

33 leçons d'analyse pour l'agrégation interne de mathématiques

Errata

Malgré toute l'attention portée aux erreurs et coquilles lors des différentes relectures, des modifications sont à apporter. Ces changements seront faits ultérieurement lors d'une réédition.

- **Page 8** : Dans la preuve de la proposition 8, au début du deuxième paragraphe, il faut lire "*f' ne s'annule pas sur $]L - \alpha, L + \alpha[$* " au lieu de "*f' ne s'annule pas sur I* ". De plus, il faut préciser que pour n assez grand, on a $u_n \in]L - \alpha, L + \alpha[$.
- **Page 20** : Dans la preuve de la proposition 15, dans la troisième ligne du dernier calcul de la page, le troisième terme est $+\frac{1}{2(n+1)^2}$ et non $-\frac{1}{2(n+1)^2}$.
- **Page 22** : Dans la dernière ligne, il faut lire "*du problème de Bâle*" au lieu "*de problème de Bâle*".
- **Page 29** : Dans la preuve de la proposition 11, première ligne de calcul, dans le membre de droite contenant quatre termes dans la valeur absolue, le dernier terme est $-\sum_{n \geq M+1} u_{\sigma(n)}$ et non $+\sum_{n \geq M+1} u_{\sigma(n)}$.
- **page 30** : Dans la preuve du théorème 12, deuxième paragraphe, lorsqu'il est écrit "*Elle serait alors absolument convergente*", cela fait référence à la série $\sum a_n$ et non à la suite (a_n) .
- **Page 38** : Même remarque qu'à la page 8.
- **Page 43** : Dans la preuve du théorème 1, cinquième ligne, il faut lire $10^d \leq N < 10^{d+1}$ au lieu de $10^d \leq N + 1 < 10^{d+1}$.
- **Page 44** : Dans la définition 2, le nombre de chiffres de l'écriture décimale de N est $d + 1$ et pas d .
- **Page 45** : Dans la preuve du théorème 3, dans l'implication qui suit "*en réutilisant l'inégalité précédente*", dans le premier encadrement, le membre de droite doit être $\frac{1}{10^{n-1}}$ et non $\frac{1}{10^n}$.
- **Page 47** : Dans la preuve du théorème 9, dans l'avant-dernière ligne du calcul en haut de page, il faut retirer les parenthèses à $\left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{10^{kp}}\right)$: on factorise simplement le facteur $\frac{1}{10^{kp}}$ de la somme indexée sur $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
- **Page 47** : Dans la preuve du théorème 9, dans les deux dernières lignes du calcul en haut de page, le terme à l'intérieur de la somme indexée sur $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ est $\frac{a_{N+i}}{10^{N+i}}$ et non $\frac{a_{N+i}}{10^{N+1}}$.
- **Page 49** : Dans l'énoncé du théorème 14, il faut préciser que le polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ est non nul.
- **Page 50** : Dans la définition 15, l'entier p doit être pris simplement non nul, et pas nécessairement supérieur ou égal à 1.
- **Page 50** : Dans le sixième paragraphe des commentaires, il faut lire entre parenthèses "*bien qu'il puisse s'adapter*" au lieu de "*bien qu'il puisse d'adapter*".

- **Page 51** : Dans le deuxième paragraphe, deuxième phrase, il faut lire "*Bien que cela ne demande*" au lieu de "*Bien que cela de demande*".
- **Page 59** : Dans la preuve de la proposition 13, il est écrit au neuvième paragraphe "*Puisque $f([x, y_{\varphi(n)}])$ (ou $f([y_{\varphi(n)}, x])$) est un intervalle*", ce qui est faux en l'état : on suppose seulement que $f(I)$ est un intervalle. Pour corriger cela, on peut modifier l'énoncé du lemme 14, en remplaçant " *$f(I)$ est un intervalle*" par "*l'image d'un intervalle par f est un intervalle*".
Une autre solution est de retirer le lemme et de suivre le même raisonnement pour montrer la proposition 13. On suppose que $f(I)$ est un intervalle et que f est strictement croissante. Dans ce cas, si $x < y$ sont deux réels de I , alors $f([x, y])$ est un intervalle.
En effet, considérons $u < w$ dans $f([x, y])$, et $a, c \in [x, y]$ tels que $u = f(a)$ et $w = f(c)$, ainsi que $v \in]u, w[$. On a en particulier $u, w \in f(I)$, qui est un intervalle par hypothèse, donc $v \in f(I)$: il existe donc $b \in I$ tel que $v = f(b)$. Si b n'est pas strictement compris entre a et c , la monotonie stricte de f implique que $v = f(b)$ n'est pas strictement compris entre $u = f(a)$ et $w = f(c)$, ce qui contredit la définition de v . Ainsi, b est strictement compris entre a et c , qui sont dans $[x, y]$, donc $b \in [x, y]$, ce qui assure que $v = f(b) \in f([x, y])$ et que $f([x, y])$ est un intervalle.
- **Page 67** : Dans la preuve du théorème 12, avant-dernière ligne, il faut lire " $D_{(1-s)a+sb}(b-a)$ " au lieu de " $D_{(1-s)+sb}(b-a)$ ".
- **Page 75** : Dans la preuve de la proposition 14, troisième paragraphe, il faut lire "*donc le théorème des valeurs intermédiaires*" au lieu de "*donc le théorèmes des valeurs intermédiaires*".
- **Page 76** : Dans la preuve du lemme 16, à la fin du deuxième paragraphe il est écrit "*Cette inégalité reste trivialement vraie si $x = 0$ ou $y = 0$* ". Cela suppose que x et y sont positifs.
- **Page 78** : Dans la remarque qui précède le théorème 20, dans le deuxième paragraphe, il faut préciser que l'exponentielle est croissante en plus d'être bijective.
- **Page 80** : Dans le deuxième paragraphe des commentaires, il faut lire "*J'ai ensuite choisi de donner*" au lieu de "*J'ai ensuite choisi de donne*".
- **Page 88** : Même remarque qu'à la page 8.
- **Page 93** : Dans la définition 1, il faut préciser que E et F sont non vides.
- **Page 95** : Dans la preuve du théorème 8, à la fin du troisième paragraphe, il faut lire "*avec f dérivable en $f^{-1}(y) \in I$* " au lieu de "*avec f dérivable en I* ".
- **Page 97** : Dans l'énoncé du corollaire 12, il faut lire "*défini*" au lieu de "*définie*".
- **Page 103** : Dans la remarque suite à la définition 2, dans l'égalité de bas de page, le terme de la première somme est $f_n(k)$ et pas $f_n(n)$ et le terme de la seconde somme est $\frac{k}{n^2 + k^2}$ et pas $\frac{n}{n^2 + k^2}$.
- **Page 104** : Dans la preuve du théorème 5, deuxième ligne, il faut lire " $\sum_{k \geq N} \|f_k\|_\infty$ converge" au lieu de " $\sum_{k \geq N} \|f\|_\infty$ converge".

- **Page 109** : Dans la preuve du théorème 12, on peut montrer la convergence normale de $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + nT)$ sur $[-a, a]$ plus simplement.

Puisque $x \mapsto x^2 f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, on peut considérer $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$, ce qui donne $|f(x + Tn)| \leq \frac{M}{(x + Tn)^2}$, à condition que $x + Tn \neq 0$.

Pour un réel $x \in [-a, a]$, si $n \geq 0$ est assez grand, on a $x + Tn \geq -a + Tn > 0$, donc $(x + Tn)^2 \geq (-a + Tn)^2 > 0$ et si $n \leq 0$ est assez petit, on a $x + Tn \leq a + Tn < 0$, donc $(x + Tn)^2 \geq (a + Tn)^2 > 0$. Dans les deux cas, comme $(-a + Tn)^2 = (a - Tn)^2 > 0$, on a $(x + Tn)^2 \geq (a - T|n|)^2 > 0$, donc $|f(x + Tn)| \leq \frac{M}{(a - T|n|)^2}$.

La série de terme général $\frac{M}{(a - T|n|)^2}$ (pour $|n|$ assez grand pour que le dénominateur ne s'annule pas) est convergente, ce qui assure la convergence normale de $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + nT)$.

- **Page 119** : Dans l'énoncé de l'exercice 18, la formule à montrer que $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ et non $C_n = \frac{1}{n} \binom{2n}{n}$.

- **Page 119** : Dans la preuve du lemme 19, dans le calcul de la limite, le membre de droite est $\left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right|$ et non $\left| \frac{\alpha - n}{n} \right|$.

- **Page 121** : Dans la résolution de l'exercice 20, dernier paragraphe, il faut lire " $a_1 = S'(0) = 0$ " au lieu de " $a_1 = f'(0) = 0$ ".

- **Page 126** : Dans la proposition 1, le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ n'est pas en l'état un produit scalaire sur E , puisqu'une fonction f continue par morceaux telle que $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$ n'est pas nécessairement nulle : elle l'est par morceaux, mais rien ne garantit qu'elle le soit en ses discontinuités.

Pour remédier à cela, on peut restreindre E aux fonctions continues : il faut alors modifier légèrement les énoncés des résultats suivants puisque les fonctions considérées sont automatiquement continues.

Sinon, on peut quotienter E par la relation d'équivalence : $f \sim g$ si, et seulement si, $f - g$ est nulle presque-partout. Cela revient à identifier comme égales des fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre négligeable de points, ce qui résout le problème du produit scalaire. En effet, une fonction f continue par morceaux telle que $\int_0^T |f(t)|^2 dt = 0$ est nulle presque-partout, donc est identifiée à la fonction nulle via cette relation d'équivalence.

- **Page 132** : Dans l'énoncé du corollaire 9, il faut lire "*L'espace des polynômes trigonométriques*" au lieu de "*L'espaces des polynômes trigonométriques*".

- **Page 137** : Même remarque qu'à la page 109.

- **Page 142** : Dans la preuve de la proposition 12, dans le troisième calcul, au deuxième membre, il manque le " dt " dans l'intégrale.

- **Page 144** : Dans la preuve de la proposition 4, les polynômes de Lagrange L_i sont définis par $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et non par $L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_i}{x_j - x_i}$.

- **Page 148** : Dans la preuve de la proposition 9, dans les deux dernières lignes du second calcul, le dénominateur est 12 et pas 6.
- **Page 150** : Dans la preuve de la proposition 10, dans la ligne de calcul qui précède "*Le noyau de Péano est donc toujours négatif*", le facteur de droite est $\left(3\left(\frac{a+b}{2} - t\right) + \frac{b-a}{2}\right)$ et non $\left(3\left(t - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{2}\right)$.
- **Page 161** : Dans l'énoncé de la proposition 15, il faut lire " $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ " au lieu de " $V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$ ".
- **Page 170** : Dans la preuve de la proposition 7, ce n'est pas φ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais l'application $x \mapsto \varphi(x, t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé.
- **Page 171** : Dans la preuve de la proposition 9, troisième et quatrième lignes, il faut lire $x^n(\widehat{f})^{(m)}(x)$ au lieu de $x^n\widehat{f^{(m)}}(x)$.
- **Page 171** : Même remarque qu'à la page 109.
- **Page 179** : Dans la preuve du corollaire 10, quatrième paragraphe, après "*Considérons $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de x_1 dans I* ", il faut lire " $t \in]\alpha, \beta[$ " au lieu de " $t \in]a, b[$ ".
- **Page 183** : Dans le troisième paragraphe, il faut lire "*via la proposition 13*" au lieu de "*via la proposition 12*".
- **Page 192** : Dans la résolution du système en haut de page, à la deuxième ligne, il faut lire " $\lambda_1'(t) = 1 - 2e^t\lambda_2'(t)$ " au lieu de " $\lambda_1'(t) = 1 - \lambda_2'(t)$ ".
- **Page 192** : Dans la résolution du système en bas de page, à la troisième ligne, il faut lire " $\lambda_1'(t) = e^t(1 - 2e^{-t} + 2) = 3e^t - 2$ " au lieu de " $\lambda_1'(t) = e^t(1 - 2e^{-t} - 2) = -e^t - 2$ ", puis ensuite " $\lambda_1(t) = 3e^t - 2t$ " au lieu de " $\lambda_1(t) = -e^t - 2t$ ".
- **Page 199** : Même remarque qu'à la page 8.
- **Page 221** : Dans la démonstration du théorème 21, dans le quatrième paragraphe il faut lire " $|P(z_0)| = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|$ " et pas " $P(z_0) = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|$ ".
- **Page 228** : Dans l'énoncé de la proposition 12, il faut lire " $V \subset \mathbb{R}^m$ " au lieu de " $V \subset R^m$ ".
- **Page 231** : Dans les commentaires, deuxième paragraphe, il faut lire "*de parler a minima de dérivées partielles*" au lieu de "*de parler a minimal de dérivées partielles*".
- **Page 232** : Dans le troisième paragraphe, il faut lire "*me semblent importants*" au lieu de "*me semblent importantes*".
- **Page 239** : Dans le cinquième paragraphe, dernière ligne, il faut lire "*recherche des extrema locaux*" au lieu de "*recherches des extrema locaux*".
- **Page 242** : Dans la preuve de la proposition 5, dans le premier point du cas $p = +\infty$, dernière ligne, il faut lire " $|\lambda| > 0$ " au lieu de " $|\lambda| \geq 0$ ".
- **Page 248** : Dans le deuxième paragraphe, il faut lire "*des contre-exemples en dimension infinie*" au lieu de "*des contre-exemples en dimension finie*".

- **Page 249** : Dans la preuve du théorème 1, dans le calcul de l'implication $6 \Rightarrow 7$, il faut lire " $\|x\|_E \cdot \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right) \right\|_F$ " au lieu de " $\|x\|_E \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)$ ".
- **Page 250** : Dans la preuve de la proposition 3, dernière ligne, dans le premier membre, il faut lire " $\left\| \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_n)} x_n\right) - x \right\|_E$ " au lieu de " $\left\| \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_n)}\right) - x \right\|_E$ ".
- **Page 251** : Dans la preuve de la proposition 3, troisième ligne, dans le premier membre, il faut lire " $\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_n)} x_n\right)$ " au lieu de " $\varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_n)}\right)$ ".
- **Page 275** : Même remarque qu'à la page 8.
- **Page 276** : Dans la preuve du théorème 8, deuxième ligne, il faut lire "*que l'on munit*" au lieu de "*que l'on muni*".
- **Page 278** : Dans la preuve du théorème 9, quatrième ligne, il faut lire "*de sorte que* $f(x) = y$ " au lieu de "*de sorte* $f(x) = y$ ".
- **Page 284** : Dans la preuve de la proposition 8, dernière ligne, il faut lire "*en traitant* $E(X)^2$ *comme une variable aléatoire constante, on a* $E(E(X)^2) = E(X)^2$ " au lieu de "*en traitant* $E(X)$ *comme une variable aléatoire constante, on a* $E(E(X)) = E(X)$ ".
- **Page 296** : Même remarque qu'à la page 296.
- **Page 297** : Dans le point où l'on vérifie que $s \mapsto e^{-\frac{s^2}{2}}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, il y a une erreur dans le changement de variable $s = \frac{t-\mu}{\sigma}$: les bornes de la seconde intégrale doivent être $\frac{b-\mu}{\sigma}$ et $\frac{a-\mu}{\sigma}$ au lieu de $\sigma b + \mu$ et $\sigma a + \mu$.
- **Page 317** : Dans la preuve de la proposition 2, dans le premier calcul, il faut lire " $E(S_n)$ " au lieu de " $E(X_n)$ ".
- **Page 343** : Dans l'énoncé du théorème 14, il faut seulement supposer que les x_i sont deux à deux distincts, les y_i doivent simplement ne pas tous être égaux, ce qui garantit que $V(Y) > 0$.