

❖ Ensembles de nombres ❖

I - Ensembles de nombres usuels

Définition

Un **nombre entier naturel** est un nombre entier **positif**. L'ensemble de tous les nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Exemples

$$\diamond -5 \notin \mathbb{N} \text{ et } -5 \in \mathbb{Z}$$

$$\diamond 0 \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \in \mathbb{Z}$$

Remarque

Tout nombre entier naturel est aussi un nombre entier relatif. Ainsi, l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, ce que l'on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Définition

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples

$$\diamond -2,05 = \frac{-205}{10^2} \in \mathbb{D}$$

$$\diamond \frac{3}{5} = \frac{6}{10} \in \mathbb{D}$$

Remarque

Si a est un nombre entier, alors $a = \frac{a}{1} = \frac{a}{10^0}$. Ainsi, tout nombre entier est aussi un nombre décimal. On a donc l'inclusion $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

Propriété 1 (Admise)

Un nombre est décimal si, et seulement si, son écriture décimale est finie.

Propriété 2

Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Démonstration (Au programme)

On va procéder par l'absurde, en supposant que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal, et en montrant que cela amène à une contradiction.

Supposons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Il existe alors un nombre entier a et un nombre entier naturel n tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$.

Par un produit en croix, on obtient donc que $10^n = 3a$, ce qui signifie que 10^n est un multiple de 3.

Or, la somme des chiffres de 10^n est égale à 1, donc 10^n n'est pas un multiple de 3.

On aboutit à une contradiction, donc $\frac{1}{3}$ ne peut pas être un nombre décimal. ◆

Définition

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Exemples

$$\diamond \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$$

$$\diamond 4,23 = \frac{423}{100} \in \mathbb{Q}$$

$$\diamond \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} : \text{il est } \mathbf{irrationnel}$$

Remarque

Tout nombre décimal est un cas particulier de nombre rationnel : on a donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Propriété 3 (Admise)

Un nombre est rationnel si, et seulement si, son écriture décimale est finie, ou si ses décimales se répètent.

Définition

Un **nombre réel** est un nombre que l'on peut représenter par un point sur une droite graduée, appelée **droite numérique**. On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

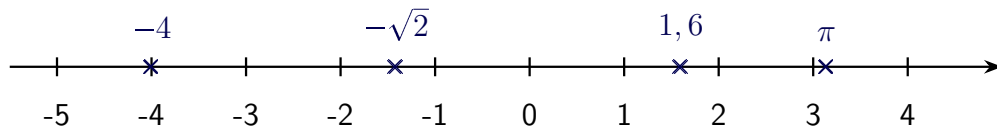
Exemples

$$\diamond -4 \in \mathbb{R}$$

$$\diamond -\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

$$\diamond 1,6 \in \mathbb{R}$$

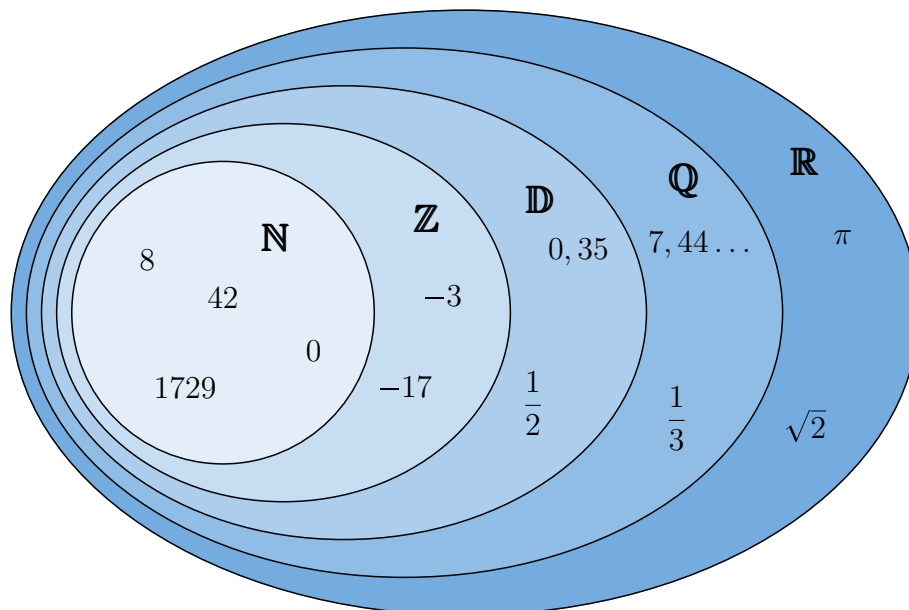
$$\diamond \pi \in \mathbb{R}$$



Propriété 4

Les ensembles de nombres usuels sont inclus les uns dans les autres de la façon suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Exercice 1

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$:

$$-52 \notin \mathbb{N}$$

$$\frac{-11}{7} \in \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

$$36 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{100} \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{5} \in \mathbb{D}$$

$$0,93 \in \mathbb{Q}$$

$$-8,44 \in \mathbb{D}$$

$$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$$

II - Intervalles

Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

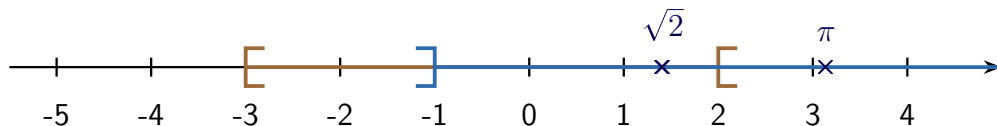
- ❖ L'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des nombres réels x qui vérifient $a \leq x \leq b$.
Son **amplitude** est $b - a$.
- ❖ L'intervalle $[a; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x vérifiant $x \geq a$.
- ❖ L'intervalle $] - \infty; b]$ est l'ensemble des nombres réels x vérifiant $x \leq b$.

Pour exclure une borne d'un intervalle, on utilise un crochet tourné vers l'extérieur. On définit de cette façon les intervalles $[a; b[$, $]a; b]$, $]a; b[$, $]a; +\infty[$ et $] - \infty; b[$.

Exemples

$$\pi \notin [-3; 2[$$

$$\sqrt{2} \in] - 1; +\infty[$$



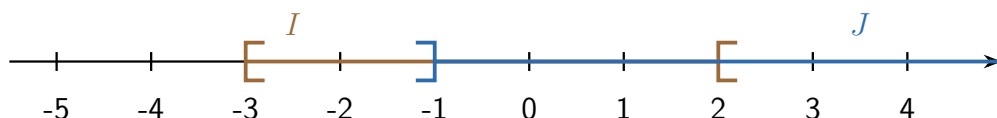
Définition

Soient I et J deux intervalles.

- ❖ On note $I \cap J$ l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I **et** à J : c'est l'**intersection** de I et J .
- ❖ On note $I \cup J$ l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à I **ou** à J : c'est l'**union** de I et J .

Exemple

Pour $I = [-3; 2[$ et $J =] - 1; +\infty[$, on a $I \cup J = [-3; +\infty[$ et $I \cap J =] - 1; 2[$



Exercice 2

1. Compléter par $\in$ ou $\notin$:

$$\diamond 2, 5 \dots [2; 5]$$

$$\diamond \pi \dots] - \infty; 3]$$

$$\diamond 8 \dots [7; 8[$$

2. À quel intervalle I correspond l'ensemble des nombres réels x tels que $1 \leq x < 4$?

3. Traduire la condition $x \in J =] - \infty; 3]$ par une inégalité.

4. Représenter sur une droite graduée les intervalles I et J .

5. Déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$.

Solution

1. $2, 5 \in [2; 5]$

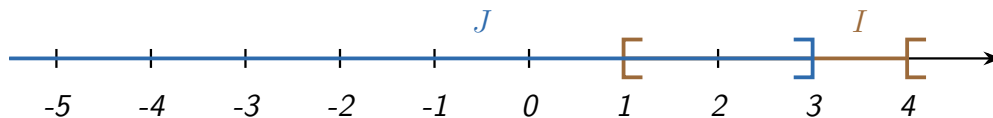
$$\pi \notin] - \infty; 3]$$

$$8 \notin [7; 8[$$

2. L'ensemble des nombres réels x tels que $1 \leq x < 4$ est l'intervalle $I = [1; 4[$.

3. $x \in J =] - \infty; 3]$ revient à dire que $x \leq 3$.

4.



5. Graphiquement, on détermine $I \cup J =] - \infty; 4[$ et $I \cap J = [1; 3]$.



III - Valeur absolue

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x , notée $|x|$, est le nombre réel positif :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples

$$\diamond |18| = 18$$

$$\diamond |-3,02| = 3,02$$

Définition

La **distance** entre deux nombres réels x et y est $|x - y|$.

Exemples

$$\diamond \text{La distance entre 2 et 8 est } |2 - 8| = |-6| = 6$$

$$\diamond \text{La distance entre 4 et } -5 \text{ est } |4 - (-5)| = |9| = 9$$

Propriété 5

Soient a et r deux nombres réels, avec $r \geq 0$. L'ensemble des nombres réels x vérifiant $|x - a| \leq r$ est l'intervalle $[a - r; a + r]$.

Démonstration

Soit x un nombre réel. Si $x \geq a$, alors $|x - a| = x - a \geq 0$ et

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow 0 \leq x - a \leq r \Leftrightarrow a \leq x \leq a + r \Leftrightarrow x \in [a; a + r]$$

Si $x < a$, alors $|x - a| = a - x > 0$ et

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow 0 < a - x \leq r \Leftrightarrow x - a \geq -r \Leftrightarrow a > x \geq a - r \Leftrightarrow x \in [a - r; 0[$$

On en déduit que l'ensemble des nombres réels x tels que $|x - a| \leq r$ est

$$[a; a + r] \cup [a - r; a[= [a - r; a + r]$$



Exemples

- ❖ La condition $|x - 4| \leq 0,01$ peut aussi s'écrire $x \in [3,99; 4,01]$
- ❖ La condition $x \in [7,4; 7,6]$ peut aussi s'écrire $|x - 7,5| \leq 0,1$

Définition

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Un **encadrement décimal** de x à 10^{-n} près est un encadrement de la forme $d \leq x < d + 10^{-n}$ où d est un nombre décimal.

Exemples

- ❖ Un encadrement de π à 10^{-2} près est $3,14 \leq \pi < 3,15$
- ❖ Un encadrement de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ à 10^{-3} près est $1,618 \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < 1,619$

Exercice 3

1. Traduire la condition $|x - 5,2| \leq 10^{-2}$ à l'aide d'un intervalle.
2. Traduire à l'aide d'une valeur absolue la condition $x \in [-0,5; 1,5]$.
3. Avec une calculatrice, on trouve : $\sqrt{7} = 2,645751311\dots$
Donner un encadrement de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près, puis sa valeur arrondie à 10^{-3} près.

Solution

1. La condition $|x - 5,2| \leq 10^{-2}$ peut s'écrire $x \in [5,19; 5,21]$.
2. La condition $x \in [-0,5; 1,5]$ peut s'écrire $|x - 0,5| \leq 1$.
3. Un encadrement de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près est : $2,645 \leq \sqrt{7} < 2,646$.
Sa valeur arrondie à 10^{-3} près est $\sqrt{7} \approx 2,646$.

