

❖ Calcul littéral et algébrique ❖

I - Développer et factoriser

Propriété 1

Soient a , b , c et d des nombres.

1. $a(b + c) = ab + ac$

2. $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Démonstration

On admet le premier point et on montre le second. En utilisant deux fois de suite le premier point, on a :

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$



Exemples

❖ $(3x - 2)(4x + 5) = 12x^2 + 15x - 8x - 10 = 12x^2 + 7x - 10$

❖ $5x - 7x^2 = x \times 5 - x \times 7x = x(5 - 7x)$

Propriété 2 (Identités remarquables)

Soient a et b des nombres.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Démonstration

1. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$



Exemples

❖ $36x^2 - 100 = (6x)^2 - 10^2 = (6x + 10)(6x - 10)$

❖ $49x^2 - 28x + 4 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 2 + 2^2 = (7x - 2)^2$

Exercice 1

1. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$A = (3x - 2)^2$$

$$B = (4x - 1)(4x + 1)$$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$$C = 49x^2 - 81$$

$$D = 4x^2 + 20x + 25$$

Solution

1. $A = (3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$

$$B = (4x - 1)(4x + 1) = (4x)^2 - 1^2 = 16x^2 - 1$$

2. $C = 49x^2 - 81 = (7x)^2 - 9^2 = (7x + 9)(7x - 9)$

$$D = 4x^2 + 20x + 25 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = (2x + 5)^2$$



II - Fractions

Propriété 3

Soient a , b , c et d des nombres avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si, et seulement si, $ad = bc$.

2. Pour tout nombre k non nul, on a $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.

Démonstration

1. En multipliant par $d \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \times d = \frac{c}{d} \times d \Leftrightarrow \frac{a}{b} \times d = c$$

Ensuite, en multipliant par $b \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{b} \times d = c \Leftrightarrow \frac{a}{b} \times d \times b = c \times b \Leftrightarrow \frac{a}{b} \times b \times d = bc \Leftrightarrow ad = bc$$

Ainsi, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si, et seulement si, $ad = bc$.

2. Soit k un nombre non nul. On a :

$$\frac{a}{b} \times kb = k \times \frac{a}{b} \times b = k \times a = ka$$

Par conséquent, $\frac{a}{b}$ est le nombre qui, multiplié par kb , donne ka , c'est-à-dire $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.



Exemples

❖ Pour tout nombre x non nul, $\frac{x}{5} = \frac{5}{x}$ si, et seulement si $x^2 = 25$.

❖ Pour tout nombre x , $\frac{2x+4}{2} = \frac{2(x+2)}{2 \times 1} = \frac{x+2}{1} = x+2$

Propriété 4

Soient a , b , c et d des nombres avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

2. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$

$$\underline{3.} \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\underline{4.} \quad \text{Si } c \text{ est non nul, alors } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Démonstration

1. En multipliant par b , on obtient :

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) \times b = \frac{a}{b} \times b + \frac{c}{b} \times b = a + c$$

Ainsi, $\frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b , donne $a+c$, c'est-à-dire $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$.

2. On procède comme pour le point précédent :

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{b}\right) \times b = \frac{a}{b} \times b - \frac{c}{b} \times b = a - c$$

Par le même argument, cela assure que $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$.

3. On multiplie par bd :

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times bd = \left(\frac{a}{b} \times b\right) \times \left(\frac{c}{d} \times d\right) = a \times c = ac$$

Encore une fois par le même argument, cela démontre que $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

4. Supposons que c est non nul. On a :

$$\frac{ad}{bc} \times \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a \times cd}{b \times cd} = \frac{a}{b}$$

Cela signifie précisément que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.



Exemples

$$\diamond \quad \frac{3}{8} - \frac{11}{3} + \frac{5}{12} = \frac{9}{24} - \frac{88}{24} + \frac{10}{24} = \frac{-69}{24} = -\frac{23}{8}$$

$$\diamond \quad \frac{\frac{14}{5}}{\frac{21}{25}} = \frac{14}{5} \times \frac{25}{21} = \frac{14 \times 25}{5 \times 21} = \frac{2 \times 7 \times 5 \times 5}{5 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

Exercice 2

Écrire le résultat de chaque calcul sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{6}\right) \times \frac{4}{3}$$

$$B = \frac{\frac{1}{2} + 1}{3 - \frac{1}{4}}$$

Solution

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{3}{8} - \frac{5}{6} \right) \times \frac{4}{3} \\ &= \left(\frac{9}{24} - \frac{20}{24} \right) \times \frac{4}{3} \\ &= -\frac{11}{24} \times \frac{4}{3} \\ &= -\frac{11}{6 \times 3} \\ &= -\frac{11}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\frac{1}{2} + 1}{3 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{2}}{\frac{12}{4} - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{11}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{4}{11} \\ &= \frac{3 \times 2}{11} \\ &= \frac{6}{11} \end{aligned}$$



III - Puissances

Propriété 5

Soient a un nombre, et n, m des entiers relatifs.

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$

2. $(a^n)^m = a^{nm}$

3. Si a est non nul, alors $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Démonstration

1. *Commençons par rappeler que $a^0 = 1$. Ainsi, si $n = 0$, on a directement*

$$a^0 \times a^m = 1 \times a^m = a^m = a^{0+m}$$

donc la propriété est vraie. De façon symétrique, il en est de même si $m = 0$.

Supposons maintenant que n et m sont tous les deux non nuls. On distingue quatre cas possibles :

❖ $n > 0$ et $m > 0$: *Dans ce cas, le produit $a^n \times a^m$ est composé de $n+m$ facteurs a , donc $a^n \times a^m = a^{n+m}$.*

❖ $n > 0$ et $m < 0$: *Dans ce cas, on a $a^n \times a^m = \frac{a^n}{a^{-m}}$, avec $-m > 0$.*

→ Si $n \geq -m$, on simplifie $-m$ facteurs a , ce qui donne :

$$a^n \times a^m = a^{n-(-m)} = a^{n+m}$$

→ Si $n < -m$, on simplifie n facteurs a , ce qui donne :

$$a^n \times a^m = \frac{1}{a^{-m-n}} = a^{-(-m-n)} = a^{n+m}$$

Dans les deux cas, on a bien $a^n \times a^m = a^{n+m}$.

❖ $n < 0$ et $m > 0$: Dans ce cas, on échange les rôles de n et m , et on utilise le cas précédent :

$$a^n \times a^m = a^m \times a^n = a^{m+n} = a^{n+m}$$

❖ $n < 0$ et $m < 0$: Dans ce cas, on a :

$$a^n \times a^m = \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{a^{-m}} = \frac{1}{a^{-n} \times a^{-m}}$$

avec $-n > 0$ et $-m > 0$. On peut donc appliquer le premier cas au dénominateur, ce qui donne :

$$a^n \times a^m = \frac{1}{a^{-n+(-m)}} = \frac{1}{a^{-n-m}} = a^{-(-n-m)} = a^{n+m}$$

On a bien $a^n \times a^m = a^{n+m}$ dans tous les cas, ce qui prouve la propriété.

2. Encore une fois, on distingue trois cas.

❖ $m = 0$: On a alors $(a^n)^0 = 1$ et $a^{n \times 0} = a^0 = 1$, donc $(a^n)^m = a^{nm}$.

❖ $m > 0$: Dans ce cas, on a $nm = \overbrace{n + \dots + n}^{m \text{ fois}}$, donc en appliquant le premier point, on obtient :

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \times \dots \times a^n}_{m \text{ fois}} = a^{\overbrace{n + \dots + n}^{m \text{ fois}}} = a^{nm}$$

❖ $m < 0$: Dans ce cas, $(a^n)^m = \frac{1}{(a^n)^{-m}}$. Comme $-m > 0$, on peut appliquer le cas précédent au dénominateur :

$$(a^n)^m = \frac{1}{a^{n \times (-m)}} = \frac{1}{a^{-nm}} = a^{nm}$$

On a bien $(a^n)^m = a^{nm}$ dans chaque cas possible, donc la propriété est vraie.

3. Supposons que a est non nul. En utilisant que $a^m = \frac{1}{a^{-m}}$ ainsi que le premier point, on obtient :

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \times \frac{1}{a^m} = a^n \times a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}$$

ce que l'on voulait démontrer.



Exemples

❖ $2^8 \times 2^{-5} = 2^{8+(-5)} = 2^3$

❖ $\frac{10^5}{10^3} = 10^{5-3} = 10^2$

Propriété 6

Soient a et b deux nombres et n un entier relatif.

1. $a^n \times b^n = (ab)^n$

2. Si b est non nul, alors $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Démonstration

1. Si $n = 0$, on a $a^0 \times b^0 = 1 \times 1 = 1$ et $(ab)^0 = 1$, donc l'égalité est vraie.

Si $n > 0$, en regroupant les facteurs, on a :

$$a^n \times b^n = (\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}) \times (\underbrace{b \times \cdots \times b}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{(a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}_{n \text{ fois}} = (ab)^n$$

Si $n < 0$, en utilisant le cas précédent, on a :

$$a^n \times b^n = \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \times b^{-n}} = \frac{1}{(ab)^{-n}} = (ab)^n$$

puisque $-n > 0$.

2. En utilisant le premier point, on a

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \times b^n = \left(\frac{a}{b} \times b\right)^n = a^n$$

ce qui signifie précisément que $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$.



Exemples

❖ $2^{-5} \times 7^{-5} = (2 \times 7)^{-5} = 14^{-5}$

❖ $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{4^2}{9^2} = \frac{16}{81}$

Exercice 3

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = \frac{14^2 \times 2^3}{21^2 \times 4^3}$$

$$B = \frac{(2^3)^4}{6^5} \times \left(\frac{3}{8}\right)^3$$

Solution

$$\begin{aligned} A &= \frac{14^2 \times 2^3}{21^2 \times 4^3} \\ &= \frac{2^2 \times 7^2 \times 2^3}{3^2 \times 7^2 \times 2^6} \\ &= \frac{1}{2 \times 3^2} \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{(2^3)^4}{6^5} \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 \\ &= \frac{2^{12}}{2^5 \times 3^5} \times \frac{3^3}{8^3} \\ &= \frac{2^{12} \times 3^3}{2^5 \times 3^5 \times 2^9} \\ &= \frac{1}{2^2 \times 3^2} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$



IV - Racines carrées

Propriété 7

Soit a un nombre.

1. Si a est positif, on a $(\sqrt{a})^2 = a$.
2. Dans tous les cas, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Démonstration

1. Par définition, $\sqrt{a}$ est le nombre positif qui, élevé au carré, donne a , ce qui est exactement le résultat énoncé.
2. On a $a \times a = a^2$ et $(-a) \times (-a) = a^2$, donc $\sqrt{a^2} = a$ ou $\sqrt{a^2} = -a$, selon le signe de a . Par conséquent, $\sqrt{a^2} = |a|$, une racine carrée étant toujours positive.



Exemples

$$\diamond (\sqrt{4})^2 = 4$$

$$\diamond \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$$

Propriété 8

Soient a et b deux nombres positifs.

1. $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
2. Si b est non nul, alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Démonstration (Au programme)

1. Par définition, $\sqrt{a \times b}$ est le nombre positif qui élevé au carré, donne $a \times b$. Or, si on élève $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ au carré, on obtient :

$$(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$$

Puisque $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif, on en déduit que $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

2. Supposons que b est non nul. Par définition, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ est le nombre qui, multiplié par $\sqrt{b}$, donne $\sqrt{a}$. Or, en multipliant $\sqrt{\frac{a}{b}}$ par $\sqrt{b}$, et en utilisant le premier point, on obtient :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \times \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b} \times b} = \sqrt{a}$$

Ainsi, on a bien $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.



Exemples

$$\diamond \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\diamond \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

Exercice 4

Écrire chaque expression sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b des nombres entiers.

$$A = \sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{48}$$

$$B = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

Solution

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{48} \\ &= \sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{16 \times 3} \\ &= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

