

❖ Fonctions affines ❖

I - Vocabulaire

Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **affine** s'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x , on a $f(x) = ax + b$. On dit que a est le **coefficient directeur** et que b est l'**ordonnée à l'origine**.

- ❖ Lorsque $b = 0$, on a $f(x) = ax$ et f est dite **linéaire**.
- ❖ Lorsque $a = 0$, on a $f(x) = b$ et f est dite **constante**.

Exemples

- ❖ $f(x) = 5 - x$ est affine avec $a = -1$ et $b = 5$
- ❖ $g(x) = \frac{4x}{5}$ est linéaire avec $a = \frac{4}{5}$

II - Variations

Propriété 1

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

- ❖ Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ❖ Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples

- ❖ $f(x) = 5 - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- ❖ $g(x) = \frac{4x}{5}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Le tarif d'un électricien s'élève à 60 € de l'heure, auxquels il faut rajouter 55 € de frais de déplacement.

On note x le nombre d'heures de travail effectuées par cet électricien et $p(x)$ le prix à payer. On suppose que $0 \leq x \leq 10$.

1. Quel est le prix à payer pour une intervention de 2h30 ?
2. Justifier que p est une fonction affine, et donner ses coefficients.
3. Construire le tableau de variations de la fonction p .
4. Sur sa dernière intervention, l'électricien se souvient avoir facturé à son client un tarif d'au moins 230 €. Quel a été la durée minimale de son intervention ?

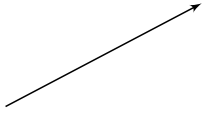
Solution

1. $60 \times 2,5 = 150$ et $150 + 50 = 200$

Une intervention de 2h30 coûte 200 €.

2. Pour tout réel x , on a $f(x) = 60x + 50$, donc f est une fonction affine. Son coefficient directeur est $a = 60$ et son ordonnée à l'origine est $b = 50$.

3.

x	$-\infty$	$+\infty$
p		

4. On résoud l'inéquation $p(x) \geq 230$.

$$60x + 50 \geq 230 \Leftrightarrow 60x \geq 180 \Leftrightarrow x \geq \frac{180}{60} = 3$$

Son intervention a duré au minimum 3h.



III - Représentation graphique

Propriété 2 (Admise)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Alors f est affine si, et seulement si, sa représentation graphique est une droite.

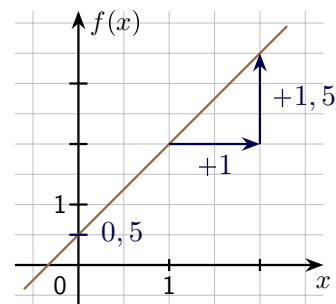
Exemple

On a représenté ci-contre une fonction f .

L'ordonnée à l'origine est $b = 0,5$.

Le coefficient directeur est $a = 1,5$.

Par conséquent, pour tout réel x , $f(x) = 1,5x + 0,5$.

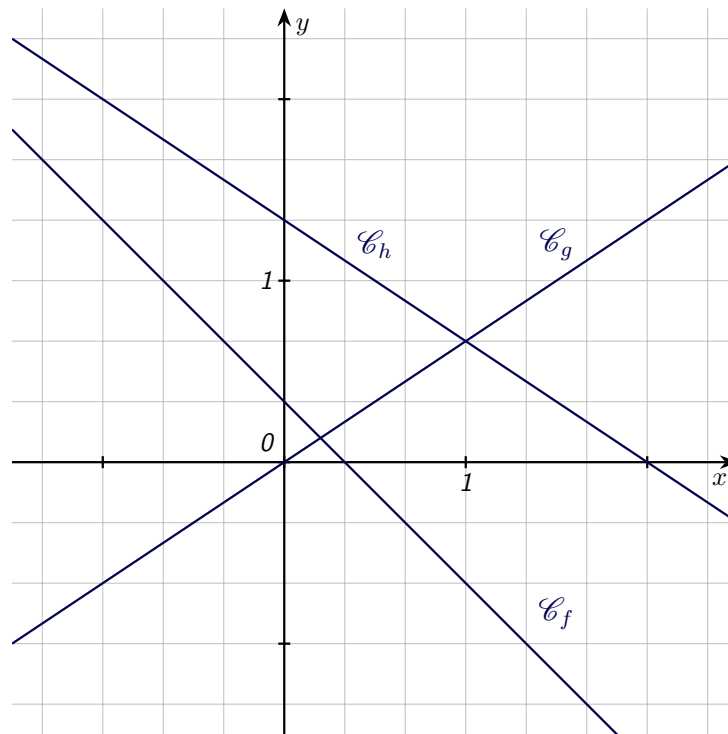


Exercice 2

Dans un même repère, représenter graphiquement les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f(x) = -x + \frac{1}{3}$ 2. $g(x) = \frac{2x}{3}$ 3. $h(x) = \frac{4 - 2x}{3}$

Solution



IV - Taux d'accroissement

Propriété 3

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$. Alors pour tous nombres réels x_1 et x_2 distincts, le taux d'accroissement de f entre x_1 et x_2 est égal au coefficient a :

$$a = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Démonstration

Soient x_1 et x_2 deux nombres réels distincts. Alors :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1 + b - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1 + b - ax_2 - b}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$



Exemple

On considère une fonction affine f telle que $f(1) = 5$ et $f(6) = -10$.

$$a = \frac{f(1) - f(6)}{1 - 6} = \frac{5 - (-10)}{1 - 6} = \frac{15}{-5} = -3$$

Ensuite, on cherche b tel que $f(1) = -3 \times 1 + b = 5$, c'est-à-dire $b = 5 + 3 = 8$.

Par conséquent, pour tout réel x , $f(x) = -3x + 8$.

Exercice 3

Le degré Fahrenheit, noté °F, est une unité de mesure de la température utilisée notamment aux États-Unis. Pour une température x en °C, on appelle $f(x)$ la température correspondante en °F. On admet que f est une fonction affine.

1. On sait que $100^{\circ}\text{C} = 212^{\circ}\text{F}$ et que $20^{\circ}\text{C} = 68^{\circ}\text{F}$. Donner une expression de $f(x)$ en fonction de x .
2. Recopier et compléter ces deux égalités : $35^{\circ}\text{C} = \dots^{\circ}\text{F}$ et $\dots^{\circ}\text{C} = 113^{\circ}\text{F}$.

Solution

1. On calcule le coefficient directeur a .

$$a = \frac{f(100) - f(20)}{100 - 20} = \frac{212 - 68}{100 - 20} = \frac{144}{80} = 1,8$$

On cherche l'ordonnée à l'origine b . Elle doit vérifier $f(100) = 1,8 \times 100 + b = 212$, c'est-à-dire $b = 212 - 1,8 \times 100 = 212 - 180 = 32$.

On en déduit que $f(x) = 1,8x + 32$.

2. $f(35) = 1,8 \times 35 + 32 = 95$, donc $35^{\circ}\text{C} = 95^{\circ}\text{F}$.

On cherche un nombre x tel que $f(x) = 113$, c'est-à-dire

$$1,8x + 32 = 113 \Leftrightarrow 1,8x = 81 \Leftrightarrow x = \frac{81}{1,8} = 45$$

Ainsi, $45^{\circ}\text{C} = 113^{\circ}\text{F}$.

