

33 leçons d'algèbre pour l'agrégation interne de mathématiques

Errata

Malgré toute l'attention portée aux erreurs et coquilles lors des différentes relectures, des modifications sont à apporter. Ces changements seront faits ultérieurement lors d'une réédition.

- **Page 9** : Dans la preuve du théorème 12, quatrième ligne en partant du haut, il faut lire " \tilde{k} est d'ordre $p - 1$ " au lieu de " k est d'ordre $p - 1$ ".
- **Page 15** : Dans la démonstration de la proposition 4, dans la définition de σ il faut remplacer " $\forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, \sigma(k) = k$ " par " $\forall k \in \llbracket 4, n \rrbracket, \sigma(k) = k$ ", et dans la définition de τ il faut remplacer " $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \tau(k) = k$ " par " $\forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket, \tau(k) = k$ ".
- **Page 19** : Dans la proposition 15, la signature d'un p -cycle est $(-1)^{p+1}$ et non $(-1)^p$.
- **Page 27** : Même remarque qu'à la page 9.
- **Page 36** : Dans la preuve de la proposition 7, première ligne, il faut lire " $\text{Ker}(f) \neq \emptyset$ " au lieu de " $\text{Ker}(\varphi) \neq \emptyset$ ".
- **Page 53** : Dans la preuve du lemme 19, dernier paragraphe, il faut retirer le "s" de "contenus" dans "*les polynômes $\frac{1}{c(A)}A$ et $\frac{1}{c(B)}B$ sont de contenus 1*".
- **Page 60** : Dans la remarque qui précède le corollaire 11, au deuxième paragraphe il faut lire "*les mêmes définitions et propriétés que dans \mathbb{Z}* " et non "*les mêmes définitions et propriétés quand dans \mathbb{Z}* ".
- **Page 61** : Dans la démonstration du théorème 13, deuxième ligne, il faut remplacer I par $\text{Ker}(\varphi)$.
- **Page 67** : Dans la démonstration du théorème 4, au troisième paragraphe, il faut remplacer les deux q_{N-1} dans l'égalité " $r_{N-2} = q_{N-1}r_{N-1} + r_N = q_{N-1}r_{N-1}$ " par q_{N-2} .
- **Page 69** : Dans le théorème 9, les exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ sont dans \mathbb{N}^* et non \mathbb{N} .
- **Page 71** : Dans la démonstration de la proposition 13, à la toute fin, il faut vérifier que a, b, c sont premiers entre eux dans leur ensemble. Pour cela, on considère un diviseur premier d de b et c . Comme vu au début de la preuve, a étant pair, b et c sont impairs, donc $d \neq 2$. Ensuite, d divise $b + c = 2p^2$ et $c - b = 2q^2$. Il s'agit d'un nombre premier distinct de 2, donc il divise p et q , ce qui contredit le fait que ces entiers sont premiers entre eux. b et c n'ont donc aucun diviseur premier commun, donc sont premiers entre eux, et a, b, c le sont aussi dans leur ensemble a fortiori.
- **Page 73** : Même remarque qu'à la page 53.
- **Page 76** : Dans la preuve du théorème 20, l'écriture des déterminants porte à confusion. Pour $R(X)$, le b_m de la première colonne " b_0, \dots, b_m " est sur la même ligne que le $\alpha_1(X)$ de la dernière colonne " $\alpha_0(X), \dots, \alpha_n(X)$ ", et le b_{m-1} est sur la même ligne que le $\alpha_0(X)$. En effet, il y a $n + 1$ coefficients $\alpha_0(X), \dots, \alpha_n(X)$ et $m + 1$ coefficients b_0, \dots, b_m dans un déterminant de taille $n + m$, ce qui donne 2 coefficients qui se "superposent". Il suffit d'écrire un exemple concret avec n et m petits pour s'en convaincre. Il en est de même pour le déterminant $\tilde{R}(X)$.

- **Page 81** : Dans la démonstration du théorème 7, dans le troisième paragraphe il faut lire " $|P(z_0)| = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|$ " et pas " $P(z_0) = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|$ ".
- **Page 84** : Dans la démonstration de la proposition 16, troisième ligne, il faut lire "*si l'on note $\tilde{P} : x \mapsto P(x)$* ".
- **Pages 87 et 88** : Même remarque qu'à la page 76.
- **Page 92** : Même remarque qu'à la page 81.
- **Page 101** : Dans la proposition 8, il faut remplacer " $\dim(E_1 \times \dots \times E_s) = \dim(E_1) \times \dots \times \dim(E_s)$ " par " $\dim(E_1 \times \dots \times E_s) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_s)$ ".
- **Page 116** : Dans la preuve de la proposition 9, première ligne, il faut lire " $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ " et pas " $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ".
- **Page 118** : Dans la preuve du théorème 16, troisième ligne, il faut remplacer \mathbb{K} par \mathbb{R} .
- **Page 123** : Dans la preuve de la proposition 7, après la phrase "*Appliquer la permutation σ aux colonnes de $A \dots$* " il faut lire " $\varphi(AP_{\sigma^{-1}})$ " dans l'égalité suivante et pas " $\varphi(AP_{\sigma})$ ".
- **Page 124** : Dans la preuve de la proposition 8, avant-dernier paragraphe, pour étendre le résultat par récurrence il ne faut pas considérer $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_{s+1})$ mais une matrice A triangulaire par blocs dont les blocs diagonaux sont A_1, \dots, A_{s+1} . Cela ne change rien au raisonnement.
- **Pages 130 et 131** : Même remarque qu'à la page 76.
- **Page 131** : Il faut réécrire l'énoncé de la proposition 23, qui devient :

Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}^n$. Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $x_i = \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ \vdots \\ x_{i,n} \end{pmatrix}$. Alors x_0, \dots, x_n sont contenus dans un même hyperplan affine si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_{0,1} & \cdots & x_{0,n} & 1 \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,n} & 1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,n} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La preuve de cette proposition est également fautive, puisque φ n'est pas une forme linéaire mais une forme "affine". On effectuant l'opération $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour toutes les lignes sauf la première, puis en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne, on montre que celui-ci est égal à

$$\begin{vmatrix} x_{1,1} - x_{0,1} & \cdots & x_{1,n} - x_{0,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n,1} - x_{0,1} & \cdots & x_{n,n} - x_{0,n} \end{vmatrix}$$

Les colonnes de ce déterminant sont les coordonnées des vecteurs $x_i - x_0$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Celui-ci est nul si, et seulement si, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls

tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i(x_i - x_0) = 0$. En notant $\varphi : (y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$, qui est cette fois bien une forme linéaire, cela revient à dire que $(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0) \in \text{Ker}(\varphi)$, donc que $(x_1, \dots, x_n) \in x_0 + \text{Ker}(\varphi)$, ce qui est bien un hyperplan affine.

- **Page 136** : Dans la démonstration de l'exercice 9, à la fin du deuxième paragraphe, il faut lire " $MZ = 2A$ au lieu de " $MZ = A$ ".
- **Page 137** : Même remarque qu'à la page 131.
- **Page 138** : Dans la démonstration de la proposition 11, à la fin du troisième paragraphe de la page, il manque un "s" à "déterminants" dans "*Cela implique que les déterminants extraits ...*".
- **Page 139** : Dans la preuve de la proposition 11, dans l'avant-dernier paragraphe, on étudie uniquement le cas $p = 0$: les cas $q = 0$ et $r = 0$ sont en tout point analogues.
- **Page 146** : Dans le corollaire 12, il n'y a pas de "s" à "connexes".
- **Page 147** : Dans le quatrième paragraphe, à la deuxième phrase, il faut lire "*Le calcul du rang*" et non "*Le calcul rang*".
- **Page 157** : Dans la preuve du théorème 15, au deuxième paragraphe après le lemme, il manque un "e" à "carrée" dans "*Elle admet donc une unique racine carré* $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ".
- **Page 164** : Dans la preuve de la proposition 17, il faut préciser au départ que quitte à transposer la matrice, on peut supposer que $p \geq n$.
- **Page 168** : Dans la preuve du théorème 22, au deuxième paragraphe, première ligne, il faut lire " $L_i(x) = l_i(\sqrt{-a_i}x)$ " au lieu de " $L_i(x) = l_i(\sqrt{-a_i}x_i)$ " lorsque $i \in \llbracket p + 1, r \rrbracket$.
- **Page 210** : La preuve du corollaire 19 est fautive en l'état, même si l'idée reste la bonne. En gardant les mêmes notations, la fonction Δ_k qui à une matrice associe son mineur principal d'ordre k est continue, donc $\Omega_k = \Delta_k^{-1}(]0, +\infty[)$ est ouvert. Le théorème 18 énonce que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'intersection des Ω_k pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ce qui assure qu'il est ouvert.
- **Page 220** : Dans la preuve de la proposition 18, troisième paragraphe, il faut lire "*Tout vecteur propre x de v* " au lieu de "*Tout vecteur propre de v* ".
- **Page 232** : Dans la toute dernière ligne, pour construire la base (e_1, \dots, e_n) il faut parcourir chaque colonne de haut en bas, et pas de bas en haut.
- **Page 239** : Dans la proposition 14, il faut remplacer "homéomorphe" par "isomorphe".
- **Page 244** : Même remarque qu'à la page 157.
- **Page 246** : Dans la preuve du corollaire 25, au début du dernier paragraphe il faut lire "*la relation orbite-stabilisateur*" et non "*le relation orbite-stabilisateur*".
- **Page 252** : Même remarque qu'à la page 138.
- **Page 253** : Même remarque qu'à la page 139.
- **Page 285** : Dans la fin de la preuve du théorème 9, dans le second point, il faut lire "*elle est réduite au point $(0, 0)$* " au lieu de "*elle est réduite au point $\{0\}$* ".
- **Page 285** : Même remarque qu'à la page 138.

- **Page 286** : Même remarque qu'à la page 139.
- **Page 295** : Dans la démonstration de la proposition 13, au deuxième paragraphe il est écrit trois fois " $\mathcal{SO}(E) \setminus \mathcal{O}(E)$ " au lieu de " $\mathcal{O}(E) \setminus \mathcal{SO}(E)$ ".
- **Page 297** : Dans le troisième paragraphe, il faut remplacer "retournements" par "réflexions".
- **Page 302** : Dans la preuve de la proposition 11, dans le premier point, à la deuxième ligne, il faut lire "*conserver la distance*" au lieu de "*conserver le distance*".
- **Page 306** : Dans le deuxième paragraphe, deuxième ligne, il faut lire "*les propositions 11 et 12 qui le décrivent*" au lieu de "*les propositions 11 et 12 qui le décrivent*".
- **Page 313** : Dans la preuve du corollaire 13, troisième ligne, il faut lire " $c \in \mathbb{C}$ " et non " $c \in C$ ".
- **Page 318** : Dans la démonstration de la proposition 8, à la première ligne il faut lire " $D_n(t) = \exp(-iNt) \sum_{n=0}^{2N} \exp(it)^n$ " au lieu de " $D_n(t) = \exp(-iNt) \sum_{n=0}^{2N} \exp(it)^N$ ".
- **Page 331** : Même remarque qu'à la page 302.
- **Page 344** : Dans la preuve du corollaire 15, au début du quatrième paragraphe il faut lire "*pour $i, j \in \llbracket 1, p - 1 \rrbracket$* " au lieu de "*pour $i, j \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$* ".