

❖ Dérivation ❖

I - Rappels sur la dérivation

1 - Définitions

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** si le taux de variation $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a , et est notée $f'(a)$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, la fonction f' définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f .

Propriété 1 (Admise)

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

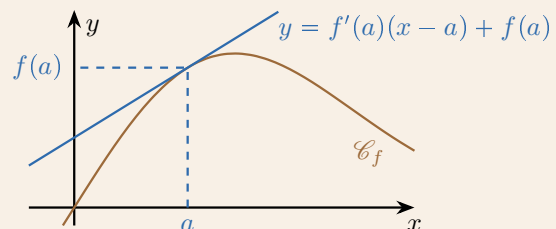
Remarque

La réciproque est fausse : une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable.

2 - Tangente

Propriété 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $a \in I$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



Démonstration

On écrit $y = mx + p$ l'équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

Par définition, le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de cette tangente, c'est-à-dire $m = f'(a)$. Ensuite, comme cette droite passe par le point de coordonnées $(a; f'(a))$, on doit avoir $f(a) = ma + p$. Avec $m = f'(a)$, cela donne :

$$f(a) = f'(a)a + p \Rightarrow p = f(a) - f'(a)a$$

On en déduit que l'équation réduite de la tangente est

$$y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$$

ce qui se réécrit $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.



3 - Variations

Propriété 3 (Admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- ❖ Si f' est (strictement) positive sur I , alors f est (strictement) croissante sur I .
- ❖ Si f' est (strictement) négative sur I , alors f est (strictement) décroissante sur I .

Propriété 4 (Admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $a \in I$ qui n'est pas une borne de I . Si f admet un extremum en a , alors $f'(a) = 0$.

Remarque

La réciproque est fausse : on peut avoir $f'(a) = 0$ sans que a soit un extremum.

II - Formules de dérivées

1 - Dérivées simples

Propriété 5 (Admise)

Fonction	Dérivée	Intervalle
a (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

2 - Opérations

Propriété 6 (Admise)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et a un nombre réel

Fonction	Dérivée	Intervalle
$u + v$	$u' + v'$	I
au	au'	I
uv	$u'v + uv'$	I
$\frac{1}{v}$	$-\frac{1}{v^2}$	I , si v ne s'annule pas
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	I , si v ne s'annule pas

Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x+1}{2x^2+3}$.

Pour tout réel x , $2x^2 \geq 0$, donc $2x^2+3 > 0$. La fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est un quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et dont le dénominateur ne s'annule pas, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{5(2x^2+3) - 4x(5x+1)}{(2x^2+3)^2} = \frac{10x^2+15-20x^2-4x}{(2x^2+3)^2} = \frac{-10x^2-4x+15}{(2x^2+3)^2}$$

3 - Dérivées composées

Propriété 7 (Admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soient a et b deux réels. On note J l'ensemble des réels x tels que $ax+b \in I$.

Alors la fonction g définie sur J par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable, et pour tout $x \in J$, $g'(x) = af'(ax+b)$.

Propriété 8 (Admise)

1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction f définie sur I par $f(x) = u(x)^2$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $f'(x) = 2u'(x)u(x)$.
2. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.
3. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . On suppose que u est strictement positive. La fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $] -1, 1[$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

On note $u(x) = 1-x^2$, de sorte que $f(x) = \sqrt{u(x)}$. La fonction u est dérivable et strictement positive sur $] -1, 1[$, donc f est dérivable sur $] -1, 1[$.

Pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)e^{-\frac{x}{2}}$. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Expliquer pourquoi f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- 3.** Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- 4.** On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
- 5.** Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. La fonction f admet-elle un extremum global ? Si oui, préciser en quelle valeur il est atteint, et combien il vaut.
- 6.** Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

Solution

1. Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est nécessairement continue sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2e^{-\frac{x}{2}} + (2x + 1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \\
 &= 2e^{-\frac{x}{2}} - \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \\
 &= \left(2 - x - \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \\
 &= \left(\frac{3}{2} - x\right) e^{-\frac{x}{2}}
 \end{aligned}$$

3. On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

4. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la droite horizontale d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2} - x\right) e^{-\frac{x}{2}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$4e^{-\frac{3}{4}}$	0

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(2 \times \frac{3}{2} + 1\right) e^{-\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} = 4e^{-\frac{3}{4}}$$

f admet donc un maximum global atteint en $x = \frac{3}{2}$, qui vaut $4e^{-\frac{3}{4}}$, mais pas de minimum global.

6. $f'(0) = \left(\frac{3}{2} - 0\right) e^{-\frac{0}{2}} = \frac{3}{2} \times e^0 = \frac{3}{2}$ et $f(0) = (2 \times 0 + 1)e^{-\frac{0}{2}} = 1 \times e^0 = 1$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est donc : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{3}{2}x + 1$.

