Propriété 3 (Admise)

Soient n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif. La seule solution strictement positive de l'équation $x^n = a$ est $x = a^{\frac{1}{n}}$: c'est la **racine n -ième** de a .

Exemple

$$\diamond 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$\diamond 5,2^{\frac{1}{7}} \approx 1,27$$

❖ Taux d'évolution moyen

Soit n un entier naturel non nul. Lorsqu'une valeur de départ V_0 subit n évolutions successives avec des taux d'évolution $t_1, t_2, \dots, t_n$, alors elle est multipliée successivement par les n **coefficients multiplicateurs** $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$ correspondants. Le **coefficient multiplicateur global** est alors

$$CM_{\text{global}} = CM_1 \times CM_2 \times \dots \times CM_n$$

Définition

On appelle **coefficient multiplicateur moyen** le nombre $CM_{\text{moyen}} = (CM_{\text{global}})^{\frac{1}{n}}$.

Le **taux d'évolution moyen** est ensuite le taux d'évolution associé : $t_{\text{moyen}} = 1 - CM_{\text{moyen}}$.

Exemple

Un prix augmente de 10 %, puis augmente de 30 %, et enfin diminue de 15 %.

Les coefficients multiplicateurs sont $CM_1 = 1,1$, $CM_2 = 1,3$ et $CM_3 = 0,85$. Le coefficient multiplicateur global est $CM_g = 1,1 \times 1,3 \times 0,85 = 1,2155$.

Le coefficient multiplicateur moyen est alors $CM_{\text{moyen}} = 1,2155^{\frac{1}{3}} \approx 1,0672$.

Cela correspond à une augmentation de $t = 1 - 1,0672 = 0,0672 = 6,72\%$.

Exercice 2

De 2015 à 2019, la fréquentation du musée du Louvre a diminué de 16 %, augmenté de 14 %, augmenté de 26 % et diminué de 6 %.

Calculer les taux d'évolution global et moyen de cette fréquentation.

Solution

Les coefficients multiplicateurs sont $CM_1 = 0,84$, $CM_2 = 1,14$, $CM_3 = 1,26$ et $CM_4 = 0,94$. Le coefficient multiplicateur global est

$$0,84 \times 1,14 \times 1,26 \times 0,94 \approx 1,134$$

Le taux d'évolution global est donc $1 - 1,134 = 0,134 = 13,4\%$.

Le coefficient multiplicateur moyen est $1,134^{\frac{1}{4}} \approx 1,032$.

Le taux d'évolution moyen est donc $1 - 1,032 = 0,032 = 3,2\%$.

La fréquentation du musée du Louvre a donc augmenté d'environ 3,2 % chaque année de 2015 à 2019. 